文章编号: 1000-0887(2009) 11-1381-06

一类 Schrödinger-Poisson型方程的稳定性*

黄 娟, 张 健, 陈光淦

(四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066)

(陈立群推荐)

摘要: 运用变分法研究一类描述物理学中电磁波在原生质中传播过程的非线性 Schrödinger-Poisson型方程. 通过分析 Hamilton性质和构造相应的变分问题, 得到该系统基态的存在性. 进而证明了该系统的基态是轨道稳定性.

关 键 词: Schrödinger-Poisson型方程; 基态; 存在性; 轨道稳定

中图分类号: O175 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.11.013

引 言

本文考虑一类非线性 Schrödinger-Poisson型方程

$$\begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi + 2\varphi\psi + |\psi|^{2p}\psi = 0, \\ -\Delta\varphi + a^2\varphi = |\psi|^2. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\psi(x, t): R^3 \times [0, T) \to \mathbf{C}$ 是一个复值函数, $\varphi(x, t): R^3 \times [0, T) \to \mathbf{R}$ 是一个实值函数. $0 < T \leqslant +\infty$ 是最大存在时间. $i = \sqrt{-1}$, Δ 是在 R^3 上的 Laplace算子. 非线性指数 p 满足 $0 < p < 2/3$. 系统 (1)模拟了物理学上电磁波在原生质的传播[1-6]. 对于该问题驻波解稳定性研究的兴起应归因于对其热非线性项的研究. 在物理学中, 该系统中的方程在文献 [4]中就被提出和研究了.

Guo和 Yang[7]得到了系统 (1)的解的适定性. 同时 Guo和 Yang[7]还研究了系统 (1)的解的渐进行为和坍塌性质.

对于形如方程 (1)的非线性波动系统, 由于许多数学和物理性质非常大的程度上依赖于其驻波解的性质. 因此, 驻波解的研究已成为现代非线性波动理论研究中的热门和重要的课题之一 (见文献 [8-17]).

下面首先回顾关于经典的非线性 Schrödinger方程

$$i\varphi_t + \Delta\varphi + |\varphi|^{q-1}\varphi = 0, \qquad x \in R^N, \quad t \geqslant 0. \tag{2}$$

方程 (2)的驻波是形如 $\varphi(x, t) = e^{i\omega t}u(x)$ 的解, 其中 $\omega \in \mathbf{R}$ 是频率, $u(x)$ 满足非线性椭圆型

* 收稿日期: 2008-01-02; 修订日期: 2009-08-19
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10771151; 10901115); 四川省教育厅 (重点) 科研基金资助项目 (2006A063); 四川省科技厅应用基础科研基金资助项目 (07JY029-012)
作者简介: 黄娟 (1981—), 女, 四川人, 博士生 (联系人. E-mail: huangjuanjunehuang@126.com).

方程

$$-\Delta u+\omega u-|u|^{q-1}u=0,\qquad u\in H^1(R^N),\tag{3}$$

这里,当 $N=1,2$时, $1<q<+\infty$;当 $N\geqslant 3$时, $1<q<(N+2)/(N-2)$. 对于方程(3), Strauss[18]建立了其驻波解的存在性; Kwong[19]证明了其驻波解的唯一性. 另一方面,若 $q<1+4/N$, Cazenave和 Lions[20]证明了对于任意的 $\omega>0$,驻波解 $e^{i\omega t}u(x)$是稳定的. 若 $q=1+4/N$, Weinstein[21]指出对于任意的 $\omega>0$,驻波解 $e^{i\omega t}u(x)$是不稳定的. 若 $q>1+4/N$, Berestycki和 Cazenavecite[22]证明了对于任意的 $\omega>0$,驻波解 $e^{i\omega t}u(x)$是不稳定的.

对于系统(1),其驻波是

$$(\psi(x,t),\varphi(x,t))=(e^{i\omega t}u(x),v(x)).\tag{4}$$

其中 $\omega\in\mathbf{R}$是频率, $(u(x),v(x))\in H_r^1(R^3)\times H_r^1(R^3)$是如下非线性椭圆型方程的解

$$\begin{cases}-\Delta u+\omega u-2uv-|u|^{2p}u=0,\\ -\Delta v+a^2v=|u|^2,\end{cases}\tag{5}$$

这里 $H_r^1(R^3)=\left\{f(x)\in H^1(R^3):f(x)=f(|x|)\right\}$.

本文对于系统(1),特别关注方程(5)具有最小能量的解,即所谓系统(1)的基态. 运用 Cazenave和 Lions[20]以及 Zhang[14-15]的方法,首先,建立基态的存在性,然后证明基态是轨道稳定的. 本文的主要结论如下:

定理 **A** (存在性) 设 $0<p<2/3$,对于 $\omega>0$,系统(1)的基态存在.

定理 **B** (轨道稳定) 设 $0<p<2/3$,对于 $\omega>0$,系统(1)的基态是轨道稳定.

本文结构安排如下:第 1节首先给出一些相关的准备知识,第 2节构造了一个变分问题证明系统(1)的基态的存在性,第 3节给出基态解轨道稳定的证明.

1 准备知识

首先,赋予系统(1)初值

$$\psi(x,0)=\psi_0(x),\qquad x\in R^3.\tag{6}$$

另外, ψ_0是方程

$$-\Delta\psi+a^2\psi=|\psi_0|^2$$

的基态.

为了方便起见,本文都记 $\int_{R^3}\cdot\,dx$为 $\int\cdot\,dx$,用 $\|\cdot\|_{H_r^1}$记空间 $H_r^1(R^3)$的范数,且用 $\|\cdot\|_{L^p}$记范数 $L^p(R^3)$. 同时,用 $\|(u,v)\|_{H_r^1\times H_r^1}=\|u\|_{H_r^1}+\|v\|_{H_r^1}$记空间 $H_r^1(R^3)\times H_r^1(R^3)$的范数.

在空间 $H_r^1(R^3)$中定义能量泛函

$$E(\psi,\varphi)=\int|\nabla\psi|^2dx+\int(|\nabla\varphi|^2dx+a^2|\nabla\varphi|^2)dx-2\int|\psi|^2\varphi dx-\frac{1}{p+1}\int|\psi|^{2(p+1)}dx\tag{7}$$

和质量泛函

$$M(\psi)=\int|\psi|^2dx.\tag{8}$$

命题 **1.1**[7] (局部适定性) 设 $\psi_0\in H_r^1(R^3)$, $0<p<2/3$,则 Cauchy问题(1)和(6)的解 $\psi(x,t)$, $\varphi(x,t)$满足

$$\psi(x,t),\ \varphi(x,t)\in L^{\infty}(0,T;H_r^1(R^3)),$$

其中 $T>0$.

命题 1.2[7] 若 $\psi_0\in H_r^1(R^3)$, 则 Cauchy问题(1)和(6)的解 $\psi(x,t)\in C(R;H_r^1(\mathrm{R}^3))$, 且 $\psi(t,\cdot)$满足以下两守恒法则:

1) 质量守恒

$$\|\psi(\cdot,t)\|_{L^2}^2=\|\psi_0\|_{L^2}^2;$$

2) 能量守恒

$$E(\psi,\varphi)=E(\psi_0,\varphi_0).$$

为了方便起见,由上面的命题可记 $\int|\psi_0|^2\mathrm{d}x=D>0$.

命题 1.3[23] 设 V是自反的 Banach空间,令 $\Omega\subset V$是 V的一个弱闭子集. 若 $E:\Omega\to\mathbf{R}\cup+\infty$是强制的,且在 Ω上关于 V是弱下半连续的. 那么 E 在 Ω上有下界且在 Ω上达到它的下界.

引理 1.1[14,21] (Gagliardo-Nirenberg不等式) 若 $0<s<2$以及 $f\in H_r^1(R^3)$, 则有以下 Gagliardo-Nirenberg不等式:

$$\|f\|_{L^{2s+2}}^{2s+2}\leqslant C\|\nabla f\|_{L^2}^{3s}\|f\|_{L^2}^{2-s}.$$

2 基态的存在性

首先,定义如下变分问题:

$$\begin{cases} d_D=\inf\limits_{(u,v)\in\Omega}E(u,v),\\ \Omega=\left\{(u,v)\in H_r^1(R^3)\times H_r^1(R^3):\ \int|u|^2\mathrm{d}x=D\right\},\end{cases}\tag{9}$$

这里的 $E(u,v)$是如式(7)定义的能量泛函,且 $D>0$.

命题 2.1 若 $1<2p+1<7/3$ (即 $0<p<2/3$), 则

$$d_D=\min_{(u,v)\in\Omega}E(u,v).\tag{10}$$

证明 由 Hölder不等式, Gagliardo-Nirenberg不等式和 Young不等式,可得

$$\begin{aligned}2\int|u|^2v\,\mathrm{d}x&\leqslant 2\left(\int|u|^3\mathrm{d}x\right)^{1/3}\left(\int|v|^6\mathrm{d}x\right)^{1/6}\left(\int|u|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leqslant\\ &C\left(\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{1/4}\left(\int|\nabla v|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int|u|^2\mathrm{d}x\right)^{3/4}\leqslant\\ &\frac14\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac12\int|\nabla v|^2\mathrm{d}x+C\left(\int|u|^2\mathrm{d}x\right)^3\leqslant\\ &\frac14\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac12\int(|\nabla v|^2+a^2|v|^2)\mathrm{d}x+C\left(\int|u|^2\mathrm{d}x\right)^3.\end{aligned}\tag{11}$$

由于 $0<p<2/3$, 由 Gagliardo-Nirenberg不等式,则

$$\int|u|^{2(p+1)}\mathrm{d}x\leqslant C\left(\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{3p/2}.\tag{12}$$

再由式(11)、(12), 命题 1.2以及 $0<p<2/3$, 则有

$$E(u,v)=$$

$$\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int(|\nabla v|^2+a^2|v|^2)\mathrm{d}x-2\int|u|^2v\,\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int|u|^{2(p+1)}\mathrm{d}x\geqslant$$

$$\frac{3}{4}\int|\nabla u|^2dx+\frac{1}{2}\int(|\nabla v|^2+a^2|v|^2)dx-$$
$$C\left(\int|u|^2dx\right)^3-\frac{1}{p+1}\int|u|^{2(p+1)}dx\geqslant$$
$$\frac{3}{4}\int|\nabla u|^2dx+\frac{1}{2}\int(|\nabla v|^2+a^2|v|^2)dx-$$
$$C\left(\int|\nabla u|^2dx\right)^{3p/2}-CD, \tag{13}$$

即 $E(u,v)$ 是强制的.

显然, Ω 是 $H_r^1(R^3)\times H_r^1(R^3)$ 的弱闭子集, 且 $E(u,v)$ 在 Ω 上是弱下半连续的.

因此, 由命题 1.3, 可知: $d_D=\min\limits_{(u,v)\in\Omega}E(u,v)$. □

定理 A 的证明

令 $G(u,v)=\int|u|^2dx-D$.

由命题 2.1, 极小化问题 (10) 有解 (u,v), 从而存在 Lagrange 乘子 $\Lambda\in\mathbf{R}$ 使得

$$\delta_u[E(u,v)+\Lambda G(u,v)]=0$$

和

$$\delta_v[E(u,v)+\Lambda G(u,v)]=0,$$

其中 δ_uF 是泛函 $F(u,v)$ 的变分.

由

$$\delta_uF(u,v)=\frac{\partial}{\partial\eta}F(u+\eta\delta u,v)\Big|_{\eta=0}$$

可得

$$\begin{cases}2\int|\nabla u|^2dx-4\int|u|^2vdx-2\int|u|^{2(p+1)}dx+2\Lambda\int|u|^2dx=0,\\ 2\int(|\nabla v|^2+a^2|v|^2)dx-2\int|u|^2vdx=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-\Delta u+\Lambda u-2uv-|u|^{2p}u=0,\\ -\Delta v+a^2v=|u|^2.\end{cases}$$

由此可得 (u,v) 是问题 (1) 的解. 由式 (9) 有 (u,v) 是系统 (1) 的基态. 从而定理获证. □

对任意 $D>0$, 可记极小化问题 (10) 的极小值组成的集合为 S_D, 则对任意的 $(u,v)\in S_D$, 存在 Lagrange 乘子 $\omega>0$ 使得 (u,v) 是方程 (5) 的解.

3 基态的轨道稳定

在本节将证明基态的轨道稳定性.

定理 **B** 的证明

事实上, 欲证定理 B 只需证明如下命题:

命题 **3.1** 设 $0<p<2/3$ 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得对任意的 $\phi_0\in H_r^1(R^3)$, 若

$$\inf_{(u,v)\in S_D}\|\phi_0-u\|_{H_r^1}<\delta. \tag{14}$$

则 Cauchy 问题 (1) 和 (6) 的解 $(\psi(t,x),\varphi(t,x))$ 满足

$$\inf_{(u,v)\in S_D} \| (\psi(t,\cdot), \varphi(t,\cdot) - (u(\cdot), v(\cdot)) \|_{H_r^1\times H_r^1} < \varepsilon,$$

$$\text{对 } \forall t \geqslant 0. \qquad (15)$$

证明 由命题 1.2,对任意的 $\psi_0\in H_r^1$, Cauchy问题(1)和(6)所对应的解 $(\psi(t,x), \varphi(t,x))$ 在空间 H_r^1 上整体存在且有界. 运用反证法, 若命题 3.1的结论不成立, 则存在 $\varepsilon>0$, 序列 $(\psi_0^n)_{n\in \mathbf{Z}}$ 使得

$$\inf_{(u,v)\in S_D} \| \psi_0^n - u \|_{H_r^1} < \frac{1}{n} \qquad (16)$$

和序列 $(t_n)_{n\in \mathbf{Z}}$ 使得

$$\inf_{(u,v)\in S_D} \| (\psi_n(t_n,\cdot), \varphi_n(t_n,\cdot)) - (u(\cdot), v(\cdot)) \|_{H_r^1\times H_r^1} \geqslant \varepsilon, \qquad (17)$$

其中, (ψ_n, φ_n) 为 Cauchy问题(1)和(6)对应于 ψ_0^n 的解. 由式(1)和式(18)知, 存在序列 $(\varphi_0^n)_{n\in \mathbf{Z}}$ 使得

$$\inf_{(u,v)\in S_D} \| \varphi_0^n - v \|_{H_r^1} < \frac{1}{n}, \qquad (18)$$

由式(16)和式(18), 则

$$\int |\psi_0^n|^2 dx \to \int |u|^2 dx = D, \qquad (19)$$

$$E(\psi_0^n, \varphi_0^n) \to E(u, v) = d_D. \qquad (20)$$

进而, 由式(18)~(20)以及守恒律知 $(\psi_n(t_n,\cdot), \varphi_n(t_n,\cdot))_{n\in \mathbf{Z}}$ 是问题(10)的极小化序列. 因此, 存在 $(u,v)\in S_D$ 使得

$$\| (\psi_n(t_n,\cdot), \varphi_n(t_n,\cdot)) - (u(\cdot), v(\cdot)) \|_{H_r^1\times H_r^1} \to 0 \quad (n\to\infty). \qquad (21)$$

这与式(17)矛盾. 因此命题 3.1得证. □

[参 考 文 献]

[1] Abdullaev F Kh. Dunamical chaos of solitons and nonlinear periodic waves[J]. Phys Reports, 1989, **179**(1): 1-78.

[2] Gagliardo E. Proprieta di alcune classi di funzioni in piu varibili[J]. Ricerche di Math, 1958, **7**(1): 102-137.

[3] Gagliardo E. Ulteriori proprieta di alcune classi di funzioni in piu varibili[J]. Ricerche di Math, 1959, **8**(1): 24-51.

[4] Kuznetsov E A, Rubenchik A M, Zakharov V E. Soliton stability in plasmas and hydrodynamics[J]. Phys Reports, 1986, **142**(3): 103-165.

[5] Makhankov V G. Dynamics of classical solutions (in non-interable systems)[J]. Phys Reports, 1978, **35**(1): 1-128.

[6] Zakharov V E. Collapse of Langmuir waves[J]. Sov Phys JETP, 1972, **35**(5): 908-914.

[7] GUO Bo-ling, YANG Lin-ge. The global solution and asymptotic behaviors for one class of nonlinear evolution equations[J]. J Partial Diff Eqs, 1997, **10**(3): 232-246.

[8] Fukuizumi R, Ohta M. Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with potentials[J]. Differential and Integral Eqs, 2003, **16**(1): 111-128.

[9] Goncalves Rebeiro J M. Instability of symmetric stationary states for some nonlinear Schrödinger equations with an external magnetic field[J]. Ann Inst Henri Poincar Physique Thorique, 1991, **54**(4): 403-433.

[10] Grillakis M, Shatah J, Strauss W A. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I [J]. J Funct Anal, 1987, **74**(1): 160-197.

[11] Shatah J, Strauss W A. Instability of nonlinear bound states[J]. Comm Math Phys, 1985, **100**(2): 173-190.

[12] Tsutsumi Y, ZHANG Jian. Instability of optical solitons for two-wave interaction model in cubic nonlinear media[J]. Advances in Mathematical Sciences and Applications, 1998, **8**(5): 691-713.

[13] WEI Yun-yun, CHEN Guang-gan. On the standing wave for a class of nonlinear Schrödinger equations[J]. J Math Anal Appl, 2008, **337**(2): 1022-1030.

[14] ZHANG Jian. Stability of attractive Bose-Einstein condensates[J]. Journal of Statistical Physics, 2000, **101**(3/4): 731-746.

[15] ZHANG Jian. Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with unbounded potentials[J]. Z Angew Math Phys, 2000, **51**(1): 498-503.

[16] ZHANG Jian. On the standing wave in coupled nonlinear Klein-Gordon equations[J]. Math Mech Appl Sci, 2003, **26**(1): 11-25.

[17] ZHANG Jian. Sharp threshold for global existence and blowup in nonlinear Schrödinger equation with harmonic potential[J]. Commun Partial Diff Eqs, 2005, **30**(10/12): 1429-1443.

[18] Strauss W A. Existence of solitary waves in higher dimensions[J]. Comm Math Phys, 1977, **55**(2): 149-162.

[19] Kwong M K. Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in R^N [J]. Arch Rat Mech Anal, 1989, **105**(3): 243-266.

[20] Cazenave T, Lions P L. Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations[J]. Comm Math Phys, 1982, **85**(4): 549-561.

[21] Weinstein M I. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolations estimates[J]. Commu Math Phys, 1983, **87**(4): 567-576.

[22] Berestycki H, Cazenave T. Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires[J]. C R Acad Sci Paris, Seire I, 1981, **293**(1): 489-492.

[23] Struwe M. Varitional Methods[M]. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1996.

Stability of Schrödinger-Poisson Type Equations

HUANG Juan, ZHANG Jian, CHEN Guan-gan

(College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University,
Chengdu 610066, P. R. China)

Abstract: Variational methods were used to study the nonlinear Schrödinger-Poisson type equations which model the electromagnetic wave propagates in the plasma in physics. Through analyzing the Hamiltonian property to construct a constrained variational problem, the existence of the ground state of the system was obtained. Furthermore, the ground state being orbitally stable was proved.

Key words: Schrödinger-Poisson type equations; ground state; existence; orbital stability