

多参数结构特征二阶灵敏度^{*}

陈塑寰¹, 郭睿², 孟广伟¹,

(1. 吉林大学(南岭校区)力学系, 长春 130025;

2. 吉林大学(南岭校区)汽车动态模拟国家重点实验室, 长春 130025)

(陈立群推荐)

摘要: 提出了一种有效计算多参数结构特征值与特征向量二阶灵敏度矩阵——Hessian 矩阵的方法。将特征值和特征向量二阶摄动法转变为多参数形式, 推导出二阶摄动灵敏度矩阵, 由此得到特征值和特征向量的二阶估计式。该法解决了无法用直接求导法计算特征值和特征向量二阶灵敏度矩阵的问题。数值算例说明了该算法的应用和计算精度。

关键词: 多参数结构; 二阶特征灵敏度; 有效计算方法

中图分类号: O327 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.12.001

引 言

特征灵敏度分析是关于结构参数如何影响动态响应问题的研究, 在结构优化中起着重要作用。设计者可直接应用灵敏度信息来指导设计, 在工程科学中的各种领域, 如自动控制和大规模生理学系统分析中具有广泛应用。科学工作者们在这些领域里已有大量有意义的研究工作。最早, Fox 和 Kapoor^[1] 应用全模态展开法给出了特征值与特征向量的一阶灵敏度精确表达式, 成为研究特征灵敏度问题的经典算法; Nelson^[2] 通过解方程的方法, 将特征向量一阶灵敏度表示为只与所求阶特征值和特征向量相关的函数, 避免了全模态展开法的巨大计算量; Juang 等^[3], Lee 和 Jung^[4-5] 都对结构频率和振型的灵敏度问题进行过研究, 提出自己的见解和算法; Lim 和 Junkins^[6] 讨论了特征向量导数的计算问题; Liu 等^[7] 对自由-自由结构进行了研究, 提出一种计算特征向量一阶灵敏度的精确方法; Moon 等^[8] 将全模态展开法应用于求解对称矩阵的特征灵敏度问题; Gong 和 Xu^[9], Maddulapalli 等^[10], Choi 等^[11] 分别对改进结构和产品设计过程中的特征灵敏度问题进行了研究。

当结构参数发生微小变化时, 矩阵摄动理论是研究特征值与特征向量变化地有效方法, 因此矩阵摄动理论作为一项有效工具, 一直为广大学者所使用。文献[12]对孤立特征值、重特征值和密频特征值问题分别进行了研究; 文献[13]讨论了复模态特征灵敏度问题。文献[14]提

* 收稿日期: 2009-02-17; 修订日期: 2009-10-15

基金项目: 吉林省科学技术发展基金资助项目(20070541)

作者简介: 陈塑寰(1934—), 男, 广东兴宁人, 教授(E-mail: chensh@jlu.edu.cn);
郭睿(1978—), 女, 吉林人, 讲师, 博士(联系人, Tel: +86-431-8505090;
E-mail: guo.rui@ascl.jlu.edu.cn).

出一种计算闭环系统一阶、二阶特征值灵敏度的新方法。文献[15]利用逆特征值方法对复合材料的动态特性问题进行了研究。为了计算复合板材料的特征值变化量,文献[16-17]根据 Taylor 展式法对特征值的一阶、二阶灵敏度问题进行了研究,并将特征灵敏度分析结果有效地应用在智能控制盘上。文献[18]讨论了用特征值二阶灵敏度研究结构动力特性的问题。Bahai 和 Farahani 等^[19-21]应用逆特征值法对特征灵敏度问题进行了研究,提出一种求解特征灵敏度的新思路。文献[21-22]分别讨论了对称和非对称有阻尼系统的高阶特征值灵敏度问题。

应当注意的是,上面介绍的这些方法^[15-22]都是在求导法基础上对特征灵敏度问题进行的研究,因此,特征解关于参数的显示表达式是这些算法实现的前提。然而在实际工程中,求解多参数形式的特征值和特征向量的显式表达式是非常困难甚至是无法求解的,这必然会为计算多参数形式下的特征灵敏度带来巨大困难。这里将结合矩阵摄动法和 Taylor 展开式解决这一难题。通过推导多参数形式下特征值和特征向量的一阶、二阶摄动灵敏度矩阵,得出参数发生微小变化时特征灵敏度矩阵的近似值,并给出计算特征解一阶、二阶灵敏度的有效方法。本文大致可以分为以下几个部分:第1节,简要介绍多参数形式下 Taylor 展式和特征值与特征向量的二阶摄动方法;第2节,对多参数结构特征值和特征向量的二阶摄动灵敏度矩阵进行推导;第3节,用工程算例证明所提算法的有效性。

1 Taylor 展开式和特征问题摄动法

为方便读者理解,下面对 Taylor 展式和特征问题的矩阵摄动理论进行简单介绍。

1.1 Taylor 展开式

设有 L 维多参数 α , 如

$$\alpha = \left[\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(L)} \right]^T, \quad (1)$$

将第 i 阶特征值 $\lambda_i(\alpha)$ 在 α_0 点二阶展开,可得

$$\begin{aligned} \lambda_i(\alpha) = & \lambda_i(\alpha_0) + \mathbf{G}_{\lambda_i}^T(\alpha_0) \Delta \alpha + \\ & \frac{1}{2} \Delta \alpha^T \mathbf{H}_{\lambda_i}(\alpha_0) \Delta \alpha + \dots, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

对于 n 维特征向量 $\mathbf{u}_i(\alpha)$, 它可以表示为

$$\mathbf{u}_i(\alpha) = \left[\mathbf{u}_{i1}(\alpha), \dots, \mathbf{u}_{ik}(\alpha), \dots, \mathbf{u}_{in}(\alpha) \right]^T. \quad (3)$$

将 $\mathbf{u}_i(\alpha)$ 的第 k 次项 $\mathbf{u}_{ik}(\alpha)$ 在 α_0 点对 $\mathbf{u}_{ik}(\alpha)$ 进行二阶展开,可以得到

$$\mathbf{u}_{ik}(\alpha) = \mathbf{u}_{ik}(\alpha_0) + \mathbf{G}_{\mathbf{u}_{ik}}^T(\alpha_0) \Delta \alpha + \frac{1}{2} \Delta \alpha^T \mathbf{H}_{\mathbf{u}_{ik}}(\alpha_0) \Delta \alpha + \dots, \quad (4)$$

上式中 $\mathbf{G}_{\lambda_i}^T(\alpha_0)$, $\mathbf{H}_{\lambda_i}(\alpha_0)$, 和 $\mathbf{G}_{\mathbf{u}_{ik}}^T(\alpha_0)$, $\mathbf{H}_{\mathbf{u}_{ik}}(\alpha_0)$ 分别是特征值和特征向量关于多个参数 α 的梯度矩阵和 Hessian 矩阵。

根据直接求导法,特征值和特征向量关于参数的梯度矩阵和 Hessian 矩阵可以写为

$$\begin{cases} \mathbf{G}_{\lambda_i}^T(\alpha_0) = \left[\frac{\partial \lambda_i(\alpha)}{\partial \alpha^{(1)}} & \frac{\partial \lambda_i(\alpha)}{\partial \alpha^{(2)}} & \dots & \frac{\partial \lambda_i(\alpha)}{\partial \alpha^{(L)}} \right], \\ \mathbf{G}_{\mathbf{u}_{ik}}^T(\alpha_0) = \left[\frac{\partial \mathbf{u}_{ik}(\alpha)}{\partial \alpha^{(1)}} & \frac{\partial \mathbf{u}_{ik}(\alpha)}{\partial \alpha^{(2)}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{u}_{ik}(\alpha)}{\partial \alpha^{(L)}} \right], \end{cases} \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_{\lambda_i}(\alpha_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \lambda_i(\alpha)}{\partial \alpha^{(1)} \partial \alpha^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial^2 \lambda_i(\alpha)}{\partial \alpha^{(1)} \partial \alpha^{(L)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \lambda_i(\alpha)}{\partial \alpha^{(L)} \partial \alpha^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial^2 \lambda_i(\alpha)}{\partial \alpha^{(L)} \partial \alpha^{(L)}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}_{u_{ik}}(\alpha_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_{ik}(\alpha)}{\partial \alpha^{(1)} \partial \alpha^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial^2 u_{ik}(\alpha)}{\partial \alpha^{(1)} \partial \alpha^{(L)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u_{ik}(\alpha)}{\partial \alpha^{(L)} \partial \alpha^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial^2 u_{ik}(\alpha)}{\partial \alpha^{(L)} \partial \alpha^{(L)}} \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (6)$$

如果将特征值和特征向量的一阶、二阶分量写成梯度阵和 Hessian 阵的函数,可以得到

$$\lambda_{1i}(\alpha) = \mathbf{G}_{\lambda_i}^T(\alpha_0) \Delta \alpha, \quad \lambda_{2i}(\alpha) = \frac{1}{2} \Delta \alpha^T \mathbf{H}_{\lambda_i}(\alpha_0) \Delta \alpha, \quad (7)$$

$$u_{1ik}(\alpha) = \mathbf{G}_{u_{ik}}^T(\alpha_0) \Delta \alpha, \quad u_{2ik}(\alpha) = \frac{1}{2} \Delta \alpha^T \mathbf{H}_{u_{ik}}(\alpha_0) \Delta \alpha. \quad (8)$$

由于特征值和特征向量是设计参数的隐函数,它们的一阶、二阶灵敏度矩阵即梯度阵与 Hessian 阵无法通过直接求导法计算。下面将结合矩阵摄动理论的特征值和特征向量的一阶、二阶摄动法来解决这一问题。

1.2 特征值的摄动法

对于孤立系统,矩阵特征值问题可以表达为

$$\mathbf{K}u = \lambda \mathbf{M}u, \quad (9)$$

这里 \mathbf{K} 和 \mathbf{M} 分别是刚度矩阵和质量矩阵, $\lambda = \omega^2$, ω 是结构固有频率, u 是特征向量。当结构参数发生微小变化后,质量阵和刚度阵可以表示为

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \Delta \mathbf{M}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \Delta \mathbf{K}, \quad (10)$$

其中, $\Delta \mathbf{M}$ 和 $\Delta \mathbf{K}$ 是质量阵和刚度阵的增量矩阵。

根据矩阵摄动理论^[12],变化后的特征值和特征向量可表示为

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \lambda_{1i} + \lambda_{2i} + \cdots, \quad (11)$$

$$u_i = u_{0i} + u_{1i} + u_{2i} + \cdots, \quad (12)$$

这里 λ_{0i} 和 u_{0i} 分别是结构的初始特征值与初始特征向量, u_{1i} , u_{2i} 和 λ_{1i} , λ_{2i} 分别是特征向量和特征值的一阶、二阶摄动量。根据矩阵摄动理论^[12],可以得到特征值的一阶摄动量为

$$\lambda_{1i} = u_{0i}^T \Delta \mathbf{K} u_{0i} - \lambda_{0i} u_{0i}^T \Delta \mathbf{M} u_{0i}. \quad (13)$$

特征向量 u_i 的一阶摄动量为

$$u_{1i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{\lambda_{0i} - \lambda_{0j}} (u_{0j}^T \Delta \mathbf{K} u_{0i} - \lambda_{0i} u_{0j}^T \Delta \mathbf{M} u_{0i}) u_{0j} - \frac{1}{2} u_{0i}^T \Delta \mathbf{M} u_{0i} u_{0i}. \quad (14)$$

同理可以得到特征值的二阶摄动量

$$\lambda_{2i} = u_{0i}^T \Delta \mathbf{K} u_{1i} - \lambda_{0i} u_{0i}^T \Delta \mathbf{M} u_{1i} - \lambda_{1i} u_{0i}^T \mathbf{M}_0 u_{1i} - \lambda_{1i} u_{0i}^T \Delta \mathbf{M} u_{0i} \quad (15)$$

和特征向量的二阶摄动量

$$u_{2i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{\lambda_{0i} - \lambda_{0j}} (u_{0j}^T \Delta \mathbf{K} u_{1i} - \lambda_{0i} u_{0j}^T \Delta \mathbf{M} u_{1i} - \lambda_{1i} u_{0j}^T \mathbf{M}_0 u_{1i} - \lambda_{1i} u_{0j}^T \Delta \mathbf{M} u_{0i}) u_{0j} -$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{u}_{1i}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{1i} + \mathbf{u}_{0i}^T \Delta \mathbf{M} \mathbf{u}_{1i} + \mathbf{u}_{1i}^T \Delta \mathbf{M} \mathbf{u}_{0i}) \mathbf{u}_{0i} \bullet \quad (16)$$

2 多参数结构特征值的二阶摄动灵敏度

2.1 刚度矩阵和质量矩阵的变化量

根据 Taylor 展开式, 发生微小变化的刚度阵与质量阵增量可以表示为

$$\Delta \mathbf{K} = \sum_{s=1}^L \mathbf{K}_{,s} \Delta \alpha^{(s)}, \quad \Delta \mathbf{M} = \sum_{s=1}^L \mathbf{M}_{,s} \Delta \alpha^{(s)}, \quad (17)$$

这里 $\mathbf{K}_{,s}$ 和 $\mathbf{M}_{,s}$ 分别表示刚度阵与质量阵关于参数 $\alpha^{(s)}$ 的变化量

$$\mathbf{K}_{,s} = \frac{\Delta \mathbf{K}(\alpha^{(s)})}{\Delta \alpha^{(s)}}, \quad \mathbf{M}_{,s} = \frac{\Delta \mathbf{M}(\alpha^{(s)})}{\Delta \alpha^{(s)}}, \quad (18)$$

上式中, $\Delta \mathbf{K}(\alpha^{(s)})$ 和 $\Delta \mathbf{M}(\alpha^{(s)})$ 分别是 \mathbf{K} 和 \mathbf{M} 关于参数 $\alpha^{(s)}$ 的增量。

2.2 多参数结构特征值与特征向量的一阶摄动灵敏度

将上式(17)代入式(13), 可以得到

$$\lambda_i = \mathbf{u}_{0i}^T \sum_{s=1}^L \mathbf{K}_{,s} \Delta \alpha^{(s)} \mathbf{u}_{0i} - \lambda_0 \mathbf{u}_{0i}^T \sum_{s=1}^L \mathbf{M}_{,s} \Delta \alpha^{(s)} \mathbf{u}_{0i} = \sum_{s=1}^L \lambda_i^{(s)} \Delta \alpha^{(s)}, \quad (19)$$

这里 $\lambda_i^{(s)}$ 表示第 i 阶特征值关于参数 $\Delta \alpha^{(s)}$ 的一阶摄动量

$$\lambda_i^{(s)} = \mathbf{u}_{0i}^T (\mathbf{K}_{,s} - \lambda_0 \mathbf{M}_{,s}) \mathbf{u}_{0i} \bullet \quad (20)$$

此时, 特征值的一阶增量可以表示为

$$\lambda_i = \mathbf{G}_{\lambda_i}^T \Delta \alpha, \quad (21)$$

上式中 $\mathbf{G}_{\lambda_i}^T$ 是特征值的一阶摄动灵敏度矩阵

$$\mathbf{G}_{\lambda_i}^T = [\lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)}, \dots, \lambda_i^{(L)}] \bullet \quad (22)$$

同理, 将式(17)代入式(14),

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{1i} = & \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_{0i} - \lambda_{0j}} \left[\mathbf{u}_{0j}^T \left(\sum_{s=1}^L \mathbf{K}_{,s} \Delta \alpha^{(s)} \right) \mathbf{u}_{0i} - \lambda_0 \mathbf{u}_{0j}^T \left(\sum_{s=1}^L \mathbf{M}_{,s} \Delta \alpha^{(s)} \right) \mathbf{u}_{0i} \right] \mathbf{u}_{0j} - \\ & \frac{1}{2} \mathbf{u}_{0i}^T \left(\sum_{s=1}^L \mathbf{M}_{,s} \Delta \alpha^{(s)} \right) \mathbf{u}_{0i} \mathbf{u}_{0i} = \\ & \sum_{j=1}^n \left[\sum_{s=1}^L \frac{1}{\lambda_{0i} - \lambda_{0j}} \left[\mathbf{u}_{0j}^T (\mathbf{K}_{,s} - \lambda_0 \mathbf{M}_{,s}) \mathbf{u}_{0i} \right] \Delta \alpha^{(s)} \right] \mathbf{u}_{0j} - \\ & \frac{1}{2} \mathbf{u}_{0i}^T \left(\sum_{s=1}^L \mathbf{M}_{,s} \Delta \alpha^{(s)} \right) \mathbf{u}_{0i} \mathbf{u}_{0i} = \\ & [\mathbf{u}_{1i}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{1i}^{(s)}, \dots, \mathbf{u}_{1i}^{(L)}] \Delta \alpha, \end{aligned} \quad (23)$$

这里, $\mathbf{u}_{1i}^{(s)}$ 是 i 阶特征向量关于参数 $\Delta \alpha^{(s)}$ 的一阶摄动增量

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{1i}^{(s)} = & \mathbf{U}_0 \left[\frac{1}{\lambda_{0i} - \lambda_{01}} \left[\mathbf{u}_{01}^T (\mathbf{K}_{,s} - \lambda_0 \mathbf{M}_{,s}) \mathbf{u}_{0i} \right], \dots, \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_{,s} \mathbf{u}_{0i}, \dots, \frac{1}{\lambda_{0i} - \lambda_{0n}} \left[\mathbf{u}_{0n}^T (\mathbf{K}_{,s} - \lambda_0 \mathbf{M}_{,s}) \mathbf{u}_{0i} \right] \right]^T, \end{aligned} \quad (24)$$

其中 \mathbf{U}_0 是初始特征向量矩阵。

如果令 \mathbf{G}_{u_k} 是矩阵 \mathbf{G}_{u_i} 的第 k 行分量, 其中

$$\mathbf{G}_{u_i} = (\mathbf{u}_{1i}^{(1)}, \mathbf{u}_{1i}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{1i}^{(s)}, \dots, \mathbf{u}_{1i}^{(L)}), \quad (25)$$

那么, 特征向量一阶增量的第 k 行元素可以写为

$$u_{1ik} = \mathbf{G}^T \mathbf{u}_{u_i} \Delta \alpha \quad (26)$$

2.3 多参数结构特征值的二阶摄动灵敏度

将式(17)代入式(15),

$$\begin{aligned} \lambda_{2i} &= \mathbf{u}_{0i}^T \left(\sum_{s=1}^L \mathbf{K}_{,s} \Delta \alpha^{(s)} \right) \mathbf{u}_{1i} - \lambda_{0i} \mathbf{u}_{0i}^T \left(\sum_{s=1}^L \mathbf{M}_{,s} \Delta \alpha^{(s)} \right) \mathbf{u}_{1i} - \\ &\lambda_{1i} \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{1i} - \lambda_{1i} \mathbf{u}_{0i}^T \left(\sum_{s=1}^L \mathbf{M}_{,s} \Delta \alpha^{(s)} \right) \mathbf{u}_{0i} = \\ &\sum_{s=1}^L \left(\mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{K}_{,s} \mathbf{u}_{1i} \right) \Delta \alpha^{(s)} - \lambda_{0i} \sum_{s=1}^L \left(\mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_{,s} \mathbf{u}_{1i} \right) \Delta \alpha^{(s)} - \\ &\lambda_{1i} \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{1i} - \lambda_{1i} \sum_{s=1}^L \left(\mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_{,s} \mathbf{u}_{0i} \right) \Delta \alpha^{(s)}. \end{aligned} \quad (27)$$

将式(22)和(23)代入式(27)的右边第1项, 可得

$$\sum_{s=1}^L \left(\mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{K}_{,s} \mathbf{u}_{1i} \right) \Delta \alpha^{(s)} = \Delta \alpha^T \mathbf{h}_1 \Delta \alpha, \quad (28)$$

这里

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{K}_{,1} \mathbf{u}_{1i}^{(1)} & \cdots & \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{K}_{,1} \mathbf{u}_{1i}^{(L)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{K}_{,L} \mathbf{u}_{1i}^{(1)} & \cdots & \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{K}_{,L} \mathbf{u}_{1i}^{(L)} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

同理, 由式(27)右边第2项, 可以得到

$$- \lambda_{0i} \sum_{s=1}^L \left(\mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_{,s} \mathbf{u}_{1i} \right) \Delta \alpha^{(s)} = \Delta \alpha^T \mathbf{h}_2 \Delta \alpha, \quad (30)$$

这里

$$\mathbf{h}_2 = - \lambda_{0i} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_{,1} \mathbf{u}_{1i}^{(1)} & \cdots & \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_{,1} \mathbf{u}_{1i}^{(L)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_{,L} \mathbf{u}_{1i}^{(1)} & \cdots & \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_{,L} \mathbf{u}_{1i}^{(L)} \end{bmatrix}; \quad (31)$$

第3项为

$$- \lambda_{1i} \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{1i} = \Delta \alpha^T \mathbf{G}_{\lambda_i} \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{u_i} \Delta \alpha = \Delta \alpha^T \mathbf{h}_3 \Delta \alpha, \quad (32)$$

这里

$$\mathbf{h}_3 = - \begin{bmatrix} \lambda_{1i}^{(1)} \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{1i}^{(1)} & \cdots & \lambda_{1i}^{(1)} \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{1i}^{(L)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{1i}^{(L)} \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{1i}^{(1)} & \cdots & \lambda_{1i}^{(L)} \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{1i}^{(L)} \end{bmatrix}; \quad (33)$$

第4项为

$$- \lambda_{1i} \sum_{s=1}^L \left(\mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_{,s} \mathbf{u}_{0i} \right) \Delta \alpha^{(s)} = \Delta \alpha^T \mathbf{h}_4 \Delta \alpha, \quad (34)$$

这里

$$\mathbf{h}_4 = - \begin{bmatrix} \lambda_{1i}^{(1)} \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_{,1} \mathbf{u}_{0i} & \cdots & \lambda_{1i}^{(1)} \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_{,L} \mathbf{u}_{0i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{1i}^{(L)} \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_{,1} \mathbf{u}_{0i} & \cdots & \lambda_{1i}^{(L)} \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_{,L} \mathbf{u}_{0i} \end{bmatrix}; \quad (35)$$

上面式中 \mathbf{h}_1 , \mathbf{h}_2 , \mathbf{h}_3 和 \mathbf{h}_4 都是 $L \times L$ 阶的对称方阵, 设这4个矩阵的和为

$$\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3 + \mathbf{h}_4 = \mathbf{h}, \quad (36)$$

\mathbf{h} 是特征值的二阶摄动矩阵。为了将矩阵 \mathbf{h} 对称化, 我们定义 \mathbf{H}_{λ_i} 是矩阵 \mathbf{h} 和 \mathbf{h}^T 的和

$$\mathbf{h} + \mathbf{h}^T = \mathbf{H}_{\lambda_i}, \quad (37)$$

将上式代入式(27), 可得

$$\lambda_{2i} = \frac{1}{2} \Delta \alpha^T \mathbf{H}_{\lambda_i} \Delta \alpha, \quad (38)$$

其中, \mathbf{H}_{λ_i} 是特征值的二阶摄动灵敏度矩阵。

将式(21)和(38)代入式(11), 可得多参数形式下特征值的二阶表达式

$$\lambda = \lambda_{0i} + \mathbf{G}_{\lambda_i}^T \Delta \alpha + \frac{1}{2} \Delta \alpha^T \mathbf{H}_{\lambda_i} \Delta \alpha + \dots, \quad (39)$$

式(39)是特征值 λ 多参数形式的二阶摄动表达式。

对比式(39)与式(2)可以看出, 特征值二阶表达式可以表示为这两种相同的形式。不同的是式(2)中的特征值与特征向量的一阶、二阶灵敏度矩阵 $\mathbf{G}_{\lambda_i}^T$ 与 $\mathbf{H}_{\lambda_i}(\alpha_0)$ 需通过直接求导法得到, 式(39)中灵敏度矩阵 $\mathbf{G}_{\lambda_i}^T$ 与 $\mathbf{H}_{\lambda_i}(\alpha_0)$ 根据矩阵摄动法求得。

2.4 多参数结构特征向量二阶摄动灵敏度

将式(17)代入式(16), 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{2i} = & \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_{0i} - \lambda_{0j}} \left(\mathbf{u}_{0j}^T \sum_{s=1}^L \mathbf{K}_{,s} \Delta \alpha^{(s)} \mathbf{u}_{1i} - \lambda_{0i} \mathbf{u}_{0j}^T \sum_{s=1}^L \mathbf{M}_{,s} \Delta \alpha^{(s)} \mathbf{u}_{1i} - \right. \\ & \left. \lambda_{1i} \mathbf{u}_{0j}^T \mathbf{M}_{0i} \mathbf{u}_{1i} - \lambda_{1i} \mathbf{u}_{0j}^T \sum_{s=1}^L \mathbf{M}_{,s} \Delta \alpha^{(s)} \mathbf{u}_{0i} \right) \mathbf{u}_{0j} - \\ & \frac{1}{2} \left(\mathbf{u}_{1i}^T \mathbf{M}_{0i} \mathbf{u}_{1i} + \mathbf{u}_{0i}^T \sum_{s=1}^L \mathbf{M}_{,s} \Delta \alpha^{(s)} \mathbf{u}_{1i} + \mathbf{u}_{1i}^T \sum_{s=1}^L \mathbf{M}_{,s} \Delta \alpha^{(s)} \mathbf{u}_{0i} \right) \mathbf{u}_{0i}, \end{aligned} \quad (40)$$

将式(20)和(23)代入式(40), 可以得到

$$\mathbf{u}_{2i} = \mathbf{U}_0 \left[\Delta \alpha^T \mathbf{h}^{(1)} \Delta \alpha, \dots, \Delta \alpha^T \mathbf{h}^{(j)} \Delta \alpha, \dots, \Delta \alpha^T \mathbf{h}^{(n)} \Delta \alpha \right]^T, \quad (41)$$

这里, 当 $j \neq i$ 时 $\mathbf{h}^{(j)}$ 为

$$\mathbf{h}^{(j)} = \frac{1}{\lambda_{0i} - \lambda_{0j}} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{0j}^T \mathbf{K}_{,1} \mathbf{u}_{1i}^{(1)} - \lambda_{0i} \mathbf{u}_{0j}^T \mathbf{M}_{,1} \mathbf{u}_{1i}^{(1)} - \lambda_{1i}^{(1)} \mathbf{u}_{0j}^T \mathbf{M}_{0i} \mathbf{u}_{1i}^{(1)} - \lambda_{1i}^{(1)} \mathbf{u}_{0j}^T \mathbf{M}_{,1} \mathbf{u}_{0i}, \dots \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{0j}^T \mathbf{K}_{,L} \mathbf{u}_{1i}^{(1)} - \lambda_{0i} \mathbf{u}_{0j}^T \mathbf{M}_{,L} \mathbf{u}_{1i}^{(1)} - \lambda_{1i}^{(L)} \mathbf{u}_{0j}^T \mathbf{M}_{0i} \mathbf{u}_{1i}^{(1)} - \lambda_{1i}^{(L)} \mathbf{u}_{0j}^T \mathbf{M}_{,L} \mathbf{u}_{0i}, \dots \\ \mathbf{u}_{0j}^T \mathbf{K}_{,1} \mathbf{u}_{1i}^{(L)} - \lambda_{0i} \mathbf{u}_{0j}^T \mathbf{M}_{,1} \mathbf{u}_{1i}^{(L)} - \lambda_{1i}^{(1)} \mathbf{u}_{0j}^T \mathbf{M}_{0i} \mathbf{u}_{1i}^{(L)} - \lambda_{1i}^{(1)} \mathbf{u}_{0j}^T \mathbf{M}_{,1} \mathbf{u}_{0i} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{0j}^T \mathbf{K}_{,L} \mathbf{u}_{1i}^{(L)} - \lambda_{0i} \mathbf{u}_{0j}^T \mathbf{M}_{,L} \mathbf{u}_{1i}^{(L)} - \lambda_{1i}^{(L)} \mathbf{u}_{0j}^T \mathbf{M}_{0i} \mathbf{u}_{1i}^{(L)} - \lambda_{1i}^{(L)} \mathbf{u}_{0j}^T \mathbf{M}_{,L} \mathbf{u}_{0i} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

当 $j = i$ 时

$$\mathbf{h}^{(j)} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{1i}^{(1)T} \mathbf{M}_{0i} \mathbf{u}_{1i}^{(1)} + \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_{,1} \mathbf{u}_{1i}^{(1)} + \mathbf{u}_{1i}^{(1)T} \mathbf{M}_{,1} \mathbf{u}_{0i}, \dots \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{1i}^{(1)T} \mathbf{M}_{0i} \mathbf{u}_{1i}^{(L)} + \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_{,L} \mathbf{u}_{1i}^{(1)} + \mathbf{u}_{1i}^{(1)T} \mathbf{M}_{,L} \mathbf{u}_{0i}, \dots \\ \mathbf{u}_{1i}^{(L)T} \mathbf{M}_{0i} \mathbf{u}_{1i}^{(1)} + \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_{,1} \mathbf{u}_{1i}^{(L)} + \mathbf{u}_{1i}^{(L)T} \mathbf{M}_{,1} \mathbf{u}_{0i} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{1i}^{(L)T} \mathbf{M}_{0i} \mathbf{u}_{1i}^{(L)} + \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_{,L} \mathbf{u}_{1i}^{(L)} + \mathbf{u}_{1i}^{(L)T} \mathbf{M}_{,L} \mathbf{u}_{0i} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

因此, 式(41)中特征向量二阶增量的第 k 行元素可以表示为

$$u_{2ik} = \sum_{j=1}^n u_{0jk} \Delta \alpha^T \mathbf{h}^{(j)} \Delta \alpha = \Delta \alpha^T \mathbf{H}_{u_{ik}} \Delta \alpha, \quad (44)$$

这里, $\mathbf{H}_{u_{ik}}$ 是特征向量 u_{ik} 的二阶摄动矩阵

$$\mathbf{H}_{u_{ik}} = u_{01k} \mathbf{h}^{(1)} + u_{02k} \mathbf{h}^{(2)} + \dots + u_{0nk} \mathbf{h}^{(n)}. \quad (45)$$

同理, 为了将矩阵对称化, 我们定义 $\mathbf{H}_{u_{ik}}$ 是矩阵 $\mathbf{H}_{u_{ik}}$ 和其转置矩阵 $\mathbf{H}_{u_{ik}}^T$ 之和:

$$\mathbf{H}_{u_{ik}} = \mathbf{H}_{u_{ik}} + \mathbf{H}_{u_{ik}}^T. \quad (46)$$

由此, 我们可以得到 i 阶特征向量第 k 行元素 u_{ik} 的二阶摄动灵敏度矩阵 $\mathbf{H}_{u_{ik}}$. 此时式(44)可改写为

$$u_{2ik} = \frac{1}{2} \Delta \alpha^T \mathbf{H}_{u_{ik}} \Delta \alpha. \quad (47)$$

根据式(26)和式(47), 特征向量 k 行元素的二阶摄动表达式可以写为

$$u_{ik} = u_{0ik} + \mathbf{G}_{u_{ik}}^T \Delta \alpha + \frac{1}{2} \Delta \alpha^T \mathbf{H}_{u_{ik}} \Delta \alpha + \dots \quad (48)$$

2.5 梯度矩阵和 Hessian 矩阵的近似

对比式(2)和式(39), Taylor 展式中特征值的一阶、二阶灵敏度矩阵 $\mathbf{G}_{\lambda_i}^T(\alpha_0)$, $\mathbf{H}_{\lambda_i}(\alpha_0)$ 可以由下式来近似得到

$$\lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \mathbf{G}_{\lambda_i}^T = \mathbf{G}_{\lambda_i}^T(\alpha_0), \quad \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \mathbf{H}_{\lambda_i} = \mathbf{H}_{\lambda_i}(\alpha_0). \quad (49)$$

同理, 对于特征向量的一阶、二阶灵敏度矩阵 $\mathbf{G}_{u_{ik}}^T(\alpha_0)$ 和 $\mathbf{H}_{u_{ik}}(\alpha_0)$ 也有

$$\lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \mathbf{G}_{u_{ik}}^T = \mathbf{G}_{u_{ik}}^T(\alpha_0), \quad \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \mathbf{H}_{u_{ik}} = \mathbf{H}_{u_{ik}}(\alpha_0). \quad (50)$$

即当结构参数改变量 $\Delta \alpha$ 很小时, 特征值和特征向量的一阶、二阶摄动灵敏度矩阵就可以近似等于特征灵敏度矩阵.

由此, 我们可以得到计算特征值和特征向量关于结构参数改变量的两种方法. 一是按照公式(49)和(50)计算出灵敏度矩阵, 再根据 Taylor 展式法计算特征解的改变量, 二是根据公式(39)和(48)计算摄动灵敏度矩阵, 然后再计算特征解的改变量.

本文中介绍的是第 2 种方法, 其计算过程可以简单归纳如下:

1) 计算系统 $(\mathbf{K}_0, \mathbf{M}_0)$ 的特征值与特征向量, 其中

$$\Lambda_0 = \text{diag}(\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0n}), \quad \mathbf{U}_0 = (\mathbf{u}_{01}, \mathbf{u}_{02}, \dots, \mathbf{u}_{0n});$$

2) 给定参数的微小变化量 $\Delta \alpha^{(s)}$, 其中 $s = 1, 2, \dots, L$, 计算刚度矩阵和质量矩阵的摄动灵敏度

$$\mathbf{K}_{,s} = \frac{\Delta \mathbf{K}(\alpha^{(s)})}{\Delta \alpha^{(s)}}, \quad \mathbf{M}_{,s} = \frac{\Delta \mathbf{M}(\alpha^{(s)})}{\Delta \alpha^{(s)}};$$

3) 对于 $s = 1, 2, \dots, L$, 计算特征向量的一阶摄动灵敏度

$$\mathbf{u}_{1i}^{(s)} = \mathbf{U}_0 \mathbf{b}_j^{(s)},$$

$$\mathbf{b}_j^{(s)} = \frac{1}{\lambda_{0i} - \lambda_{0j}} [\mathbf{u}_{0j}^T (\mathbf{K}_{,s} - \lambda_{0i} \mathbf{M}_{,s}) \mathbf{u}_{0i}], \quad j \neq i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\mathbf{b}_i^{(s)} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}_{0i}^T \mathbf{M}_{,s} \mathbf{u}_{0i}, \quad j = i;$$

4) 计算特征向量的一阶摄动量

$$\mathbf{u}_{1i} = [\mathbf{u}_{1i}^{(1)}, \mathbf{u}_{1i}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{1i}^{(L)}] \Delta \alpha = \mathbf{G}_{u_{1i}}^T \Delta \alpha;$$

- 5) 取 u_{1i} 的第 k 行元素 u_{1ik} , 有 $u_{1ik} = G_{u_{ik}}^T \Delta \alpha$;
 6) 根据公式(29)、(31)、(33)和(35)分别计算矩阵 h_1, h_2, h_3 和 h_4 ; 得

$$h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4;$$

- 7) 计算 λ_i 的二阶对称灵敏度矩阵

$$H_{\lambda_i} = h + h^T;$$

- 8) 计算 u_i 的二阶灵敏度

$$u_{2i} = U_0 C,$$

$$c_j = \Delta \alpha^T h^{(j)} \Delta \alpha,$$

当 $j = 1, 2, \dots, n$ 时计算

$$h_{sl}^{(j)} = \frac{1}{\lambda_{0i} - \lambda_{0j}} u_{0i}^T \left[(K_{,s} - \lambda_{0i} M_{,s}) u_{1i}^{(l)} - \lambda_{0i}^{(l)} (M_{0-} - M_{,s}) u_{0i} \right],$$

$$j \neq i, \quad s, l = 1, 2, \dots, L,$$

$$h_{sl}^{(j)} = -\frac{1}{2} u_{1i}^{(l)T} [M_{0+} + M_{,s}] u_{0i} - \frac{1}{2} u_{0i}^T M_{,s} u_{0i}, \quad j = i, \quad s, l = 1, 2, \dots, L;$$

- 9) 计算 u_{ik} 的二阶摄动灵敏度矩阵 $H_{u_{ik}}$

$$H_{u_{ik}} = u_{01k} h^{(1)} + u_{02k} h^{(2)} + \dots + u_{0nk} h^{(n)};$$

- 10) 将矩阵 $H_{u_{ik}}$ 对角化

$$H_{u_{ik}} = H_{u_{ik}} + H_{u_{ik}}^T;$$

- 11) 用下面两种方法计算特征值和特征向量的二阶近似值

方法 1 根据二阶 Taylor 展式, 可得

$$\lambda = \lambda_{0i} + G_{\lambda_i}^T \Delta \alpha + \frac{1}{2} \Delta \alpha^T H_{\lambda_i} \Delta \alpha + \dots,$$

$$u_{ik} = u_{0ik} + G_{u_{ik}}^T \Delta \alpha + \frac{1}{2} \Delta \alpha^T H_{u_{ik}} \Delta \alpha + \dots;$$

方法 2 根据二阶摄动展开法, 可得

$$\lambda = \lambda_{0i} + G_{\lambda_i}^T \Delta \alpha + \frac{1}{2} \Delta \alpha^T H_{\lambda_i} \Delta \alpha + \dots,$$

$$u_{ik} = u_{0ik} + G_{u_{ik}}^T \Delta \alpha + \frac{1}{2} \Delta \alpha^T H_{u_{ik}} \Delta \alpha + \dots$$

3 算 例

为了说明本文所提算法的有效性, 考虑当几个结构参数发生改变时, 简易汽车模型的频率和振型发生变化的问题。如图 1 所示, 该模型由 228 个梁单元、56 个板单元组成, 表 1 是模型梁单元的材料和几何参数, 图 2 是梁单元横截面形式。假设结构变化的参数是图 1 中梁 A、B 和 C 的截面厚度 t , 变化量 $\varepsilon = \Delta \alpha / \alpha$ 分别取 0.001, 0.005, 0.01 和 0.02。考察模型第一阶弯曲变形时特征值和特征向量的变化情况和结构的特征灵敏度矩阵。

表 1 梁 A、B 和 C 的材料及几何参数 (S 为面积)

梁	b / mm	h / mm	t / mm	S / mm^2
A	60	60	1.0	236
B	50	50	0.6	118
C	80	60	1.0	276

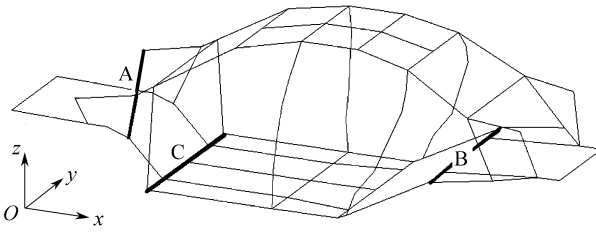


图 1 简易汽车模型

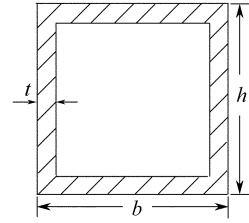


图 2 梁截面形状

根据上面介绍的方法 1 和方法 2 分别计算模型第一阶弯曲模态的特征灵敏度矩阵。从计算的结果可以看出, 当参数改变量 $\varepsilon = 0.001$ 时, 用这两种方法得到的特征灵敏度矩阵是几乎相等的。

$$G_{\lambda_7}(\alpha_0) \approx G_{\lambda_7} = \begin{bmatrix} 269.0509 \\ 3046.4160 \\ 187.8192 \end{bmatrix},$$

$$H_{\lambda_7}(\alpha_0) \approx H_{\lambda_7} = \begin{bmatrix} -4032.3287 & & & \text{对称} \\ -806.8662 & -2553.8234 & & \\ 114.7197 & 216.7541 & -1813.1660 & \end{bmatrix},$$

$$G_{u_{71}}(\alpha_0) \approx G_{u_{71}} = \begin{bmatrix} -3.5188 \\ -17.9240 \\ -5.3446 \end{bmatrix} \times 10^{-2},$$

$$H_{u_{71}}(\alpha_0) \approx H_{u_{71}} = \begin{bmatrix} -3.5928 & & & \text{对称} \\ -1.6345 & -6.6022 & & \\ -0.0388 & 0.0929 & 2.6595 & \end{bmatrix} \times 10^{-2}.$$

当 $\varepsilon = 0.005$ 时, 根据方法 2 计算出的特征灵敏度矩阵为

$$G_{\lambda_7} = \begin{bmatrix} 268.7317 \\ 3045.4316 \\ 187.6210 \end{bmatrix}, \quad H_{\lambda_7} = \begin{bmatrix} -4031.0080 & & & \text{对称} \\ -806.4164 & -2552.2985 & & \\ 114.6486 & 216.6034 & -1812.2300 & \end{bmatrix},$$

$$G_{u_{71}} = \begin{bmatrix} -3.5193 \\ -17.9188 \\ -5.3434 \end{bmatrix} \times 10^{-2}, \quad H_{u_{71}} = \begin{bmatrix} -3.5916 & & & \text{对称} \\ -1.6747 & -6.5983 & & \\ -0.0388 & 0.0928 & 2.6582 & \end{bmatrix} \times 10^{-2}.$$

当 $\varepsilon = 0.01$ 时, 根据方法 2 计算出的特征灵敏度矩阵为

$$G_{\lambda_7} = \begin{bmatrix} 267.9363 \\ 3044.3378 \\ 187.3707 \end{bmatrix}, \quad H_{\lambda_7} = \begin{bmatrix} -4028.6135 & & & \text{对称} \\ -805.8389 & -2550.6845 & & \\ 114.5604 & 216.4491 & -1811.4137 & \end{bmatrix},$$

$$G_{u_{71}} = \begin{bmatrix} -3.5210 \\ -17.9128 \\ -5.3424 \end{bmatrix} \times 10^{-2}, \quad H_{u_{71}} = \begin{bmatrix} -3.5892 & & & \text{对称} \\ -1.6324 & -6.5942 & & \\ -0.0387 & 0.0927 & 2.6571 & \end{bmatrix} \times 10^{-2}.$$

当 $\varepsilon = 0.02$ 时, 根据方法 2 计算出的特征灵敏度矩阵为

$$G_{\lambda_7} = \begin{bmatrix} 267.9363 \\ 3042.2180 \\ 187.3707 \end{bmatrix}, \quad H_{\lambda_7} = \begin{bmatrix} -4023.9293 & & & \text{对称} \\ -804.7123 & -2547.5575 & & \\ 114.3906 & 216.1576 & -1809.8136 & \end{bmatrix},$$

$$G_{u_{71}} = \begin{bmatrix} -3.524 & 2 \\ -17.901 & 1 \\ -5.340 & 3 \end{bmatrix} \times 10^{-2},$$

$$H_{u_{71}} = \begin{bmatrix} -3.584 & 5 & & & & & \text{对称} \\ -1.630 & 1 & -6.586 & 3 & & & \\ -0.038 & 6 & 0.092 & 5 & 2.654 & 9 & \end{bmatrix} \times 10^{-2}.$$

表2和表3分别是用上述两种方法计算出的模型第一阶弯曲模态的特征值 λ_7 和特征向量第一阶分量 u_{71} 的一阶、二阶近似值和精确值的比较。从计算结果可以看出,当结构参数改变量 ε 在 0.005 到 0.02 之间时,采用第2种方法可以得到较高的计算精度。在表2和表3中, P 为精确解, F_1 为一阶近似解, F_2 为二阶近似解, e_1 为一阶解误差, e_2 为二阶解误差。

表2 两种方法计算出的汽车模型特征值 λ_7 和精确值的比较

	ε	P	F_1	F_2	$e_1/\%$	$e_2/\%$
I	0.001	$5.652\ 852 \times 10^4$	$5.652\ 853 \times 10^4$	$5.652\ 852 \times 10^4$	0.082×10^{-4}	0.000×10^{-4}
	0.005	$5.654\ 241 \times 10^4$	$5.654\ 254 \times 10^4$	$5.654\ 242 \times 10^4$	2.194×10^{-4}	0.127×10^{-4}
	0.010	$5.655\ 956 \times 10^4$	$5.656\ 006 \times 10^4$	$5.655\ 959 \times 10^4$	8.884×10^{-4}	0.580×10^{-4}
	0.020	$5.659\ 309 \times 10^4$	$5.659\ 509 \times 10^4$	$5.659\ 322 \times 10^4$	35.240×10^{-4}	2.198×10^{-4}
II	0.001	$5.652\ 852 \times 10^4$	$5.652\ 853 \times 10^4$	$5.652\ 852 \times 10^4$	0.082×10^{-4}	0.000×10^{-4}
	0.005	$5.654\ 241 \times 10^4$	$5.654\ 253 \times 10^4$	$5.654\ 241 \times 10^4$	2.058×10^{-4}	0.007×10^{-4}
	0.010	$5.655\ 956 \times 10^4$	$5.656\ 002 \times 10^4$	$5.655\ 908 \times 10^4$	8.197×10^{-4}	0.059×10^{-4}
	0.020	$5.659\ 309 \times 10^4$	$5.659\ 493 \times 10^4$	$5.659\ 307 \times 10^4$	32.520×10^{-4}	0.429×10^{-4}

表3 两种方法计算出的汽车模型特征向量第一阶分量 u_{71} 和精确值的比较

	ε	P	F_1	F_2	$e_1/\%$	$e_2/\%$
I	0.001	$1.138\ 066 \times 10^4$	$1.137\ 976 \times 10^4$	$1.138\ 066 \times 10^4$	0.093×10^{-4}	0.046×10^{-4}
	0.005	$1.138\ 426 \times 10^4$	$1.138\ 429 \times 10^4$	$1.138\ 427 \times 10^4$	2.550×10^{-4}	1.376×10^{-4}
	0.010	$1.138\ 870 \times 10^4$	$1.138\ 882 \times 10^4$	$1.138\ 876 \times 10^4$	10.327×10^{-4}	5.631×10^{-4}
	0.020	$1.139\ 741 \times 10^4$	$1.139\ 788 \times 10^4$	$1.139\ 766 \times 10^4$	41.203×10^{-4}	22.433×10^{-4}
II	0.001	$1.138\ 066 \times 10^4$	$1.138\ 066 \times 10^4$	$1.138\ 066 \times 10^4$	0.093×10^{-4}	0.000×10^{-4}
	0.005	$1.138\ 426 \times 10^4$	$1.138\ 428 \times 10^4$	$1.138\ 426 \times 10^4$	2.330×10^{-4}	0.008×10^{-4}
	0.010	$1.138\ 870 \times 10^4$	$1.138\ 881 \times 10^4$	$1.138\ 870 \times 10^4$	9.314×10^{-4}	0.066×10^{-4}
	0.020	$1.139\ 741 \times 10^4$	$1.139\ 783 \times 10^4$	$1.139\ 740 \times 10^4$	36.915×10^{-4}	0.526×10^{-4}

4 结 论

本文提供了一种计算多参数结构特征值和特征向量二阶灵敏度的有效算法。通过将灵敏度矩阵转化为摄动灵敏度矩阵,得到了特征解二阶灵敏度矩阵的有效近似 H_{λ_i} 和 H_{u_i} , 并给出计算特征解二阶近似值的简便方法。本方法的优点是:避免了繁冗的求导计算,求解步骤直接、明确,便于在现有的有限元程序中实现。数值例子说明本文所提方法具有良好的计算精度和可靠性。

[参 考 文 献]

- [1] Fox R L, Kapoor M P. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors[J]. AIAA Journal, 1968, 6

- (12): 2426– 2429.
- [2] Nelson R B. Simplified calculations of eigenvector derivative[J]. *AIAA Journal*, 1976, **14**(9): 1201– 1205.
- [3] Juang J N, Ghaemmaghami P, Lim K B. Eigenvalue and eigenvector derivatives of a nondefective matrix[J]. *Journal of Guidance, Control Dynamics*, 1989, **12**(4): 480– 486.
- [4] Lee I W, Jung G H. An efficient algebraic method for computation of natural frequency and mode shape sensitivities —part I distinct natural frequencies[J]. *Computers and Structures*, 1997, **62**(3): 429– 435.
- [5] Lee I W, Jung G H. An efficient algebraic method for computation of natural frequency and mode shape sensitivities —part II multiple natural frequencies[J]. *Computers and Structures*, 1997, **62**(3): 437– 443.
- [6] Lim K B, Junkins J L. Re-examination of eigenvector derivative[J]. *Journal of Guidance*, 1987, **10**(6): 581– 587.
- [7] Liu Z S, Chen S H, Zhao Y Q. An accurate method for computing eigenvector derivatives for free-free structures[J]. *Computers and Structures*, 1994, **52**(6): 1135– 1143.
- [8] Moon Y J, Kim B W, Ko M G, et al. Modified modal methods for calculating eigenpair sensitivity of asymmetric damped system[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, **60**(11): 1847– 1860.
- [9] Gong Y L, Xu L. Sensitivity analysis of steel moment frame accounting for geometric and material nonlinearity[J]. *Computers and Structures*, 2006, **84**(7): 462– 475.
- [10] Maddulapalli A K, Azam S, Boyars A. Sensitivity analysis for product design selection with an implicit value function[J]. *European Journal of Operation Research*, 2007, **180**(3): 1245– 1259.
- [11] Choi K M, Jo H K, Kim W H, et al. Sensitivity analysis of non-conservative eigensystems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, **274**(3/5): 997– 1011.
- [12] Chen S H. *Matrix Perturbation Theory in Structural Dynamic Design* [M]. Beijing: Science Press, 2007.
- [13] Liu X L. Accurate modal perturbation in non-self-adjoint eigenvalue problem[J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2001, **17**(10): 715– 725.
- [14] Godoy A, Taroco E O, Feijoo R A. Second-order sensitivity analysis in vibration and buckling problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, **37**(23): 3999– 4014.
- [15] Mirzaeifar R, Bahai H, Aryana F, et al. Optimization of the dynamic characteristics of composite plates using an inverse approach[J]. *Journal of Composite Materials*, 2007, **41**(26): 3091– 3108.
- [16] Mirzaeifar R, Bahai H, Shahab S. Active control of natural frequencies of FGM plates by piezoelectric sensor/actuator pairs[J]. *Smart Materials and Structures*, 2008, **17**(4), 045003. doi: 10.1088/0964-1726/17/4/045003.
- [17] Mirzaeifar R, Bahai H, Shahab S. A new method for finding the first- and second-order eigen-derivatives of asymmetric non-conservative systems with application to an FGM plate actively controlled by piezoelectric sensor/actuators[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, **75**(12): 1492– 1510.
- [18] Aryana F, Bahai H. Sensitivity analysis and modification of structural dynamic characteristics using second order approximation[J]. *Engineering Structures*, 2003, **25**(10): 1279– 1287.
- [19] Bahai H, Farahani K, Djoudi M S. Eigenvalue inverse formulation for optimizing vibratory behavior of truss and continuous structures[J]. *Computers and Structures*, 2002, **80**(27/30): 2397– 2403.
- [20] Farahani K, Bahai H. An inverse strategy for relocation of eigenfrequencies in structural design—part

- II second order approximate solutions[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, **274**(3/5): 507–528.
- [21] Choi K M, Cho S W, Ko M G, et al. Higher order eigensensitivity analysis of damped systems with repeated eigenvalues[J]. *Computers and Structures*, 2004, **82**(1): 63– 69.
- [22] Guedria N, Chouchane M, Smaoui H. Second- order eigensensitivity analysis of asymmetric damped systems using Nelson's method[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **300**(3/5): 974– 992.

Second- Order Sensitivity of Eigenpairs of Multiple Parameter Structures

CHEN Su- huan¹, GUO Rui², MENG Guang- wei¹

(1. College of Mechanical Science and Engineering, Nanling Campus, Jilin University, Changchun 130025, P. R. China;

2. State Key Laboratory of Automobile Dynamic Simulation, Nanling Campus, Jilin University, Changchun 130025, P. R. China)

Abstract: A method for computing the second- order sensitivity matrix of eigenvalues and eigenvectors of the multiple parameter structures, i. e. the Hessian matrix, was presented. The second- order perturbations of eigenvalues and eigenvectors were transformed into the multiple parameter forms, and the second- order perturbation sensitivity matrices of eigenvalues and eigenvectors were developed. Using these formulations, the efficient methods based on the second- order Taylor expansion and second- order perturbation were obtained to estimate the changes of eigenvalues and eigenvectors when design parameters changed. The method avoided direct differential operation thus reducing the difficulty for computing the second- order sensitivity matrices of eigenpairs. A numerical example was given to demonstrate the application and the accuracy of the proposed methods.

Key words: multiple parameter structures; second- order sensitivity of eigenpairs; efficient computational method