

渗透各向异性土层的平面应变固结^{*}

艾智勇, 吴超

(同济大学 地下建筑与工程系, 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

(郭兴明推荐)

摘要: 提出了一种有效的可供选择的分析方法, 来研究渗透各向异性多孔弹性土层的平面应变固结问题. 从饱和多孔弹性土体的控制方程出发, 建立了在 Laplace-Fourier 变换域内, 土层中地基表面 ($z = 0$) 和深度 z 处基本变量之间的关系. 结合边界条件, 得到了变换域内渗透各向异性有限土层的平面应变 Biot 固结问题的精确解. 通过 Laplace-Fourier 逆变换, 得到了物理域内的真实解. 平面应变 Biot 固结土层的数值分析结果显示: 渗透各向异性对土层的固结行为, 有比较显著的影响.

关键词: 平面应变固结; 有限土层; 渗透各向异性; Laplace-Fourier 变换

中图分类号: TU43 0343 **文献标识码:** A

DOI 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.11.009

引 言

Biot^[1] 首先提出了能够考虑水土之间耦合作用的固结理论. 至今为止, 对 Biot 固结问题已有很多的研究^[2-18], 然而大多数的研究都假定土体的渗透性是均匀各向同性的, 这与现场的实际情况是不相符的. 事实上, 土的形成是一个不断沉积的过程, 因而其渗透性在各个方向常常会表现出较明显的差异性. 因此, 在固结计算中, 考虑土的渗透各向异性是很有必要的. Chen^[19] 利用状态矢量法分析了渗透各向异性多层弹性半空间的轴对称固结问题. Mei 等^[20] 应用有限层法分析了土体的渗透性及土骨架弹性参数同时为各向异性时多层地基的三维固结行为. 有限元商业软件, 例如: ABAQUS, ADINA 等, 都可以用来求解渗透各向异性 Biot 固结问题; 但是它们都属于数值计算方法, 计算工作量大、效率低. 因此, 本文的主要目的是: 1) 提出一种求解渗透各向异性有限土层平面应变固结问题的可供选择的有效方法; 2) 探讨渗透各向异性对土体固结行为的影响.

1 渗透各向异性平面应变固结问题的解

1.1 基本控制方程

不考虑体积力时的静力平衡方程为

* 收稿日期: 2008-12-12 修订日期: 2009-09-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50578121)

作者简介: 艾智勇 (1966—), 男, 江西余江人, 副教授, 博士 (联系人. Tel + 86-21-65982201; Fax + 86-21-65985210 E-mail zhiyonga@tongji.edu.cn).

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (1b)$$

式中, σ_x, σ_z 是 x, z 方向的总应力; τ_{zx}, τ_{xz} 是剪应力.

应变-位移关系为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (2a)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (2b)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad (2c)$$

式中, $\varepsilon_x, \varepsilon_z$ 分别是 x, z 方向的应变; u_x, u_z 分别是 x, z 方向的位移; γ_{zx} 是剪应变.

假设土体中的土颗粒及孔隙水是不可压缩的^[1-9, 14-18, 20], 且土骨架属于各向同性介质^[1-19], 则平面应变 Biot 固结问题的本构方程^[3-4]是

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E} \left[(\sigma_x + \sigma) - \frac{\nu}{1-\nu} (\sigma_z + \sigma) \right], \quad (3a)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1-\nu^2}{E} \left[(\sigma_z + \sigma) - \frac{\nu}{1-\nu} (\sigma_x + \sigma) \right], \quad (3b)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz}, \quad (3c)$$

式中, σ 是超孔隙水压力 (压为正), E 是弹性模量, G 是剪切模量, ν 是 Poisson 比.

如上所述, 土骨架常常被认为是各向同性介质^[1-19], 但是, 土的渗透性则因为土体的沉积过程而常表现为各向异性^[19-20]; 因此, 在固结计算中很有必要考虑土体的渗透各向异性.

渗透各向异性平面应变介质的连续性方程^[19-20]为

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{r_w} \left(k_x \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \right), \quad (4)$$

式中, $e = \varepsilon_x + \varepsilon_z$ 是体积应变; r_w 是水的重度; k_x, k_z 分别是 x, z 方向的渗透系数.

根据 Darcy 定理, z 方向的流量可定义为

$$Q = \frac{k_z}{r_w} \frac{\partial \sigma}{\partial z}. \quad (5)$$

1.2 解的推导

Laplace 变换及其逆变换^[21]定义如下:

$$\tilde{f}(x, z, s) = \int_0^{\infty} f(x, z, t) e^{-st} dt \quad (6a)$$

$$f(x, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{f}(x, z, s) e^{st} ds \quad (6b)$$

式中, s 是 Laplace 变换参数; 这里及后面提到的上标“~”是表示对变量 t 进行 Laplace 变换后的形式.

Fourier 变换及其逆变换^[22]定义如下:

$$\bar{f}(\xi, z, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x, z, s) e^{-i\xi x} dx, \quad (7a)$$

$$\tilde{f}(x, z, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi, z, s) e^{i\xi x} d\xi \tag{7b}$$

式中, ξ 是 Fourier变换参数;这里及后面提到的上标“-”是表示对变量 x 进行 Fourier变换后的形式.

对式 (1b)、(2c)和 (5)进行 Laplace-Fourier变换,可得

$$\frac{d\hat{\sigma}_z}{dz} = -\xi i\tau_{zx}, \tag{8}$$

$$\frac{d(\hat{u}_x)}{dz} = \xi u_z + \frac{1}{G} i\tau_{zx}, \tag{9}$$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dz} = \frac{r_w}{k_z} \hat{Q}. \tag{10}$$

对式 (2b)、(3a)、(3b)进行 Laplace-Fourier变换,并进行一些数学运算,得到

$$\frac{d\hat{u}_z}{dz} = \left[\frac{2G}{M} - 1 \right] \xi \hat{u}_x + \frac{1}{M} \hat{\sigma} + \frac{1}{M} \hat{\sigma}_z, \tag{11}$$

式中, $M = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$.

类似地,从式 (1a)和 (3a),我们可以得到

$$\frac{d(i\tau_{zx})}{dz} = 4G \left[1 - \frac{G}{M} \right] \xi^2 \hat{u}_x - 2\frac{G}{M} \xi \hat{\sigma} + \left[1 - 2\frac{G}{M} \right] \xi \hat{\sigma}_z. \tag{12}$$

对式 (4)和 (5)进行 Laplace-Fourier变换,并结合式 (11)可得:

$$\frac{d\hat{Q}}{dz} = 2\frac{Gs}{M} \xi \hat{u}_x + \left[\frac{k_x}{r_w} \xi^2 + \frac{s}{M} \right] \hat{\sigma} + \frac{s}{M} \hat{\sigma}_z. \tag{13}$$

关于变量 z 的 Laplace变换及其逆变换^[21]的定义为

$$\hat{f}(\xi, p, s) = \int_0^{\infty} \bar{f}(\xi, z, s) e^{-pz} dz \tag{14a}$$

$$\bar{f}(\xi, z, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \hat{f}(\xi, p, s) e^{pz} dp \tag{14b}$$

式中, p 为 Laplace变换参数;这里及后面提到的上标“ $\hat{\cdot}$ ”定义为对变量 z 进行 Laplace变换后的形式.

对式 (8) ~ (13)进行关于变量 z 的 Laplace变换,得到

$$p \hat{u}_x - \xi \hat{u}_z - \frac{1}{G} i\hat{\phi}_{zx} = \hat{u}_x(0), \tag{15}$$

$$p \hat{u}_z - \left[2\frac{G}{M} - 1 \right] \xi \hat{u}_x - \frac{1}{M} \hat{\sigma} - \frac{1}{M} \hat{\sigma}_z = \hat{u}_z(0), \tag{16}$$

$$p \hat{\sigma} - \frac{r_w}{k_z} \hat{Q} = \hat{\sigma}(0), \tag{17}$$

$$p i\hat{\phi}_{zx} - 4G \left[1 - \frac{G}{M} \right] \xi^2 \hat{u}_x + 2\frac{G}{M} \xi \hat{\sigma} - \left[1 - 2\frac{G}{M} \right] \xi \hat{\sigma}_z = i\tau_{zx}(0), \tag{18}$$

$$p \hat{\sigma}_z + \xi \hat{\phi}_{zx} = \hat{\sigma}_z(0), \tag{19}$$

$$p \hat{Q} - 2\frac{Gs}{M} \xi \hat{u}_x - \left[\frac{k_x}{r_w} \xi^2 + \frac{s}{M} \right] \hat{\sigma} - \frac{s}{M} \hat{\sigma}_z = \hat{Q}(0), \tag{20}$$

式 (15) ~ (20)是 $\hat{u}_x, \hat{u}_z, \hat{\sigma}, i\hat{\phi}_{zx}, \hat{\sigma}_z$ 和 \hat{Q} 这 6个变量的联立方程.解这些方程,并对 p 进行 La-

place逆变换, 从而得到 $\mathbf{i}u_x, u_z, \sigma, \mathbf{i}\tau_{xz}, \sigma_z, \bar{Q}$ 的表达式如下:

$$\mathbf{G}(\xi, z, s) = \phi(\xi, z, s) \mathbf{G}(\xi, 0, s), \quad (21)$$

式中, $\mathbf{G}(\xi, z, s) = [\mathbf{i}u_x, u_z, \sigma, \mathbf{i}\tau_{xz}, \sigma_z, \bar{Q}]^T$; $\phi(\xi, z, s)$ 为传递矩阵, 它建立了在变换域内 $\mathbf{G}(\xi, z, s)$ 在土层表面 $z = 0$ 和深度 z 之间的关系. 附录中给出了传递矩阵的各元素.

根据传递矩阵的性质^[23]和式(21), 可得下式:

$$\mathbf{G}(\xi, 0, s) = \phi(\xi, -z, s) \mathbf{G}(\xi, z, s). \quad (22)$$

根据式(21)和(22)及边界条件, 我们可以求得土层内任意点在变换域内的位移、应力、超孔隙水压力及流量的解答, 通过相应的 Laplace-Fourier 逆变换, 就可得到物理域内的真实解.

假设单层土的厚度为 h , 且在其表面 $-b \leq x \leq b$ 范围内作用一均布条形荷载 f , 荷载从时间 $t = 0^+$ 开始施加, 之后为一常量.

对荷载 f 进行 Laplace-Fourier 变换, 得到

$$\bar{f}(\xi, 0, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \int_0^\infty f e^{-st} e^{-i\xi x} dt dx = \frac{f}{\pi} \frac{\sin(b\xi)}{s\xi}. \quad (23)$$

假定地表完全透水, 从而有

$$\sigma_z(\xi, 0, s) = -\bar{f}, \quad \tau_{xz}(\xi, 0, s) = \sigma(\xi, 0, s) = 0. \quad (24)$$

假定土层底部固定, 则有两种可能的排水条件:

当底部完全透水时, 有

$$u_x(\xi, h, s) = u_z(\xi, h, s) = \sigma(\xi, h, s) = 0. \quad (25)$$

在式(22)中, 令 $z = h$, 并结合式(24)和(25), 可得

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i}u_x(\xi, 0, s) \\ u_z(\xi, 0, s) \\ 0 \\ 0 \\ -\bar{f} \\ \bar{Q}(\xi, 0, s) \end{Bmatrix} = \phi(\xi, -h, s) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{i}\tau_{xz}(\xi, h, s) \\ \sigma_z(\xi, h, s) \\ \bar{Q}(\xi, 0, s) \end{Bmatrix}. \quad (26)$$

从式(26), 我们可求得 $\mathbf{G}(\xi, h, s)$ 中的剩余未知量的表达式如下:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i}\tau_{xz}(\xi, h, s) \\ \sigma_z(\xi, h, s) \\ \bar{Q}(\xi, h, s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{34}(\xi, -h, s) & \phi_{35}(\xi, -h, s) & \phi_{36}(\xi, -h, s) \\ \phi_{44}(\xi, -h, s) & \phi_{45}(\xi, -h, s) & \phi_{46}(\xi, -h, s) \\ \phi_{54}(\xi, -h, s) & \phi_{55}(\xi, -h, s) & \phi_{56}(\xi, -h, s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{f} \end{Bmatrix}. \quad (27)$$

当底部是完全不透水时, 有

$$u_x(\xi, h, s) = u_z(\xi, h, s) = \bar{Q}(\xi, h, s) = 0. \quad (28)$$

令式(22)中的 $z = h$, 并结合式(24)和(28), 可得

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i}u_x(\xi, 0, s) \\ u_z(\xi, 0, s) \\ 0 \\ 0 \\ -\bar{f} \\ \bar{Q}(\xi, 0, s) \end{Bmatrix} = \phi(\xi, -h, s) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma(\xi, h, s) \\ \mathbf{i}\tau_{xz}(\xi, h, s) \\ \sigma_z(\xi, h, s) \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (29)$$

从式(29), 可求得 $\mathbf{G}(\xi, h, s)$ 中剩余未知量的表达式如下:

$$\begin{Bmatrix} \sigma(\xi, h, s) \\ \tau_{xz}(\xi, h, s) \\ \sigma_z(\xi, h, s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{33}(\xi - h, s) & \phi_{34}(\xi - h, s) & \phi_{35}(\xi - h, s) \\ \phi_{43}(\xi - h, s) & \phi_{44}(\xi - h, s) & \phi_{45}(\xi - h, s) \\ \phi_{53}(\xi - h, s) & \phi_{54}(\xi - h, s) & \phi_{55}(\xi - h, s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -f \end{Bmatrix} \quad (30)$$

一旦 $G(\xi, h, s)$ 中全部的量都已求得, 根据式 (22), 在变换域内土层中任意点的解可表示为

$$G(\xi, z, s) = \phi(\xi, z - h, s)G(\xi, h, s). \quad (31)$$

式 (31) 是变换域内渗透各向异性土层平面应变固结问题的解. 通过相应的 Laplace-Fourier 逆变换, 就可得到物理域的真实解.

2 数值分析

本文利用 Tabot 方法和 Gauss 积分去分别实现物理域内最终解的 Laplace 逆变换和 Fourier 逆变换, 该数值方法在求解固结问题中的精确性和有效性, 已被 Booker 和 Small^[7-9] 证实. 当计算厚土层时, 数值计算很容易溢出, 而这个问题可以利用 A 等^[23] 提出的方法加以解决. 本文中所有的结果都是在假定土层表面完全透水, 而底部固定且完全不透水的情况下得到的.

为证实上述方法的有效性和精确性, 本文研究了渗透各向同性时的特殊情况, 并将其与之前已存在的结果进行比较. 单层土表面作用一均布条形荷载时的平面应变固结的解及参数如图 1 所示. 这里, 固结度 U 定义为

$$U = \frac{u_z(t) - u_z(0)}{u_z(\infty) - u_z(0)}$$

时间因子的定义为

$$\tau = \mathcal{X} k_z t / (r_w b^2).$$

显然, 本文的计算结果与 Booker^[6] 的结果吻合得很好.

分别选择各向异性系数 $r = k_x : k_z$ 为 1:1, 5:1 和 50:1, 以研究渗透各向异性对土体固结行为的影响. 单层土体平面应变固结算例的参数及结果分别如图 2 和图 3 所示. 从图 2 和图 3 可见, 对于不同的 r , 土层地表沉降在固结过程中有着较大的差别, 但在初始阶段和最终阶段是一致的. 另外, 从图 2 和图 3 中还发现, 当时间因子 $\tau = 0.1$ 时, 超孔隙水压力的消散, 随 r 的不同而不同.

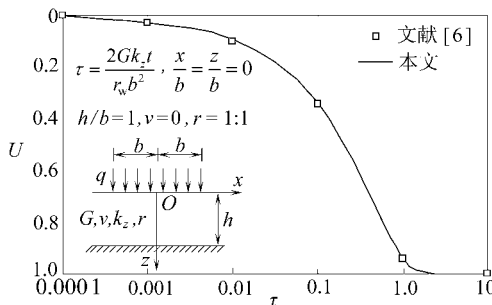


图 1 平面应变固结的固结度

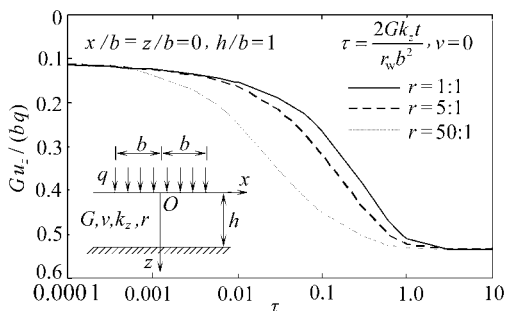


图 2 平面应变固结问题中的地表沉降

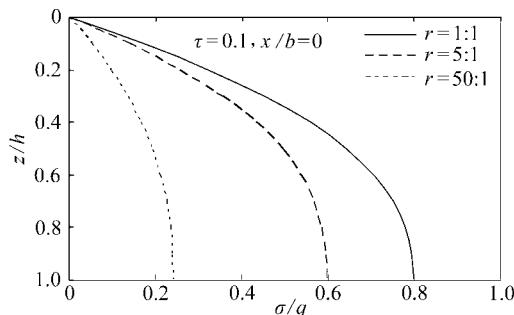


图 3 平面应变固结问题中的超孔隙水压力

3 结 论

本文提出了一种可供选择的有效方法来求解渗透各向异性有限土层的平面应变 Biot 固结问题. 从饱和多孔弹性土体的控制方程出发, 建立了 Laplace-Fourier 变换域内单层土体土层表面 ($z = 0$) 和深度 z 处基本变量之间的关系. 结合边界条件, 得到了变换域内渗透各向异性有限土层平面应变 Biot 固结问题的精确解. 进而对其进行 Laplace-Fourier 数值逆变换, 得到了物理域内的真实解. 通过对渗透各向同性单层土的特殊情况的计算, 显示本文结果与已发表的其它结果吻合得很好, 证实了本文方法的正确性. 通过对单层土的数值分析, 研究了渗透各向异性对土体固结行为的影响. 结果显示: 渗透各向异性对土体固结过程中的地表沉降和超孔隙水压力有着显著的影响, 但对其初始阶段和最终阶段的地表沉降没有影响.

与有限元商业软件例如: ABAQUS ADNA 等相比, 本文的分析方法有着更高的计算效率. 此外, 本文方法还可以推广到三维渗透各向异性及流体可压缩性地基 Biot 固结问题的分析中去.

附 录

$$\phi_{11} = (1 + \alpha) \operatorname{ch} \xi z + \xi (1 - G\beta) \operatorname{sh} \xi z - \alpha \operatorname{ch} qz = \phi_{44}$$

$$\phi_{12} = z \xi (1 - G\beta) \operatorname{ch} \xi z + \frac{G \xi^2 x}{M p^2 k_z} \operatorname{sh} \xi z - \frac{\alpha \xi}{q} \operatorname{sh} qz = -\phi_{54}$$

$$\phi_{13} = \frac{\xi (\operatorname{ch} \xi z - \operatorname{ch} qz)}{M p} = -\frac{\xi k_z \phi_{26}}{r_w} = -\frac{k_z \phi_{31}}{2G s r_w} = -\frac{\xi k_z \phi_{35}}{s r_w} = \frac{k_z \phi_{46}}{2G r_w} = -\frac{\phi_{53}}{2G \xi} = -\frac{\phi_{62}}{2G \xi} = -\frac{\phi_{64}}{s}$$

$$\phi_{14} = z \left[\frac{1}{2G} - \frac{\beta}{2} \right] \operatorname{ch} \xi z + \left[\frac{1}{2G \xi} + \frac{\xi x}{2M p^2 k_z} \right] \operatorname{sh} \xi z - \frac{\xi^2 s}{M C p^2} \operatorname{sh} qz$$

$$\phi_{15} = \frac{\xi s}{M C p^2} (\operatorname{ch} \xi z - \operatorname{ch} qz) + z \left[\frac{1}{2G} - \frac{\beta}{2} \right] \operatorname{sh} \xi z = -\phi_{24} = \frac{\phi_{42}}{4G^2 \xi^2} = -\frac{\phi_{51}}{4G^2 \xi^2}$$

$$\phi_{16} = \frac{1}{C p} \left[\operatorname{sh} \xi z - \frac{\xi}{q} \operatorname{sh} qz \right] = -\frac{\phi_{32}}{2G \xi s} = -\frac{\phi_{34}}{s} = -\frac{\phi_{56}}{2G \xi}$$

$$\phi_{21} = -z \xi (1 - G\beta) \operatorname{ch} \xi z + \frac{G \xi^2 \delta}{M p^2 k_z} \operatorname{sh} \xi z + \frac{\alpha q}{\xi} \operatorname{sh} qz = -\phi_{45}$$

$$\phi_{22} = (1 - \alpha) \operatorname{ch} \xi z - \xi (1 - G\beta) \operatorname{sh} \xi z + \alpha \operatorname{ch} qz = \phi_{55}$$

$$\phi_{23} = -\frac{\xi}{M p} \left[\operatorname{sh} \xi z - \frac{q}{\xi} \operatorname{sh} qz \right] = -\frac{\phi_{43}}{2G \xi} = \frac{\phi_{61}}{2G \xi} = \frac{\phi_{65}}{s}$$

$$\phi_{25} = z \left[-\frac{1}{2G} + \frac{\beta}{2} \right] \operatorname{ch} \xi z + \left[\frac{1}{2G \xi} + \frac{\xi \delta}{2M p^2 k_z} \right] \operatorname{sh} \xi z + \frac{q s}{M C p^2} \operatorname{sh} qz$$

$$\phi_{33} = \operatorname{ch} qz = \phi_{66}$$

$$\phi_{36} = \frac{M}{C q} \operatorname{sh} qz$$

$$\phi_{41} = 2G z \xi^2 (1 - G\beta) \operatorname{ch} \xi z - 2G \xi \left[-1 + \frac{G \xi^2 \delta}{M p^2 k_z} \right] \operatorname{sh} \xi z - 2G q \alpha \operatorname{sh} qz$$

$$\phi_{52} = 2G z \xi^2 (-1 + G\beta) \operatorname{ch} \xi z - 2G \xi \left[-1 + \frac{G \xi^2 x}{M p^2 k_z} \right] \operatorname{sh} \xi z + \frac{2G \xi^2 \alpha}{q} \operatorname{sh} qz$$

$$\phi_{63} = \frac{C q}{M} \operatorname{sh} qz$$

式中

$$p = q^2 - \xi^2, \quad \alpha = \frac{2G \xi^2 s}{M C p^2}, \quad \beta = \frac{\xi^2 (k_x - k_z)}{M p k_z}$$

$$x = (q^2 - \xi^2)k_x + (q^2 + \xi^2)k_y, \quad \delta = (q^2 + \xi^2)k_x + (-3q^2 + \xi^2)k_y.$$

[参 考 文 献]

- [1] Biot M A. General theory of three-dimensional consolidation [J]. Journal of Applied Physics, 1941, **12**(2): 155-164
- [2] McNamee J Gibson R E. Displacement functions and linear transforms applied to diffusion through porous elastic media [J]. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1960 **13**(1): 98-111.
- [3] McNamee J Gibson R E. Plane strain and axially symmetric problem of the consolidation of a semi-infinite clay stratum [J]. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1960, **13**(2): 210-227.
- [4] Gibson R E, Schiffman R L, Poulos S L. Plane strain and axially symmetric consolidation of a clay layer on a smooth impervious base [J]. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1970, **23**(4): 505-520.
- [5] Schiffman R L, Fungaroli A A. Consolidation due to tangential loads [A]. In Proceedings of the 6th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering [C]. **1**. Montreal 1965, 188-192.
- [6] Booker J R. The consolidation of a finite layer subject to surface loading [J]. International Journal of Solids and Structures, 1974, **10**(9): 1053-1065.
- [7] Booker J R, Small J C. Finite layer analysis of consolidation I [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1982, **6**(2): 151-171.
- [8] Booker J R, Small J C. Finite layer analysis of consolidation II [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1982, **6**(2): 173-194.
- [9] Booker J R, Small J C. A method of computing the consolidation behavior of layered soils using direct numerical inversion of Laplace transforms [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1987, **11**(4): 363-380.
- [10] Vardoulakis J, Hampattanapanich T. Numerical Laplace-Fourier Transform inversion technique for layered-soil consolidation problems—I fundamental solutions and validation [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1986, **10**(4): 347-365.
- [11] Yue Z Q, Selvadurai A P S, Law K T. Excess pore water pressure in a porous seabed saturated with a compressible fluid [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1994, **31**(6): 989-1003.
- [12] Senjuntichai T, Rajapakse R K N D. Exact stiffness method for quasi-statics of a multi-layered porous elastic medium [J]. International Journal of Solids and Structures, 1995, **32**(11): 1535-1553.
- [13] Pan E. Green's functions in layered porous half-space [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1999, **23**(13): 1631-1653.
- [14] Wang J G, Fang S S. The state vector solution of axisymmetric Biot's consolidation problems for multilayered poroelastic media [J]. Mechanics Research Communications, 2001, **28**(6): 671-677.
- [15] Wang J G, Fang S S. State space solution of non-axisymmetric Biot consolidation problems for multilayered poroelastic media [J]. International Journal of Engineering Science, 2003, **41**(15): 1799-1813.
- [16] Ai Z Y, Cheng Z Y, Han J. State space solution to three-dimensional consolidation of multi-layered soils [J]. International Journal of Engineering Science, 2008, **46**(5): 486-498.

- [17] Ai Z Y, Wu C, Han J Transfer matrix solutions for three-dimensional consolidation of a multi-layered soil with compressible constituents[J]. International Journal of Engineering Science, 2008, **46**(11): 1111-1119.
- [18] 艾智勇,王全胜.有限土层轴对称 Biot固结的一个新的解析解[J].应用数学和力学, 2008, **29**(12): 1472-1478.
- [19] Chen G J Consolidation of multilayered half space with anisotropic permeability and compressible constituents[J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, **41**(16/17): 4567-4586.
- [20] Mei G X, Yin J H, Zai J M, et al. Consolidation analysis of a cross-anisotropic homogeneous elastic soil using a finite layer numerical method[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2004, **28**(2): 111-129.
- [21] Tabot A The accurate numerical inversion of Laplace transforms[J]. Journal of Institute of Mathematics and Its Application, 1979, **23**(1): 97-120.
- [22] Sneddon I N. The Use of Integral Transform [M]. New York McGraw-Hill 1972.
- [23] Ai Z Y, Yue Z Q, Tham L G, et al Extended Sneddon and Muki solutions for multilayered elastic materials[J]. International Journal of Engineering Science, 2002, **40**(13): 1453-1483.

Plane Strain Consolidation of Soil Layer With Anisotropic Permeability

AI Zhi-yong WU Chao

(Department of Geotechnical Engineering and Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China)

Abstract An alternative analytical technique to study a plane strain consolidation of a poroelastic soil by taking into account the anisotropy of permeability was presented. From the governing equations of a saturated poroelastic soil the relationship of basic variables for a point of a soil layer was established at between the ground surface ($z = 0$) and the depth z in the Laplace-Fourier transformed domain. Combined with the boundary conditions, an exact solution was derived for plane strain Biot's consolidation of a finite soil layer with anisotropic permeability in the transform domain. Numerical inversions of the Laplace transform and the Fourier transform were adopted to obtain the actual solution in the physical domain. Numerical results of plane strain Biot's consolidation for a single soil layer show that the anisotropy of permeability has great influence on the consolidation behavior of the soils.

Key words plane strain consolidation; a finite soil layer; anisotropic permeability; Laplace-Fourier transform