

# 充液功能梯度材料圆柱壳 振动特性的波动解\*

Z 伊克巴尔<sup>1</sup>, M N 纳伊姆<sup>2</sup>, N 萨尔塔纳<sup>1</sup>,  
S H 阿沙德<sup>1</sup>, A 沙赫<sup>3</sup>

(1. 萨戈达大学 数学系, 旁遮普, 巴基斯坦;

2. G. C. 费萨拉巴德大学 数学系, 旁遮普, 巴基斯坦;

3. 巴哈瓦尔普尔伊斯兰大学 数学系, 巴哈瓦尔普尔, 旁遮普, 巴基斯坦)

(沈惠申推荐)

**摘要:** 利用波动法, 研究充满非粘滞不可压缩流体的, 功能梯度材料圆柱壳的振动特性. 相关的轴向形态用指数函数来近似, 在两端简支、一端固支另一端简支和两端固支边界条件下, 计及流体的影响, 理论研究了壳的振动频率. 通过与现有文献研究结果比较, 验证了该方法的有效性和精确性, 发现二者吻合得很好.

**关键词:** 功能梯度材料; Love 壳体理论; 圆柱壳; 体积分数律; 固有频率; 波的传播

中图分类号: O327 文献标识码: A

DOI 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.11.005

## 引 言

充液功能梯度材料圆柱壳振动特性的研究十分重要, 又是一个结构动力学中广受关注的课题. 注液壳体在工程结构中应用广泛, 例如压力容器、油轮、飞机、飞船和海船, 等. 1952 年 Junger 等<sup>[1]</sup>最先研究了充液圆柱壳体的耦合振动. Jain<sup>[2]</sup>讨论了部分完全注满不可压缩非粘性流体的, 正交各向异性圆柱壳的自由振动. Goncalves 和 Batista<sup>[3]</sup>分析了部分浸入液体或充满液体的圆柱壳的频率响应. Chen 等<sup>[4]</sup>研究了充液横观各向同性圆柱壳自由振动的精确解. Zhang 等<sup>[5]</sup>利用波动法, 分析了充液圆柱壳的耦合振动. Zhang 等<sup>[6]</sup>用特征梁函数的近似特征值, 发展了波动法, 并分析了各向同性圆柱壳的振动特性. Li<sup>[7]</sup>利用波动技术, 在两端抗剪隔板 (shear diaphragm) 支承、两端固支和一端固支另一端抗剪隔板支承的边界条件下, 研究了圆柱壳的自由振动. Zhang<sup>[8]</sup>推广应用波动法, 研究了浸没于流体中的圆柱壳的耦合频率, 并与有限元法和边界元法得到的结果进行了比较验证. Natsuki 等<sup>[9]</sup>使用波动法, 给出了充液双壁碳纳米管的振动分析. 他们用 Flugge 壳方程作为碳纳米管振动的控制方程. Haddadpour 等<sup>[10]</sup>使用 4 组 (平) 面内边界条件, 分析了热作用下简支功能梯度圆柱壳的自由振动. Sheng 等<sup>[11]</sup>研究了

\* 收稿日期: 2009-03-22 修订日期: 2009-07-28

作者简介: Zafar Iqbal 硕士 (联系人, E-mail: ziqbaluos@yahoo.com).

本文原文为英文, 吴承平译, 张禄坤校.

盛有流动流体的,功能梯度材料圆柱壳的振动,他们使用一阶剪切变形理论模拟其动力学特征.

很多学者研究过功能梯度材料构造的圆柱壳及其动力学性质. Loy等<sup>[12]</sup>最先利用 Rayleigh-Ritz法,分析了功能梯度圆柱壳的固有频率谱. Pradhan等<sup>[13]</sup>在一定的边界条件下,研究了功能梯度材料(如不锈钢和二氧化锆)圆柱壳的振动特性.他们使用的是 Rayleigh-Ritz法,以及轴向形态位移变形的特征梁函数. 2002年, Naem<sup>[14]</sup>分别使用 Rayleigh-Ritz法和 Galerkin法,对不转动/转动的功能梯度圆柱壳进行了振动分析.对不转动的壳体采用 Ritz多项式函数逼近相关的轴向位形,对转动的壳体采用特征梁函数逼近. Najafizadeh和 Isvandzbaei<sup>[15]</sup>以板的高阶剪切变形理论为分析基础,就环形支承条件下的不锈钢和镍构成的,复合功能梯度材料圆柱薄壳进行了振动分析. Arshad等<sup>[16]</sup>对具有可变体积分数律的功能梯度材料圆柱壳,给出了频率分析.他们在一定的物理参数下,讨论了壳体频率的性质.

本文应用波动法,研究充液功能梯度材料圆柱壳的振动特征.波动法避免了大量的代数计算和操作.本文在两端简支、一端固支另一端简支和两端固支等不同的边界条件下,进行了分析计算,并与上述文献结果进行比较,验证了本文方法的有效性和精确性.

### 1 壳体和流体的运动方程

在本文的振动分析中,设功能梯度圆柱壳长为  $L$ , 平均半径为  $R$ , 壳厚为  $h$ (见图 1). 壳体材料的弹性模量为  $E$ , Poisson 比为  $\nu$ , 质量密度为  $\rho$ . 在壳体中面上建立(正交坐标系)柱坐标系  $(x, \theta, z)$ . 分别用  $u, v$  和  $w$  表示轴向、环向和径向的位移. 利用 Love 的一阶壳体理论<sup>[17]</sup>得到圆柱壳的运动方程为

$$\begin{cases} \frac{N_x}{x} + \frac{1}{R} \frac{N_x}{\theta} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{N_x}{x} + \frac{1}{R} \frac{N_x}{\theta} + \frac{1}{R} \frac{M_x}{x} + \frac{1}{R^2} \frac{M_x}{\theta} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 M_x}{x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_x}{x \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_x}{\theta^2} - \frac{N_x}{R} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $N_x, N_\theta, N_x$  为合力,  $M_x, M_\theta, M_x$  为合力矩, 有如下关系:

$$\begin{cases} (N_x, N_\theta, N_x) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_x) dz, \\ (M_x, M_\theta, M_x) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_x) z dz \end{cases} \quad (2)$$

和

$$\tau = \int_{-h/2}^{h/2} \tau dz. \quad (3)$$

对薄圆柱壳,根据二维 Hooke 定律,式(2)中的应力  $\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_x$  有如下关系:

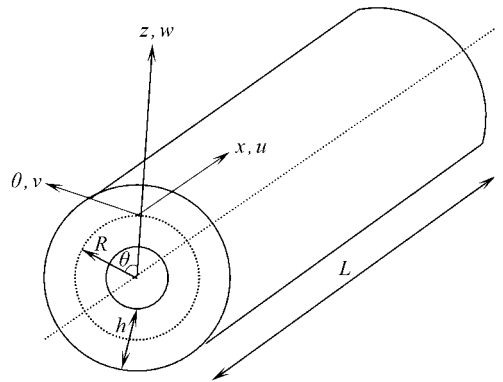


图 1 圆柱壳的几何关系

$$\begin{Bmatrix} x \\ e \\ x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e \\ e_x \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

其中的应变分量  $e_x$ ,  $e$ ,  $e_x$  定义为厚度方向坐标  $z$  的线性函数, 即

$$e_x = e_1 + zk_1, \quad e = e_2 + zk_2, \quad e_x = e_3 + 2z, \quad (5)$$

其中  $e_x$ ,  $e$  和  $e_x$  分别为距参考面  $z$  处的轴向应变、环向应变和剪切应变,  $e_1$ ,  $e_2$  和  $e_3$  为参考面的应变,  $k_1$ ,  $k_2$  为参考面的曲率. 根据 Love 壳体理论<sup>[17]</sup>, 参考面的应变和曲率的表达式为

$$\begin{cases} \langle e_1, e_2 \rangle = \left\langle -\frac{u}{x}, \frac{1}{R} \left( -\frac{v}{x} + w \right), \frac{v}{x} + \frac{1}{R} u \right\rangle, \\ \langle k_1, k_2 \rangle = \left\langle -\frac{2w}{x^2}, -\frac{1}{R^2} \left( \frac{2w}{x^2} - \frac{v}{x} \right), -\frac{1}{R} \left( \frac{2w}{x} - \frac{v}{x} \right) \right\rangle. \end{cases} \quad (6)$$

将式 (5) 和 (6) 代入式 (4), 然后将结果再代入式 (2), 得到合力和合力矩为

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N \\ N_x \\ M_x \\ M \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ k_1 \\ k_2 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

其中  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  和  $D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$  和  $6$ ) 分别为拉伸、耦合和弯曲刚度. 由下式定义:

$$\langle A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} \rangle = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \langle 1, z, z^2 \rangle dz \quad (8)$$

其中  $Q_{ij}$  为薄壳的折算刚度, 定义为

$$Q_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \quad Q_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (9)$$

其中,  $E$  和  $\nu$  分别为壳体材料的弹性模量和 Poisson 比. 将式 (7)、(8)、(9) 代入方程 (1) 并写成矩阵形式, 得

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

其中  $L_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) 是对于  $x$  和  $r$  的微分算子. 充满圆柱壳的流体满足声波方程, 在柱坐标系  $(x, r)$  中, 流体的运动方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (11)$$

其中,  $t$  为时间,  $p$  为声压,  $c$  为流体的声速.  $x$  和  $r$  坐标与壳体的对应坐标相一致,  $r$  坐标沿壳体轴向选取.

## 2 波动法

在对圆柱壳自由振动特征联合流体影响的研究中, 使用不同的数值方法, 以求解壳体的动

力学问题. Goncalves和 Batista<sup>[3]</sup>利用 Galerkin法,研究了带有流体或浸没于流体中的简支竖向圆柱壳的自由振动.他们利用 Galerkin法求解壳体方程,利用特征梁函数逼近相关的轴向形态.其中包括对这些函数的积分,积分所需要的评估将是一个冗长的积分过程.为简化该方法,Zhang等<sup>[6]</sup>采用梁函数近似特征值,发展为波动法.该方法已为一些作者<sup>[7-9]</sup>所采用.壳体方程的位移形态可以用带轴向波数  $k_m$  和环向形态参数  $n$  的波的传播形式表示,即

$$\begin{cases} u(x, z, t) = A_m \sin(nz) e^{(i\omega t - k_m x)}, \\ v(x, z, t) = B_m \cos(nz) e^{(i\omega t - k_m x)}, \\ w(x, z, t) = C_m \sin(nz) e^{(i\omega t - k_m x)}, \end{cases} \quad (12)$$

其中  $A_m, B_m, C_m$  分别表示  $x, y$  和  $z$  方向的波幅,  $n$  为环向波数,  $k_m$  为轴向波数,由不同的边界条件来确定(参看文献[5]).  $\omega$  为圆柱壳的固有圆频率.含有流体,满足声波方程(11)的声压场在柱坐标系中的形式,可以用轴向波数  $k_m$ 、径向波数  $k_r$  和环向形态参数  $n$  给出:

$$p = p_m \cos(nz) J_n(k_r r) e^{(i\omega t - k_m x)}, \quad (13)$$

其中  $J_n(\cdot)$  为  $n$  阶 Bessel函数.按照惯常的矢量关系,径向波数  $k_r$  与轴向波数  $k_m$  有关系式  $(k_r R)^2 = \omega^2 (C_L / C_F)^2 - (k_m R)^2$ ,其中  $\omega$  为无量纲频率参数,  $C_L$  和  $C_F$  分别为壳体和流体的声速.由于流体与壳壁始终保持接触,在壳体内壁与流体的界面上,流体径向位移与壳体径向位移必须相等.该耦合条件表达为:

$$- \left\{ \frac{1}{i\omega} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right\}_{r=R} = \left( \frac{w}{t} \right)_{r=R} \quad (14)$$

和 
$$p_m = \left[ \frac{\omega^2}{C_F} / k_r J_n(k_r R) \right] W_m, \quad (15)$$

其中  $\rho_F$  为所含流体的密度,  $J_n(\cdot)$  上的撇号表示对变量  $k_r R$  的导数.将式(12)代入式(10),并考虑壳体内壁上的声压,再结合方程(15),我们得到矩阵形式耦合系统的运动方程:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} + F_L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ V_m \\ W_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

其中  $C_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$  为在对  $x$  和  $z$  运算后,从  $L_{ij}$  得到的参数.  $F_L$  为由于流体声场作用产生的流体荷载项,由下式给出:

$$F_L = \omega^2 \left( \rho_F / s \right) (R/h) (k_r R)^{-1} \left[ J_n(k_r R) / J_n(k_r R) \right]. \quad (17)$$

由方程(16),得到以特征值问题形式的频率方程:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ -T_{13} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_m \\ B_m \\ C_m \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_m \\ B_m \\ C_m \end{Bmatrix}, \quad (18)$$

其中引入的  $T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{22}, T_{23}$  和  $T_{33}$  在附录中给出.

若没有  $F_L$  项,就得到非耦合圆柱壳的频率方程.利用功能强大的软件包 MATLAB 求解特征值问题(18),得到固有频率及其模态.通过边界条件的轴向波数值的变换,仅靠 MATLAB 程序,就可以确定壳体频率.这就是本文采用波动法的主要特色.

### 3 功能梯度材料

功能梯度材料 (FGM) 是先进的复合材料,并引起了材料科学家的极大关注.日本学

者<sup>[18-19]</sup>首先研究了这类材料,发现在极高的温度环境下,它们具有良好的性能.功能梯度材料在极高的温度范围内,具有保持其完整性的能力,并常常在运行条件严峻的环境中,得到广泛的应用.从力学和热力学的观点来看,它们是微观非均匀材料,其力学性能从一个表面到另一个表面进行变化.它们综合了两种或更多种不同材料的混合属性,通常由陶瓷和金属混合构成.它们是多功能的材料,陶瓷的高温抗热性和金属的强度和抗断裂韧性的理想组合,双方性能都得到充分地利用.例如,使金属的韧性和陶瓷的耐热性紧密配合.因此,用 FGM 制作圆柱壳,以及这些壳体充满流体时对振动的影响,正是本文要研究的.在本文分析中,圆柱壳由两种材料组成:不锈钢 ( $M_1$ ) 和镍 ( $M_2$ ),壳内充满流体时,研究其振动特性.功能梯度合成材料的性能  $P$  是,各组分材料的性能及其体积比的函数,即

$$P = \sum_{k=1}^l P_k V_k, \tag{19}$$

其中  $P_k$  和  $V_k$  分别表示组分材料  $k$  的材料性能和体积比.所有组份材料的体积比的和为 1,即

$$\sum_{k=1}^l V_k = 1. \tag{20}$$

对具有均匀厚度  $h$  的圆柱壳,取中面为参考面,则体积比可表达为:

$$V_k = \left[ \frac{z}{h} + 0.5 \right]^N, \tag{21}$$

其中  $N$  为幂律指数,其取值范围为  $0 < N < \infty$ .由  $M_1$  和  $M_2$  这两种材料构成的 FGM 圆柱壳,其合成材料的性能,即弹性模量  $E$ , Poisson 比  $\nu$  和质量密度  $\rho$  由下式给出:

$$\begin{cases} E = (E_2 - E_1) \left[ \frac{z}{h} + 0.5 \right]^N + E_1 \\ \nu = (\nu_2 - \nu_1) \left[ \frac{z}{h} + 0.5 \right]^N + \nu_1 \\ \rho = (\rho_2 - \rho_1) \left[ \frac{z}{h} + 0.5 \right]^N + \rho_1 \end{cases} \tag{22}$$

其中,当  $z = -h/2$  时,  $E = E_1, \nu = \nu_1, \rho = \rho_1$ ; 而当  $z = h/2$  时,  $E = E_2, \nu = \nu_2, \rho = \rho_2$ .说明壳体内表面的材料性能对应于组分材料  $M_1$ ,而壳体外表面的材料性能对应于组分材料  $M_2$ . FGM 中的性能沿厚度方向变化.因此,本文所研究的圆柱壳的性能,由壳体内表面的材料  $M_1$  逐渐变化到壳体外表面的材料  $M_2$ .如果壳体的厚(度半)径比小于  $1/20$  那么经典的壳理论也可用于 FGM 壳.

### 4 数值结果和讨论

为验证本方法的有效性、效率和精度,对不同边界条件下的一些结果进行了比较.表 1 列出了两端固支各向同性圆柱壳,在非耦合及耦合情况下的无量纲频率参数

$$\omega = R \sqrt{(1 - \nu^2) E},$$

并与 Zhang 等在文献 [5] 中给出的相应值进行了比较. Zhang 等数值求解多项式频率方程,而本文用 MATLAB 指令求解特征频率方程.计算频率参数时,我们取轴向波数  $m = 1, 2, 3$  几何参数  $L/R = 20, h/R = 0.01$ .可以看出,本文结果非常接近或略小于文献 [5] 得到的结果.

表 1 两端固支各向同性圆柱壳组合的频率参数  $\omega = R \sqrt{(1 - \nu^2) / E}$  的比较  
 ( $m = 1, 2, 3, L/R = 20, h/R = 0.01$ )

序号	$(m, n)$	文献 [5]		本文	
		非耦合频率 $\omega_{uc}$	耦合频率 $\omega_c$	非耦合频率 $\omega_{uc}$	耦合频率 $\omega_c$
1	(1, 2)	12.17	4.93	12.1207	4.90830
2	(1, 3)	19.61	8.94	19.6061	8.92407
3	(1, 4)	36.47	18.26	36.4743	18.23588
4	(2, 2)	28.06	11.48	28.0572	11.35120
5	(2, 3)	23.28	10.64	23.2707	10.58120
6	(2, 4)	37.37	18.73	37.3688	18.66950
7	(3, 3)	31.98	14.66	31.9568	14.50640
8	(3, 4)	39.78	19.96	39.7611	19.84250

表 2 给出没有流体时, 功能梯度材料简支圆柱壳的固有频率 (Hz), 与 Loy 等<sup>[12]</sup> 的结果相比较, 其轴向半波数  $m = 1$ , 几何参数  $L/R = 20, h/R = 0.002$ . 体积比指数  $N$  等于 0.5, 1, 1.5. 壳体内外表面材料为不锈钢, 外表面材料为镍. 从表中可以看出二者非常接近. 由此表明, 本文的波动法是准确有效的, 并且很容易地处理圆柱壳的振动分析.

表 2 简支条件下功能梯度材料圆柱壳的固有频率比较 ( $h/R = 0.002, L/R = 20$ ) Hz

序号	$N = 0.5$		$N = 1$		$N = 1.5$	
	文献 [6]	本文	文献 [6]	本文	文献 [6]	本文
1	13.3210	13.3210	13.2110	13.2110	12.9330	12.9330
2	4.5160	4.5162	4.4800	4.4790	4.3830	4.3830
3	4.1910	4.1903	4.1569	4.1560	4.0650	4.0650
4	7.0972	7.0967	7.0380	7.0379	6.8850	6.8850
5	11.3360	11.3350	11.2410	11.2407	10.9990	10.9980
6	16.5940	16.5935	16.4550	16.4549	16.1010	16.1010
7	22.8260	22.8258	22.6350	22.6349	22.1480	22.1480
8	30.0230	30.0225	29.7710	29.7710	29.1320	29.1320
9	38.1810	38.1811	37.8620	37.8615	37.0480	37.0480
10	47.3010	47.3005	46.9050	46.9046	45.8970	45.8970

表 3 功能梯度圆柱壳各组分材料的特性

材料	参数	$P_0$	$P^{-1}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P$
不锈钢	$E/(N/m^2)$	201.04E+09	0	3.079E-04	-6.534E-07	0	2.07788E+11
		0.3262	0	-2.002E-04	3.797E-07	0	0.317756
	$\rho/(kg/m^3)$	8.166	0	0	0	0	8.166
镍	$E/(N/m^2)$	223.95E+9	0	-2.794E-4	-3.998E-9	0	2.05098E+11
		0.3100	0	0	0	0	0.3100
	$\rho/(kg/m^3)$	8.900	0	0	0	0	8.900

本文研究了在一定边界条件下, 充满液体的功能梯度材料圆柱壳的振动特征. 假设壳体的

功能梯度组分材料由不锈钢和镍制作. 壳体的构造是可以改变的, 分两种类型. 类型 I, 内表面是不锈钢外表面是镍, 类型 II 正好相反. 充水的功能梯度圆柱壳, 其声速为  $c = 1500 \text{ m/s}$  质量密度为  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ . 表 3 列出温度  $T = 300 \text{ K}$  时, 不锈钢和镍的材料特性. 表 3 所列功能梯度壳的强度性能与温度有关. 在标准环境温度下, 我们计算了两端简支 (S-S)、一端固支另一端简支 (C-S) 和两端固支 (C-C) 圆柱壳的耦合频率.

表 4 列出在两端简支、两端固支和一端固支另一端简支的边界条件下, 型 I 圆柱壳耦合和非耦合振动固有频率 (Hz) 的变化和比较. 可以看出, 在以上边界条件下, 固有频率随  $N$  的增大而增大. 耦合情况下, 固有频率也随环向波数的增大而增大; 而非耦合情况下, 固有频率的变化, 与无液各向同性壳类似. 同时, 固有频率随轴向波数  $m$  的增大而增大. 边界约束增加, 频率增大更甚. 两端固支边界的频率最大, 两端简支边界的频率最小.

表 4 两端简支、两端固支和一端简支另一端固支边界条件下, 型 I 功能梯度材料圆柱壳的耦合  $f_c$  /Hz 与非耦合 ( $f_{uc}$  /Hz) 频率

边界条件	$m$	$n$	$N = 03$			$N = 1$			$N = 5$			$N = 10$		
			$f_{uc}$ /Hz	$f_c$ /Hz	比值	$f_{uc}$ /Hz	$f_c$ /Hz	比值	$f_{uc}$ /Hz	$f_c$ /Hz	比值	$f_{uc}$ /Hz	$f_c$ /Hz	比值
S-S	1	2	4.4160	0.9031	4.8898	4.4737	0.9049	4.9439	4.5498	0.9076	5.0130	4.5683	0.9083	5.0295
		3	4.0940	0.9599	4.2650	4.1478	0.9620	4.3116	4.2183	0.9650	4.3713	4.2368	0.9661	4.3855
		4	6.9391	1.8234	3.8056	7.0325	1.8284	3.8463	7.1505	1.8340	3.8989	7.1812	1.8361	3.9111
		5	11.0868	3.1982	3.4666	11.2372	3.2077	3.5032	11.4249	3.2179	3.5504	11.4734	3.2216	3.5614
		2	16.6282	3.3988	4.8924	16.8480	3.4062	4.9463	17.1326	3.4158	5.0157	17.1995	3.4181	5.0319
C-C	1	2	9.5233	1.9473	4.8905	9.6487	1.9514	4.9445	9.8121	1.9569	5.0141	9.8508	1.9583	5.0303
		3	5.7422	1.3458	4.2668	5.8166	1.3486	4.3131	5.9161	1.3529	4.3729	5.9415	1.3544	4.3868
		4	7.3264	1.9247	3.8065	7.4237	1.9296	3.8473	7.5492	1.9357	3.9000	7.5822	1.9381	3.9122
		5	11.2000	3.2302	3.4673	11.3510	3.2395	3.5039	11.5413	3.2501	3.5511	11.5907	3.2539	3.5621
		2	25.5497	5.2189	4.8956	25.8878	5.2303	4.9496	26.3245	5.2448	5.0192	26.4269	5.2483	5.0353
S-C	1	2	6.7063	1.3714	4.8901	6.7943	1.3742	4.9442	6.9096	1.3782	5.0135	6.9372	1.3792	5.0299
		3	4.7475	1.1129	4.2659	4.8093	1.1153	4.3121	4.8914	1.1188	4.3720	4.9127	1.1201	4.3859
		4	7.0802	1.8603	3.8059	7.1749	1.8652	3.8467	7.2957	1.8710	3.8994	7.3273	1.8732	3.9116
		5	11.1283	3.2099	3.4669	11.2788	3.2193	3.5035	11.4675	3.2296	3.5507	11.5164	3.2334	3.5617
		2	20.8725	4.2651	4.8938	21.1485	4.2744	4.9477	21.5055	4.2864	5.0171	21.5893	4.2892	5.0334
C-S	2	3	10.6479	2.4935	4.2703	10.7867	2.4988	4.3168	10.9705	2.5067	4.3765	11.0155	2.5089	4.3906
		4	8.9985	2.3625	3.8089	9.1157	2.3679	3.8497	9.2714	2.3758	3.9024	9.3118	2.3787	3.9147
		5	11.7215	3.3791	3.4688	11.8775	3.3882	3.5055	12.0781	3.3997	3.5527	12.1307	3.4039	3.5638

表 5 列出在两端简支、两端固支和一端固支另一端简支边界条件下, 型 II 圆柱壳固有频率

(Hz)的变化. 可以看出, 壳体频率随  $N$  的增大而减小, 频率变化情况与 型正相反.

表 5 两端简支、两端固支和一端简支另一端固支边界条件下, 型功能梯度材料圆柱壳的耦合 ( $\omega_c$  /Hz)与非耦合 ( $\omega_{uc}$  /Hz)频率

边界条件	$m$	$n$	$N = 0.3$			$N = 1$			$N = 5$			$N = 10$		
			$\omega_{uc}$ /Hz	$\omega_c$ /Hz	比值	$\omega_{uc}$ /Hz	$\omega_c$ /Hz	比值	$\omega_{uc}$ /Hz	$\omega_c$ /Hz	比值	$\omega_{uc}$ /Hz	$\omega_c$ /Hz	比值
S-S	1	2	4.5391	0.9079	4.9996	4.4795	0.9061	4.9437	4.4063	0.9034	4.8775	4.3893	0.9027	4.8624
		3	4.2120	0.9661	4.3598	4.1562	0.9640	4.3114	4.0885	0.9610	4.2544	4.0715	0.9599	4.2416
		4	7.1346	1.8348	3.8885	7.0380	1.8298	3.8463	6.9247	1.8242	3.7960	6.8966	1.8222	3.7848
		5	11.3963	3.2183	3.5411	11.2407	3.2087	3.5032	11.0607	3.1985	3.4581	11.0163	3.1949	3.4481
		2	17.0812	3.4148	5.0021	16.8541	3.4075	4.9462	16.5808	3.3979	4.8797	16.5195	3.3956	4.8650
G-C	1	2	9.7844	1.9567	5.0005	9.6547	1.9526	4.9445	9.4978	1.9471	4.8779	9.4623	1.9457	4.8632
		3	5.9072	1.3545	4.3612	5.8301	1.3517	4.3132	5.7344	1.3474	4.2559	5.7110	1.3459	4.2433
		4	7.5361	1.9375	3.8896	7.4354	1.9326	3.8474	7.3148	1.9265	3.7969	7.2846	1.9241	3.7860
		5	11.5152	3.2512	3.5418	11.3590	3.2418	3.5039	11.1764	3.2313	3.4588	11.1310	3.2275	3.4488
		2	26.2435	5.2429	5.0055	25.8941	5.2315	4.9497	25.4747	5.2169	4.8831	25.3811	5.2135	4.8683
S-C	1	2	6.8913	1.3783	4.9999	6.8003	1.3755	4.9439	6.6895	1.3715	4.8775	6.6643	1.3705	4.8627
		3	4.8846	1.1202	4.3605	4.8206	1.1179	4.3122	4.7416	1.1144	4.2548	4.7220	1.1131	4.2422
		4	7.2813	1.8723	3.8890	7.1833	1.8674	3.8467	7.0672	1.8616	3.7963	7.0382	1.8594	3.7852
		5	11.4401	3.2303	3.5415	11.2844	3.2209	3.5035	11.1033	3.2106	3.4583	11.0585	3.2069	3.4483
		2	21.4400	4.2849	5.0036	21.1547	4.2757	4.9477	20.8119	4.2637	4.8812	20.7352	4.2609	4.8664
S-C	2	3	10.9466	2.5079	4.3648	10.8031	2.5026	4.3168	10.6263	2.4948	4.2594	10.5850	2.4925	4.2467
		4	9.2586	2.3788	3.8921	9.1372	2.3735	3.8497	8.9875	2.3655	3.7994	8.9503	2.3627	3.7882
		5	12.0564	3.4024	3.5435	11.8949	3.3932	3.5055	11.7023	3.3818	3.4604	11.6540	3.3776	3.4504

图 2 示出, 两端简支、两端固支和一端固支另一端简支边界条件下, 型功能梯度材料圆柱壳耦合固有频率 (Hz)和环向波数  $n$  的关系. 型功能梯度材料圆柱壳, 在对应的支承条件下, 显示出和 型相同的变化.

图 3 示出, 在 3 种边界条件下, 当固定  $N$  值时, 型功能梯度材料圆柱壳的耦合频率随环向波数  $n$  的变化. 可以看出, 两端固支时固有频率较大, 两端简支时固有频率较小. 型功能梯度材料圆柱壳的耦合频率的变化趋势与 型相同.

图 4 示出功能梯度材料圆柱壳耦合频率  $\omega_c$  与体积比指数  $N$  的关系, 型的  $\omega_c$  随  $N$  增大而增大, 型的  $\omega_c$  随  $N$  增大而减小. 还可以得到, 壳体充液后频率降低. 型情况时, 耦合和非耦合频率的比值随体积比指数  $N$  的增大而增大; 固定  $N$  值时, 随环向波数的增大而减小. 型情况时, 耦合和非耦合频率的比值随体积数比  $N$  的增大而减小, 固定  $N$  值时, 随环向波数增大



而减小.

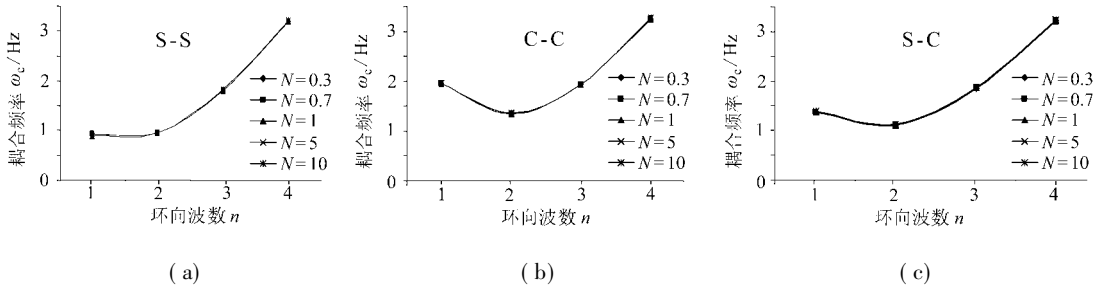


图 2 在两端简支 (S-S)、两端固支 (C-C)和一端简支另一端固支 (S-C)边界条件下, 型功能梯度材料圆柱壳耦合频率 (Hz)随环向波数  $n$  的变化

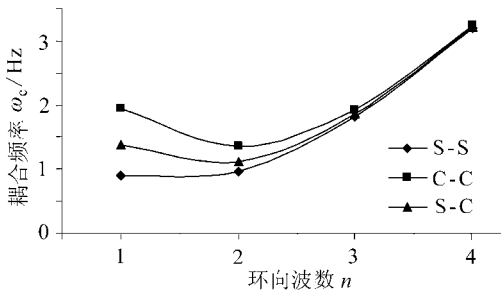


图 3 3种边界条件下, 型功能梯度材料圆柱壳耦合频率 (Hz)随环向波数  $n$  的变化

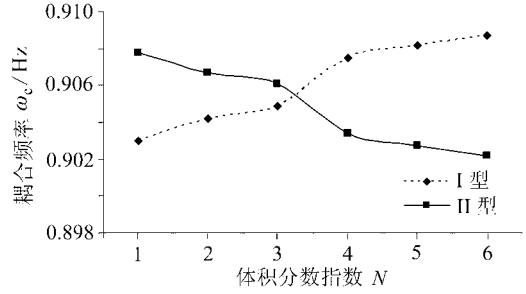


图 4 两端简支边界条件下, 型和 型功能梯度材料圆柱壳耦合振动频率 (Hz)与体积比指数  $N$  的变化

## 5 结论和说明

本文研究充液功能梯度材料圆柱壳的振动频率, 分析中考虑了体积分数律. 壳振动频率呈幂指数律变化, 3种边界条件: 两端简支、一端固支另一端简支和两端固支. 壳内是否充液要影响功能梯度材料壳的耦合频率 (Hz). 值得注意的是, 功能梯度材料圆柱壳的耦合振动频率小于非耦合振动频率. 在特征梁函数的近似特征值的基础上, 用波动法求解圆柱壳的控制方程. 本方法非常简便、快捷、结果精确. 本方法可推广应用于旋转壳、层压壳等其它的壳体问题.

## 附 录

$T_{ij}$  表达式

$$T_{11} = (K_m)^2 A_{11} + \frac{n^2}{R^2} A_{66} - {}^2 h \tau,$$

$$T_{12} = -\frac{K_m n}{R} \left[ (A_{12} + A_{66}) + \frac{B_{12}}{R} + \frac{2B_{66}}{R} \right],$$

$$T_{13} = K_m \left[ \frac{A_{12}}{R} + (K_m)^2 B_{11} + \frac{n^2}{R^2} (2B_{66} + B_{12}) \right],$$

$$T_{22} = (K_m)^2 \left[ A_{66} + \frac{4B_{66}}{R} + \frac{\mathcal{D}_{66}}{R^2} \right] + \frac{n^2}{R^2} \left[ A_{22} + \frac{2B_{22}}{R} + \frac{D_{22}}{R^2} \right] - {}^2 h \tau,$$

$$T_{23} = n(K_m)^2 \left[ \frac{B_{12} + B_{66}}{R} + \frac{D_{12} + \mathcal{D}_{66}}{R^2} \right] + \frac{n}{R^2} \left[ A_{22} + \frac{B_{22}}{R} \right] + \frac{n^3}{R^3} \left[ B_{22} + \frac{D_{22}}{R} \right],$$

$$T_{33} = \frac{(K_m)^2 n^2}{R^2} [D_{12} + \mathcal{D}_{66} J] + \frac{n^2}{R^3} \left[ 2B_{22} + \frac{n^2 D_{22}}{R} \right] + (K_m)^2 \left[ \frac{2B_{12}}{R} + (K_m)^2 D_{11} \right] + \frac{A_{22}}{R^2} - {}^2 h_T + F_L.$$

### [参 考 文 献]

- [ 1 ] Junger M C, Mass C. Vibration of elastic shells in a fluid medium and the associated radiation of sound[ J]. Journal of Applied Mechanics, 1952, **74** : 439-445.
- [ 2 ] Jain R K. Vibration of fluid-filled orthotropic cylindrical shells[ J]. Journal of Sound and Vibration, 1974, **37**(3): 379-388.
- [ 3 ] Goncalves P B, Batista R C. Frequency response of cylindrical shells partially submerged or filled with liquid[ J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, **113**(1): 59-70.
- [ 4 ] CHEN Wei-qin, DING Hao-Jiang. Natural frequencies of fluid-filled transversely isotropic cylindrical shells[ J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1999, **41**(6): 677-684.
- [ 5 ] Zhang X M, Liu G R, Lam K Y. Coupled vibration analysis of fluid filled cylindrical shells using the wave propagation approach[ J]. Journal of Applied Acoustics, 2001, **62**(3): 229-243.
- [ 6 ] Zhang X M, Liu G R, Lam K Y. Vibration analysis of thin cylindrical shells using wave propagation approach[ J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, **239**(3): 397-403.
- [ 7 ] LI Xue-bin. Study of free vibration analysis of circular cylindrical shells using wave propagation[ J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, **311**(3/5): 667-682.
- [ 8 ] Zhang X M. Frequency analysis of submerged cylindrical shells with the wave propagation approach[ J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2002, **44**(7): 1259-1273.
- [ 9 ] Natsuki T, NI Q-Q, Endo M. Vibration analysis of fluid-filled carbon nanotubes using the wave propagation approach[ J]. Journal of Applied Physics A, Material Science and Processing, 2008, **90**(3): 441-445.
- [ 10 ] Haddadpour H, Mahmoudkhani S, Navazi H M. Free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells including thermal effects[ J]. Journal of Thin-Walled Structures, 2007, **45**(6): 591-599.
- [ 11 ] Sheng G G, Wang X. Thermo mechanical vibration analysis of a functionally graded shell with flowing fluid[ J]. European Journal of Mechanics - A/Solids, 2008, **27**(6): 1075-1087.
- [ 12 ] Loy C T, Lam K Y, Reddy J N. Vibration of functionally graded cylindrical shells[ J]. Int J Mech Sci, 1999, **41**(3): 309-324.
- [ 13 ] Pradhan S C, Loy C T, Lam K Y, et al. Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions[ J]. Applied Acoustics, 2000, **61**(1): 111-129.
- [ 14 ] Naeem M N. Vibrational frequency analysis of non-rotating and rotating FGM circular cylindrical shells[D]. Ph D Thesis Manchester, UK: University of Manchester Institute of Science and Technology, 2002.
- [ 15 ] Najafzadeh M M, Isvandzibaei M R. Vibration of functionally graded cylindrical shells based on higher order shear deformation plate theory with ring support[ J]. Acta Mechanica, 2007, **191**(1/2): 75-91.
- [ 16 ] Arshad S H, Naeem M N, Sultana N. Frequency analysis of functionally graded material cylindrical shells with various volume fraction law [ J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 2007, **221**(12): 1483-1495.
- [ 17 ] Love A E H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity [M]. 4th ed. Cambridge

Cambridge University Press 1952

- [ 18 ] Yam anouchi M, Koizumi M, Hirai T, et al Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials [ C ]. Japan Sendai 1990
- [ 19 ] Koizumi M. Functionally gradient materials the concept of FGM [ J ]. Ceramic Transactions, 1993 34 3-10

## Vibration Characteristics of FGM Circular Cylindrical Shells Containing Fluid Using Wave Propagation Approach

Zafar Iqbal<sup>1</sup>, Muhammad Nawaz Naem<sup>2</sup>, Nazra Sultana<sup>1</sup>,  
Shahid Hussain Arshad<sup>1</sup>, Abdulghafar Shah<sup>3</sup>

( 1 Department of Mathematics, University of Sargodha, Sargodha,  
Punjab, Pakistan;

2 Department of Mathematics, G. C. University Faisalabad, Punjab, Pakistan;

3 Department of Mathematics, The Islamia University of Bahawalpur,  
Punjab, Pakistan )

**Abstract** The vibration characteristics of functionally graded material circular cylindrical shell containing fluid are examined by employing the wave propagation approach. The shell was filled with a non-viscous and incompressible fluid. Axial modal dependence was approximated by exponential functions. A theoretical study of shell vibration frequencies was analyzed for simply supported-simply supported, clamped-simply supported and clamped-clamped boundary conditions with the fluid effect. Validity and accuracy of the present method was confirmed by comparing the present results with those available in the literature. A good agreement was observed between the two sets of the results.

**Key words** functionally graded material; Love's shell theory; cylindrical shell; volume fraction  $\lambda$ ; natural frequency; wave propagation