文章编号: 1000-0887(2009) 11-1341-08

被周期共线裂纹削弱的各向异性弹性平面的第一基本问题*

蔡海涛[1], 路见可[2]

(1. 中南大学 数学学院, 长沙 410083;
2. 武汉大学 数学学院, 武汉 430072)

(我刊原编委郭友中推荐)

摘要: 应用复变函数方法,讨论被周期共线裂纹削弱且在裂纹两边作用有周期边界载荷的各向异性无限弹性平面的第一基本问题. 该问题曾为 Cai[Eng Fracture Mech, 1993, **46**(1): 133-142]讨论, 然而,解法及其过程不完善, 使其结果不正确. 文中给出正确的解法和解答.

关 键 词: 各向异性平面; 共线裂纹; 弹性平衡条件
中图分类号: O343.3 文献标识码: A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.11.008

1 引言与说明

假设各向异性无限弹性平面(z平面)被周期$a\pi(a>0)$排列于x轴上的共线裂纹L_j, $j=0, \pm1, \pm2, \ldots$, (L_0: $-l\leqslant x\leqslant l$). 其中每一个长度为$2l(l<a\pi/2)$正向与x轴一致, 含裂纹的弹性平面记为S, 如图 1所示.

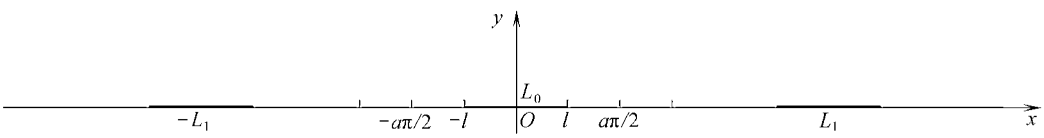

图 1

在裂纹两边的已知载荷也是周期的. 第一基本是求在已知载荷下的平衡.

我们常假设应力$\sigma_x(z)$, $\sigma_y(z)$, $\tau_{xy}(z)$与位移$u(z)+iv(z)$也是周期的, 而且又设在无穷远处的应力$\tau_{xy}(\pm\infty i)+i\sigma_y(\pm\infty i)$为有限的.

这里使用文献[2]的符号.

在周期带S_0: $|\mathrm{Re}\,z|\leqslant a\pi/2$的应力平衡条件为

$$\sigma_y(+\infty i)-\sigma_y(-\infty i)=\frac{1}{a\pi}\int_{-l}^{l}[\sigma_y^+(t)-\sigma_y^-(t)]\,dt, \tag{1}$$

* 收稿日期: 2009-05-24; 修订日期: 2009-08-26
作者简介: 蔡海涛(1934—), 男, 湖南长沙人, 教授, 博士生导师(联系人. Tel: +86-731-88879954; E-mail: htca@mail.csu.edu.cn);
路见可(1922—), 男, 江苏宜兴人, 教授, 博士生导师.

$$\tau_{xy}(+\infty\mathrm{i}) - \tau_{y}(-\infty\mathrm{i}) = \frac{1}{a\pi}\int_{-l}^{l}[\tau_{xy}^{+}(t) - \tau_{xy}(t)]\,\mathrm{d}t, \tag{2}$$

其中 $\tau_{xy}^{\pm}(t) + \mathrm{i}\sigma_{y}^{\pm}(t)$ 为 L_0 两边的载荷.

位移周期条件为

$$[u(z) + \mathrm{i}v(z)]_{\Lambda} = 0, \tag{3}$$

其中 Λ 为从 z_0 到 $z_0 + a\pi$ 的任何线段.

为简便, 常设每条裂纹两边的外作用力主矢量为 0, 在实际中通常有

$$\int_{-l}^{l}\sigma_{y}^{+}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-l}^{l}\sigma_{y}^{-}(t)\,\mathrm{d}t, \tag{4}$$

$$\int_{-l}^{l}\tau_{xy}^{+}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-l}^{l}\tau_{xy}(t)\,\mathrm{d}t, \tag{5}$$

因而, 条件 (1) 与条件 (2) 分别化为

$$\sigma_{y}^{+}(\infty\mathrm{i}) = \sigma_{y}^{-}(\infty\mathrm{i}) \tag{6}$$

与

$$\tau_{xy}^{+}(+\infty\mathrm{i}) = \tau_{xy}^{-}(-\infty\mathrm{i}). \tag{7}$$

记 $z_1 = x + \mu_1 y$ 与 $z_2 = x + \mu_2 y$, 其中 μ_1, $\bar{\mu}_1$, μ_2, $\bar{\mu}_2$ 为方程

$$\beta_{11}s^4 - 2\beta_{16}s^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66})s^2 - 2\beta_{26}s + \beta_{22} = 0$$

的复根, 且 β_{jk}' 为弹性系数 (参见文献 [2]). 应力分量 $\sigma_x(z)$, $\sigma_y(z)$, $\tau_{xy}(z)$ 与位移分量 u, v 在点 $z = x + \mathrm{i}y$ 上, 可借助全纯函数 $\varphi(z_1)$ 与 $\psi(z_2)$ 或其导数 $\Phi(z_1) = \varphi'(z_1)$ 与 $\Psi(z_2) = \psi'(z_2)$ (称为应力函数) 表示为

$$\sigma_x(z) = 2\mathrm{Re}\left\{\mu_1^2\Phi(z_1) + \mu_2^2\Psi(z_2)\right\}, \tag{8}$$

$$\sigma_y(z) = 2\mathrm{Re}\left\{\Phi(z_1) + \Psi(z_2)\right\}, \tag{9}$$

$$\tau_{xy}(z) = -2\mathrm{Re}\left\{\mu_1\Phi(z_1) + \mu_2\Psi(z_2)\right\}, \tag{10}$$

$$u(z) = 2\mathrm{Re}\left\{p_1^2\varphi(z_1) + p_2\psi(z_2)\right\}, \tag{11}$$

$$v(z) = 2\mathrm{Re}\left\{q_1\varphi(z_1) + q_2\psi(z_2)\right\}, \tag{12}$$

其中, p_1, p_2 与 q_1, q_2 为与 β_{jk}' 有关的确定常数[2].

可设 $\mathrm{Im}\,\mu_1 > 0$ 与 $\mathrm{Im}\,\mu_2 > 0$, 则当 z 位于上 (下) 半平面, 相应的点 z_1 (z_2) 也在相应的上 (下) 半平面, 而且, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 与 $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ 也在 S 内全纯.

由于周期性, 以下的讨论限于 S_0 内.

2 周期法向载荷情况

设在 L 半边上的周期载荷为法向的, 即已知 $\sigma_y^{\pm}(t)$ 满足 (4) 式, 且 $\tau_{xy}^{\pm}(t) = 0$, $t \in L$. 因而平衡条件为 (6) 式. 设 $\sigma_y^{\pm}(t)$ 在 L 上满足 Hölder条件.

注意到在 x 轴上当 $z = t$ 时, 有 $z_1 = z_2 = t$.

由 (10) 式, 有边界条件:

$$\mathrm{Re}\left\{\mu_1\Phi^{\pm}(t) + \mu_2\Psi^{\pm}(t)\right\} = 0, \qquad t \in L.$$

函数 $\mu_1\Phi(z) + \mu_2\Psi(z)$, 当 $z \in S$ 时是全纯函数. 这意味着在 L 的两边, 其实数部分为 0, 因而

$$\mu_1\Phi(z) + \mu_2\Psi(z) = \frac{\mathrm{i}}{2}C, \qquad z \in S. \tag{13}$$

当 C 为某实常数时, 即

$$\Psi(z)=-\frac{\mu_1}{\mu_2}\Phi(z)+\frac{\mathrm{i}}{2\mu_2}C,\qquad z\in S,\tag{14}$$

代此入(9)式, 有

$$\sigma_y(z)=2\mathrm{Re}\left\{\Phi(z_1)-\frac{\mu_1}{\mu_2}\Psi(z_2)\right\}-C',\qquad z\in S,\tag{15}$$

令

$$C'=-C\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{i}}{\mu_2}\right\},\tag{16}$$

因此当 $z=t\in L$ 为实数时, 有

$$\sigma_y^{\pm}(t)=2\mathrm{Re}\left\{\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\Phi^{\pm}(t)\right\}-C',\qquad t\in L\tag{17}$$

或

$$\begin{cases}\sigma_y^{+}(t)=\dfrac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\Phi^{+}(t)+\dfrac{\overline{\mu_2-\mu_1}}{\overline{\mu_2}}\overline{\Phi}^{-}(t)-C',\\[2mm] \sigma_y^{-}(t)=\dfrac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\Phi^{-}(t)+\dfrac{\overline{\mu_2-\mu_1}}{\overline{\mu_2}}\overline{\Phi}^{+}(t)-C',\end{cases}\qquad t\in L,\tag{18}$$

其中有 $\overline{\Phi^{+}(t)}=\overline{\Phi}^{-}(t)$, $\overline{\Phi^{-}(t)}=\overline{\Phi}^{+}(t)$ 与 $\overline{\Phi}(z)=\overline{\Phi(\bar z)}$ 亦为 S 内的全纯函数. 由相加与相减, 有

$$\left[\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\Phi^{+}(t)-\frac{\overline{\mu_2-\mu_1}}{\overline{\mu_2}}\overline{\Phi}^{+}(t)\right]+\left[\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\Phi^{-}(t)+\frac{\overline{\mu_2-\mu_1}}{\overline{\mu_2}}\overline{\Phi}^{-}(t)\right]=$$

$$2f_1(t)+2C',\qquad t\in L,\tag{19}$$

$$\left[\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\Phi^{+}(t)-\frac{\overline{\mu_2-\mu_1}}{\overline{\mu_2}}\overline{\Phi}^{+}(t)\right]-\left[\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\Phi^{-}(t)-\frac{\overline{\mu_2-\mu_1}}{\overline{\mu_2}}\overline{\Phi}^{-}(t)\right]=$$

$$2g_1(t),\qquad t\in L,\tag{20}$$

其中已令

$$f_1(t)=\frac{1}{2}[\sigma_y^{+}(t)+\sigma_y^{-}(t)],\tag{21}$$

$$g_1(t)=\frac{1}{2}[\sigma_y^{+}(t)-\sigma_y^{-}(t)].\tag{22}$$

因 $\Phi(\pm\infty\,\mathrm{i})$ 为有限, 记为 $\overline{\Phi}(\pm\infty\,\mathrm{i})$. 因而 $\Phi(z)$ 与 $\overline{\Phi}(z)$ 位于 h_0 内, 即, $\Phi(z)$ 与 $\overline{\Phi}(z)$ 在裂纹的端点有级小于 1的奇异性[3]. 由推广的 Plemelj公式, 有问题(20)位于 h_0 的通解为

$$\left[\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\Phi(z)-\frac{\overline{\mu_2-\mu_1}}{\overline{\mu_2}}\overline{\Phi}(z)\right]=\frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\int_{-l}^{l}g_1(\tau)\cot\frac{\tau-z}{a}\mathrm{d}\tau+2\mathrm{i}\beta,\qquad z\in S.\tag{23}$$

其中 β为任意常数. 以 $\bar z$代 z且在左边取共轭, 其符号改变, 故知 β为实数.

引入标准函数 $X(z)=\sqrt{R(z)}$. 它在 S内全纯. 其中 $R(z)=\tan^2(l/a)-\tan^2(z/a)$ 与 $\sqrt{R(z)}$ 在 S内取确定的连续支, 例如

$$\lim_{z\to\pm\infty\,\mathrm{i}}\frac{1}{\sqrt{R(z)}}=\pm\cos\frac{l}{a},$$

于是

$$\lim_{z\to\pm\frac{a\pi}{2}}\frac{\tan\dfrac{z}{a}}{\sqrt{R(z)}}=1.\tag{*}$$

Riemann边值问题(19)在 h_0 内的一般解为

$$\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\Phi(z)-\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\overline{\Phi}(z)=\frac{1}{a\pi i\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l}[f_1(\tau)+C']\sqrt{R(z)}\cot\frac{\tau-z}{a}d\tau+$$

$$\frac{2\left(C_0\tan\frac{z}{a}+C_1\right)}{\sqrt{R(z)}},\qquad z\in S,\tag{24}$$

其中 C_0 与 C_1 为任意常数, 当 z 从它的上边趋于 L_0 上的 t 时, 显然其左边与右边第 1项都为实的, 于是 C_0 与 C_1 为实的. 注意到上面的等式, 出现在积分下的 $\sqrt{R(z)}$ 应理解为当 z 从上半平面趋向于 $\tau\in L$ 时, $\sqrt{R(z)}$ 的极限. 因此 $\sqrt{R(z)}$ 在 $(-l, l)$ 实际上取正实值.

将(23)式与(24)式相加, 有

$$\Phi(z)=\frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\left\{\frac{1}{2a\pi i}\int_{-l}^{l}g_1(\tau)\cot\frac{\tau-z}{a}d\tau+\right.$$

$$\frac{1}{2a\pi i\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l}[f_1(\tau)+C']\sqrt{R(z)}\cot\frac{\tau-z}{a}d\tau+$$

$$\left.\frac{C_0\tan\frac{z}{a}+C_1}{\sqrt{R(z)}}+i\beta\right\}.\tag{25}$$

由(14)式,

$$\Psi(z)=\frac{\mu_1}{\mu_2-\mu_1}\left\{\frac{1}{2a\pi i}\int_{-l}^{l}g_1(\tau)\cot\frac{\tau-z}{a}d\tau+\right.$$

$$\frac{1}{2a\pi i\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l}[f_1(\tau)+C']\sqrt{R(z)}\cot\frac{\tau-z}{a}d\tau+$$

$$\left.\frac{C_0\tan\frac{z}{a}+C_1}{\sqrt{R(z)}}+i\beta\right\}+\frac{C}{2\mu_2}.\tag{26}$$

剩下的问题是确定 C, C_0, C_1 与 β. 在由条件(3)与条件(6)确定它们之前, 引入如下等式:

$$\frac{1}{\sqrt{R(\pm\infty i)}}=\pm\cos\frac{l}{a},$$

$$\int_{\wedge}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}=\pm a\pi\cos\frac{l}{a},$$

$$\int_{\wedge}\frac{\tan\frac{z}{a}}{\sqrt{R(z)}}dz=\int_{\wedge}\frac{\cot\frac{\tau-z}{a}}{\sqrt{R(z)}}dz=\pm a\pi i\cos\frac{l}{a},$$

若 z 换为 z_1 与 z_2 时, 仍为真.

首先考虑弹性平衡条件(6). 由(15)式,

$$0=\sigma_y(+\infty i)-\sigma_y(-\infty i)=2\mathrm{Re}\left\{\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}[\Phi(+\infty i)-\Phi(-\infty i)]\right\},$$

现在

$$\int_{-l}^{l}g_1(\tau)d\tau=0,$$

因而由(25)式,有

$$C_1 = 0, \tag{27}$$

而(7)式是自动满足.

其次,考虑条件(3).由(11)式,有 $[u(z)]_\Lambda = 0$ 化为

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{p_1\mu_2 + p_2\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\left[F_1\cos\frac{l}{a} + C'Q\cos\frac{l}{a} + a\pi\left(\mathrm{i}C_0\cos\frac{l}{a} + \beta\right)\right]\right\} + \frac{a\pi C}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{i}p_2}{\mu_2}\right\} = 0. \tag{28}$$

类似地,由(12)式,有 $[v(z)]_\Lambda = 0$ 化为

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{q_1\mu_2 - q_2\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\left[F_1\cos\frac{l}{a} + C'Q\cos\frac{l}{a} + a\pi\left(\mathrm{i}C_0\cos\frac{l}{a} + \beta\right)\right]\right\} + \frac{a\pi C}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{i}q_2}{\mu_2}\right\} = 0, \tag{29}$$

其中已置

$$F_1 = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} f_1(\tau)\sqrt{R(z)}\,\mathrm{d}\tau \tag{30}$$

为已知实数,且

$$Q = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\sqrt{R(z)}\,\mathrm{d}\tau \tag{31}$$

为与边界条件无关的已知实数.

为确定 C(随之 C'),C_0 与 β,仅需方程(28)与(29).因而,为了解的唯一性,加入补充条件,例如,$\sigma_y(+\infty\mathrm{i})$($\sigma_y^-(-\infty\mathrm{i})$)$=\sigma_0$ 为预设实数,由(9)式,

$$\sigma_0 = 2\mathrm{Re}\left\{\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2}\Phi(+\infty\mathrm{i})\right\} - C'$$

或由(25)式,

$$\sigma_0 = \frac{\cos\frac{l}{a}}{a\pi}\int_{-l}^{l}[f_1(\tau) + C']\sqrt{R(\tau)}\,\mathrm{d}\tau - C'$$

即

$$\sigma_0 = \frac{2\cos\frac{l}{a}}{a\pi}(F_1 + C'Q) - C' \tag{32}$$

易知 $0 < 2Q\cos(l/a)/(a\pi) < 1$,由此 C' 随之 C 可以确定.因此,C_0 与 β 可由(28)式与(29)式唯一确定,问题完全解决.最后,应力函数 $\Phi(z_1)$(由(25)式给出且 z 换以 z_1)与 $\Psi(z_2)$(由(26)式给出且 z 换以 z_2)可求得(计及 $C_1 = 0$).

若在 L 两边的法向载荷是对称的,即 $\sigma_y^+(t) = \sigma_y^-(t)$,则在 L 上,$g_1(t) = 0$,且解较为简单.

3 周期切向载荷情况

现考虑在 L 两边的周期载荷是切向的,即已知在 L 上,$\tau_{xy}^{\pm}(t)\in H$ 且 $\sigma_y^{\pm}(t) = 0$,且设条件(5)满足.因而由条件(5)可得条件(7).

当 $z = t$ 为实数,由(9)式,有

$$\mathrm{Re}\left\{\Phi^{\pm}(t) + \Psi^{\pm}(t)\right\} = 0, \qquad t\in L,$$

由前节相似理由,可知

$$\Phi(z) = -\Psi(z) + \frac{\mathrm{i}}{2}D, \qquad z \in S, \tag{33}$$

其中 D 为某实常数, 代其入 (10) 式, 有

$$\tau_{xy}(z) = -2\mathrm{Re}\left\{\mu_1\Phi(z_1) + \mu_2\Psi(z_2)\right\} - D', \tag{34}$$

其中

$$D' = D\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{i}\mu_2\right\}, \tag{35}$$

所以, 当 $z = t$ 位于 x 轴上,

$$\tau_{xy}^{\pm}(t) = 2\mathrm{Re}\left\{(\mu_2 - \mu_1)\Phi^{\pm}(t)\right\} - D', \tag{36}$$

而 $t \in L$,

$$(\mu_2 - \mu_1)\Phi^{+}(t) + (\mu_2 - \mu_1)\overline{\Phi}^{-}(t) = \tau_{xy}^{+}(t) + D', \qquad t \in L, \tag{37}$$

$$(\mu_2 - \mu_1)\Phi^{-}(t) + (\mu_2 - \mu_1)\overline{\Phi}^{+}(t) = \tau_{xy}^{-}(t) + D', \qquad t \in L, \tag{38}$$

置 $\overline{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar z)}$. 由相加与相减, 有

$$\begin{aligned}&[(\mu_2 - \mu_1)\Phi^{+}(t) + (\mu_2 - \mu_1)\overline{\Phi}^{+}(t)] + \\ &\quad [(\mu_2 - \mu_1)\Phi^{-}(t) + (\mu_2 - \mu_1)\overline{\Phi}^{-}(t)] = \\ &\quad 2f_2(t) + 2D', \qquad t \in L,\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}&[(\mu_2 - \mu_1)\Phi^{+}(t) - (\mu_2 - \mu_1)\overline{\Phi}^{+}(t)] - \\ &\quad [(\mu_2 - \mu_1)\Phi^{-}(t) - (\mu_2 - \mu_1)\overline{\Phi}^{-}(t)] = \\ &\quad 2g_2(t), \qquad t \in L,\end{aligned} \tag{40}$$

其中已令

$$f_1(t) = \frac{1}{2}[\tau_{xy}^{+}(t) + \tau_{xy}^{-}(t)], \qquad t \in L, \tag{41}$$

$$g_1(t) = \frac{1}{2}[\tau_{xy}^{+}(t) - \tau_{xy}^{-}(t)], \qquad t \in L, \tag{42}$$

需要求 (41) 和 (42) 式在 h_0 内的解.

由推广的 Plemelj公式, (40) 式在 h_0 内的一般解为

$$\begin{aligned}&(\mu_2 - \mu_1)\Phi(z) - (\mu_2 - \mu_1)\overline{\Phi}(z) = \\ &\quad \frac{1}{2a\pi \mathrm{i}}\int_{-l}^{l} g_1(\tau)\cot\frac{\tau - z}{a}\mathrm{d}\tau + 2\mathrm{i}\gamma, \qquad z \in S,\end{aligned} \tag{43}$$

其中, 如上节相同理由, γ 是任意实数, (39) 式在 h_0 内的一般解为

$$\begin{aligned}&(\mu_2 - \mu_1)\Phi(z) + (\mu_2 - \mu_1)\overline{\Phi}(z) = \\ &\quad \frac{1}{a\pi \mathrm{i}\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l}[f_2(\tau) + D']\sqrt{R(z)}\cot\frac{\tau - z}{a}\mathrm{d}\tau + \frac{2\left(D_0\tan\frac{z}{a} + D_1\right)}{\sqrt{R(z)}},\end{aligned} \tag{44}$$

其中, D_0 与 D_1 为任意实数. 将它们相加, 有

$$\begin{aligned}\Phi(z) = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1}\Bigg\{&\frac{1}{2a\pi \mathrm{i}}\int_{-l}^{l} g_2(\tau)\cot\frac{\tau - z}{a}\mathrm{d}\tau + \\ &\frac{1}{2a\pi \mathrm{i}\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l}[f_2(\tau) + D']\sqrt{R(z)}\cot\frac{\tau - z}{a}\mathrm{d}\tau + \frac{D_0\tan\frac{z}{a} + D_1}{\sqrt{R(z)}} + \mathrm{i}\gamma\Bigg\}\end{aligned} \tag{45}$$

且由 (33) 式, 有

$$\Psi(z) = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1}\left\{ \frac{1}{2a\pi \mathrm{i}}\int_{-l}^{l} g_2(\tau)\cot\frac{\tau - z}{a}\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2a\pi \mathrm{i}\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l}[f_2(\tau) + D'] \sqrt{R(z)}\cot\frac{\tau - z}{a}\mathrm{d}\tau + \frac{D_0\tan\frac{z}{a} + D_1}{\sqrt{R(z)}} + \mathrm{i}\gamma\right\} + \frac{\mathrm{i}}{2}D. \tag{46}$$

如前节, 因为

$$\int_{-l}^{l} g_2(\tau)\mathrm{d}\tau = 0, \tag{47}$$

由弹性的平衡条件易知

$$D_1 = 0, \tag{48}$$

而条件 (6) 自动满足, 周期位移条件 (3) 满足, 因为

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{p_1 - p_2}{\mu_2 - \mu_1}\left[F_2\cos\frac{l}{a} + D'Q\cos\frac{l}{a} + a\pi \mathrm{i}\left(D_0\cos\frac{l}{a} + \gamma\right)\right]\right\} + \frac{a\pi D}{2}\mathrm{Re}\{\mathrm{i}p_2\} = 0, \tag{49}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{q_1 - q_2}{\mu_2 - \mu_1}\left[F_2\cos\frac{l}{a} + D'Q\cos\frac{l}{a} + a\pi \mathrm{i}\left(D_0\cos\frac{l}{a} + \gamma\right)\right]\right\} + \frac{a\pi D}{2}\mathrm{Re}\{\mathrm{i}q_2\} = 0, \tag{50}$$

令

$$F_2 = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} f_2(\tau)\sqrt{R(z)}\,\mathrm{d}\tau, \tag{51}$$

对于解的唯一性, 需要补充条件, 例如, $\tau_{xy}(+\infty \mathrm{i})\ (=\tau_{xy}(-\infty \mathrm{i})) = \tau_0$ 为一预设实常数, 由 (34) 式与 (10) 式, 有

$$\tau_0 = \frac{2\cos\frac{l}{a}}{a\pi}(F_2 + D'Q) - D', \tag{52}$$

由此, 可得 D' 与 D. 因而 D_0 与 γ 可由 (49) 式与 (50) 式求得. 于是, $\Phi(z)$ 与 $\Psi(z)$ (以及 $\Phi(z_1)$ 与 $\Psi(z_2)$) 求得, 我们的问题完全解决.

注 1　设位移周期性代替为准周期, 即 $u(z + a\pi) - u(z) = q$, $v(z + a\pi) = v(z) \neq 0$, 其中 q 为预设实数, 我们的方法也有效.

注 2　若条件 (4) 或条件 (5) 不满足, 则 $\varphi(z_1)$ 与 $\psi(z_2)$ 为多值的. 在此情况, 在解相应问题时, 先分离多值部分, 化问题为这里所考虑的情况.

注 3　当已知裂纹两边的周期载荷时, 可用叠加法求上述问题 (此方法类似于文献 [4] 给出的非周期情况, 但裂纹代替孔, 这里不予讨论).

[参　考　文　献]

[1] CAI Hai-tao. A periodic array of cracks in an infinite anisotropic medium [J]. Eng Fracture Mech, 1993, **46**(1), 133-142

[2] Muskhelishvili N I. Some Basic Problem of the Mathematical Theory of Elasticity [M]. Groningem: Noordhoff, 1953.

[3] Lekhnitsky S G. Anisotropic Plate[M]. Groningem: Noordhoff, 1954.

[4] LU Jian-ke, Complex Variable Methods in Plane Elasticity [M]. Singapore: World Scientific, 1995.

First Fundamental Problems of Anisotropic Elastic Plane Weakened by Periodic Collinear Cracks

CAI Hai-tao[1], LU Jian-ke[2]

1. College of Mathematics, Central South University, Changsha 410083, P. R. China;

2. College of Mathematics, Wuhan University, Wuhan 430072, P. R. China)

Abstract: The first fundamental problems of anisotropic infinite elastic plane weakened by periodic collinear cracks and with periodic boundary loads on both sides of the cracks were discussed by means of the method of complex function. This problem was considered by Cai[Eng Fracture Mech, 1993, **46**: 127–131], however, his method of solution is imperfect and so his results are incorrect. His method was revised and the correct solution was obtained here.

Key words: anisotropic elastic plane; collinear cracks; condition of equilibrium