

在重力作用下的上覆无限热弹性流体对 广义热弹性固体转动的影响*

P·艾拉瓦利亚¹, N·S·纳拉²

(1. 莫哈里虚玛坎德斯瓦大学 M M 工程学院 数学系, 哈里亚纳邦, 印度;

2. D A V 学院 数学系, 安巴拉市, 哈里亚纳邦, 印度)

(沈亚鹏推荐)

摘要: 计及上覆无限热弹性流体的重力作用, 沿界面有不同的外力作用时, 研究广义热弹性固体的旋转变形问题. 在 Laplace 和 Fourier 域内, 通过积分变换, 得到了位移、应力及温度分布的表达式. 然后在物理域内, 应用数值逆变换方法, 得到这些分量的值, 并讨论了该问题的一些特例. 结果以图形方式给出, 显示了介质的旋转以及重力作用的影响.

关键词: 旋转; 重力; 广义热弹性; 热弹性流体; Laplace 变换; Fourier 变换; 温度分布

中图分类号: O343.6 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.12.003

符号说明

λ^*, μ	Lam 常数	ρ^*	密度
\mathbf{u}^*	位移矢量	t_{ij}^*	应力分量
τ_0, θ_0	热弛豫时间	$\nu^* = (3\lambda^* + 2\mu) \alpha_t^*$	线性热膨胀系数
$e = \text{div} \mathbf{u}$	膨胀系数	g	重力加速度
K^*	热传导系数	C_E^*	比热容
T^*	温度分布	T_0^*	参照温度

引 言

传统的热弹性体的耦合动力学理论, 是以 Fourier 的热传导定理为基础的抛物型热传导方程, 造成了热传播速度无限的固有矛盾. 为了消除这一固有矛盾, 创立和发展起广义热弹性理论. 新理论认为热传播速度是有限的, 因为刚性导体的传热方程是双曲型微分方程, 所以被归结为双曲型的热弹性理论^[1].

* 收稿日期: 2009- 04- 24; 修订日期: 2009- 08- 24

作者简介: P. Ailawalia (联系人, E-mail: praveen_2117@rediffmail.com);

N. S. Narah (E-mail: naibsinghnehra@yahoo.co.in).

本文原文为英文, 黄锋译, 张禄坤校.

有两种广义热弹性理论。第1种理论是由 Lord 和 Shulman^[2] 提出,第2种为大家所熟知的理论是,带有2个弛豫时间参数的耦合热弹性理论,或者是依赖于温度变化率的热弹性理论。Müller^[3] 在热弹性固体的热力学综述中,提出了熵产生不等式,借助于该不等式,本构方程一级就受到限制。该不等式的一般形式由 Green 和 Laws^[4] 提出。Green 和 Lindsay^[5] (G-L) 得到了另一种形式的本构方程。Suhubi^[6] 独立地、更为明晰地给出了这些方程。该理论包含了2个担当弛豫时间的常数,它们不仅修正了热方程,而且还修正了耦合理论的全部方程。如果在考虑中的介质有一个对称中心,则经典的 Fourier 定理无法满足。没有能量耗散的热弹性理论是另一个广义理论,由 Green 和 Naghdi^[7] 建立。在其独立的基本变量当中,包括了热-位移梯度;与早前各个理论不同的是,它并不包含有热能的耗散。

Barber 和 Martin-Moran^[8] 讨论了半平面瞬时热弹性接触问题的 Green 函数。Barber^[9] 研究了半平面表面上移动热源产生的热弹性位移和应力。Sherief^[10] 得到了热弹性介质中由连续热源引起的应力分量和温度分布。Dhaliwal 等人^[11] 研究了均匀各向同性无边界固体中,由连续线性热源引起的热弹性相互作用。Chandrasekharaiah 和 Srinath^[12] 研究了均匀各向同性无边界固体中,由连续点热源引起的热弹性相互作用。Sharma 等人^[13] 研究了均匀各向同性热弹性半空间中,由时谐变化的法向点荷载引起的扰动。Sharma 和 Chauhan^[14] 讨论了广义热弹性半空间中的受力和热源。Sharma 等人^[15] 研究了在无限半空间上均匀热弹性层上表面,无限长时间内,荷载以恒定速度移动时的稳态响应。最近,Deswal 和 Choudhary^[16] 在带耗散的广义热弹性固体中,研究了由移动荷载产生的二维问题。

过去,许多研究人员研究了转动介质的不同问题。Chand 等人^[17] 提出了以匀速转动时的均匀各向同性、传热、导电弹性半空间中的变形、应力、磁场分布的研究。许多作者^[18-20] 研究了旋转对弹性波的影响。Roychoudhuri 和 Mukhopadhyay^[21] 研究了旋转和弛豫时间对广义热粘弹性平面波的影响。Ting^[22] 研究了转动的各向异性弹性半空间中的界面波。最近,Sharma 等人^[23-26] 讨论了转动对不同类型波在热弹性介质中传播的影响。Othman 和 Song^[27] 研究了在磁热弹性介质中转动的影响。

在经典的弹性理论中,通常忽略了重力的影响。Bromwich^[28] 最先研究了波在固体中,特别是在弹性球体中,重力对传播的影响。随后,Love^[29] 也研究了重力的影响,当重力场中波长较大时, Rayleigh 波的速度增大到有意义的程度。De 和 Sengupta^[30-32] 研究了重力对表面波的影响,以及在弹性层和平面 Lamb 问题中波的传播的影响。Sengupta 和 Acharya^[33] 研究了重力对波在热弹性层中传播的影响。Das 等人^[34] 在非均匀弹性固体介质中,研究了重力对表面波的影响。Abd-Alla 和 Ahmed^[35] 研究了在重力场和初应力作用下正交各向异性热弹性介质中的 Rayleigh 波,并讨论了有重力作用时,波在非均匀正交各向异性弹性介质中传播问题^[36]。

在本研究中,上面覆盖的旋转热弹性流体受到重力的作用,沿界面受到不同的外力作用时,应用 Laplace 和 Fourier 转换,得到转动的广义热弹性介质的位移、应力及温度分布的表达式。在许多动力系统中,这类旋转介质问题十分重要。本文还就一些特例进行了研究。着重研究了重力作用下广义热弹性介质中旋转的影响。

1 问题的提出与求解

考虑一个均匀广义热弹性半空间(介质 I),并在其上覆有热弹性流体半空间(介质 II)。

介质 I 和介质 II 以匀角速度 $\Omega^* = \Omega^* \hat{n}$ 旋转, 其中 \hat{n} 为单位矢量, 表示转动轴方向. 考虑到所有的变量都是时间 t 和坐标 x 和 z 的函数. 转动系统中运动的位移方程有 2 个附加项^[18], 向心加速度 $\Omega^* \times (\Omega^* \times u^*)$ 仅随时间而变化, 且为 $2\Omega^* \times u^*$, 其中 $u^* = (u_1^*, 0, u_3^*)$ 为动位移矢量, 角速度为 $\Omega^* = (0, \Omega_2^*, 0)$. 这些附加项在非旋转介质中是不存在的.

考虑在重力作用下的广义热弹性半空间(介质 I)/热弹性流体(介质 II)界面上的法向力. 考虑到直角坐标系 (x, y, z) 位于 $z = 0$ 的初始平面上, z 轴垂直指向介质 I.

对于二维问题(xz - 平面), 全部变量都是坐标 x, z 和时间 t 的函数. 当不计体力和热源作用时, 在重力作用下的旋转的广义线性热弹性场方程及其本构关系给出如下:

$$\frac{\partial t_{11}^*}{\partial x} + \frac{\partial t_{13}^*}{\partial z} + \rho^* g \frac{\partial u_3^*}{\partial x} = \rho^* \left[\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial t^2} - \Omega_2^{*2} u_1^* + 2\Omega_2^* \frac{\partial u_3^*}{\partial t} \right], \quad (1)$$

$$\frac{\partial t_{31}^*}{\partial x} + \frac{\partial t_{33}^*}{\partial z} - \rho^* g \frac{\partial u_1^*}{\partial x} = \rho^* \left[\frac{\partial^2 u_3^*}{\partial t^2} - \Omega_2^{*2} u_3^* - 2\Omega_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \right], \quad (2)$$

$$K^* \left[n' + t_1 \frac{\partial}{\partial t} \right] \dots T^* = \rho^* C_E^* \left[n_1 \frac{\partial}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] T^* + \nu^* T_0 \left[n_1 \frac{\partial}{\partial t} + n_0 \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] (\dots u^*), \quad (3)$$

$$t_{11}^* = \lambda^* \left[\frac{\partial u_1^*}{\partial x} + \frac{\partial u_3^*}{\partial z} \right] + 2\mu \frac{\partial u_1^*}{\partial x} - \nu^* \left[1 + \vartheta_0 \frac{\partial}{\partial t} \right] T^*, \quad (4)$$

$$t_{13}^* = \mu \left[\frac{\partial u_1^*}{\partial z} + \frac{\partial u_3^*}{\partial x} \right], \quad (5)$$

$$t_{33}^* = \lambda^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x} + (\lambda^* + 2\mu) \frac{\partial u_3^*}{\partial z} - \nu^* \left[1 + \vartheta_0 \frac{\partial}{\partial t} \right] T^*. \quad (6)$$

将方程(4)~(6)代入方程(1)~(2), 得到

$$\begin{aligned} & (\lambda^* + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial z^2} + (\lambda^* + \mu) \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x \partial z} + \\ & \rho^* g \frac{\partial u_3^*}{\partial x} - \nu^* \left[1 + \vartheta_0 \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial T^*}{\partial x} = \\ & \rho^* \left[\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial t^2} - \Omega_2^{*2} u_1^* + 2\Omega_2^* \frac{\partial u_3^*}{\partial t} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x^2} + (\lambda^* + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial z^2} + (\lambda^* + \mu) \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x \partial z} - \\ & \rho^* g \frac{\partial u_1^*}{\partial x} - \nu^* \left[1 + \vartheta_0 \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial T^*}{\partial z} = \\ & \rho^* \left[\frac{\partial^2 u_3^*}{\partial t^2} - \Omega_2^{*2} u_3^* - 2\Omega_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

初始条件为

$$u_i^*(x, z, 0) = \dot{u}_i^*(x, z, 0) = T^*(x, z, 0) = 0$$

为了数值计算方便, 引入无量纲变量

$$\begin{cases} x' = \frac{\omega}{c_0} x, \quad z' = \frac{\omega}{c_0} z, \quad u_m^* = \frac{\rho^* c_0 \omega}{\nu T_0} u_m, \quad t' = \omega t, \quad \tau'_0 = \omega \tau_0, \quad \vartheta'_0 = \omega \vartheta_0, \\ T^{*'} = \frac{T^*}{T_0}, \quad t_j^{*'} = \frac{t_j^*}{\nu^* T_0}, \quad \Omega_2^{*'} = \frac{\Omega_2^*}{\omega}, \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$\omega = \frac{\rho^* C_E c_0^2}{K^*}, \quad c_0^2 = \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho^*}.$$

方程(3)、(7)、(8)就是无量纲形式的运动方程。在这里,上角标符号*为s时表示固体(介质I),为f时表示流体(介质II),定义位移势 q 和 ϕ ,它们与位移分量 u_1^s 和 u_3^s (介质I)有着如下关系:

$$u_1^s = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad u_3^s = \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (10)$$

对如上的无量纲结果方程,应用由式(11)~(12)定义的Laplace和Fourier转换,

$$f(x, z, p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(x, z, t) dt, \quad (11)$$

$$f(\xi, z, p) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\xi x} f(x, z, p) dx, \quad (12)$$

得到

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 + \Omega_2^2 - p^2 \right] q - \left[2\Omega_2^2 p + \frac{i\xi g}{c_0 \omega} \right] \phi - (1 + \delta_0 p) T^s = 0, \quad (13)$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 + a_1 \Omega_2^2 - a_1 p^2 \right] \phi - \left[2\Omega_2^2 a_1 p + \frac{i\xi g \rho^s c_0}{\mu \omega} \right] q = 0, \quad (14)$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 - p \left(\frac{n_1 + \tau_0 p}{n + t_1 p} \right) \right] T^s - \frac{n_1 + \tau_0 n_0 p}{n + t_1 p} \left[\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right] q = 0. \quad (15)$$

从方程(13)~(15)中消去 ϕ 和 T^s ,得到

$$[\dots^6 - A \dots^4 + B \dots^2 - C] q = 0, \quad (16)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} \dots &= \frac{d}{dz}, \quad a_1 = \frac{\rho^s c_0^2}{\mu}, \quad \epsilon^s = \frac{\nu^s T_0}{\rho^s K^s \omega}, \quad e_1 = \xi^2 + p \left[\frac{n_1 + \tau_0 p}{n + t_1 p} \right], \\ e_2 &= \xi^2 - \Omega_2^2 + p^2, \quad e_3 = \epsilon^s p (1 + \delta_0 p) \left[\frac{n_1 + \tau_0 n_0 p}{n + t_1 p} \right], \\ e_4 &= \xi^2 + a_1 \Omega_2^2 - a_1 p^2, \\ A &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \\ B &= e_4(e_1 + e_2 + e_3) + e_1 e_2 + e_3 \xi^2 + 4a_1 \Omega_2^2 p^2 - \frac{g^2 \xi^2 \rho^s}{\mu \omega^2} + \frac{4\Omega_2^2 i \xi g \rho^s p g c_0}{\mu \omega}, \\ C &= e_4(e_1 e_2 + e_3 \xi^2) + e_1 \left[4a_1 \Omega_2^2 p^2 - \frac{g^2 \xi^2 \rho^s}{\mu \omega^2} + \frac{4\Omega_2^2 i \xi g \rho^s p g c_0}{\mu \omega} \right]. \end{aligned} \right. \quad (17)$$

方程(16)的解应满足辐射条件,即 $z \rightarrow \infty$ 时, $q, \phi, T^s \rightarrow 0$,于是

$$q = D_1 e^{-q_1 z} + D_2 e^{-q_2 z} + D_3 e^{-q_3 z}, \quad (18)$$

$$\phi = a_1^* D_1 e^{-q_1 z} + a_2^* D_2 e^{-q_2 z} + a_3^* D_3 e^{-q_3 z}, \quad (19)$$

$$T^s = b_1^* D_1 e^{-q_1 z} + b_2^* D_2 e^{-q_2 z} + b_3^* D_3 e^{-q_3 z}, \quad (20)$$

其中 q_m^2 为方程(13)的根, a_m^*, b_m^* 分别为下式定义的耦合常数:

$$a_m^* = \frac{q_m^4 - (e_1 + e_2 + e_3) q_m^2 + (e_1 e_2 + e_3 \xi^2)}{[2\Omega_2^2 p + i\xi g / (c_0 \omega)] (q_m^2 - e_1)}, \quad (21)$$

$$b_m^* = \epsilon^s p \left[\frac{n_1 + \tau_0 n_0 p}{n + t_1 p} \right] \left[\frac{q_m^2 - \xi^2}{q_m^2 - e_1} \right], \quad m = 1, 2, 3. \quad (22)$$

类似地, 设方程(1)~(6)的 $\mu = g = 0$, 得到介质 II 中的解

1.1 边界条件

界面 $z = 0$ 的边界条件为

$$t_{33}^s = t_{33}^f - F(x, t), \quad t_{31}^s = 0, \quad u_1^s = u_1^f, \quad u_3^s = u_3^f, \quad K^s \frac{\partial T^s}{\partial z} = K^f \frac{\partial T^f}{\partial z} \quad (23)$$

将式(4)~(6)、(9)、(10)代入边界条件(23), 得到无量纲形式的边界条件。抑制一级项, 对无量纲形式的边界条件, 应用由式(11)~(12)定义的 Laplace 和 Fourier 转换, 并利用式(18)~(20), 得到的变换域中的边界条件及在重力作用下旋转的广义热弹性介质的位移、应力和温度分布在变换域中的数学表达式:

$$u_1^s = \left(\sum_{m=1}^3 b_m \Delta_m e^{-q_m z} \right) \setminus \Delta \quad (24)$$

$$u_3^s = \left(\sum_{m=1}^3 l_m \Delta_m e^{-q_m z} \right) \setminus \Delta \quad (25)$$

$$t_{31}^s = \left(\sum_{m=1}^3 s_m \Delta_m e^{-q_m z} \right) \setminus \Delta \quad (26)$$

$$t_{33}^s = \left(\sum_{m=1}^3 r_m \Delta_m e^{-q_m z} \right) \setminus \Delta \quad (27)$$

$$T^s = \left(\sum_{m=1}^3 k_m \Delta_m e^{-q_m z} \right) \setminus \Delta \quad (28)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} &\Delta = - [f_1 d_1 + f_2 d_2 + f_3 d_3 + f_4 d_4 + f_5 d_5 + f_6 d_6], \\ &\Delta_1 = F(\xi, p) [s_3 h_1 - s_2 h_2], \quad \Delta_2 = F(\xi, p) [s_1 h_2 - s_3 h_3], \\ &\Delta_3 = F(\xi, p) [s_2 h_3 - s_1 h_1], \quad s_m = \frac{\mu}{\rho^s c_0^2} \left\{ 2i \xi q_m - (q_m^2 + \xi^2) a_m^* \right\}, \\ &r_m = q_m^2 - \frac{\lambda \xi^2}{\rho^f c_0^2} + \frac{2i \nu \xi a_m^* q_m}{\rho^f c_0^2} - (1 + \nu_0 p) b_m^*, \quad b_m = a_m^* q_m - i \xi \\ &l_m = - (a_m^* i \xi + q_m), \quad k_m = - q_m b_m^* K^s, \quad k_{4,5} = q_{4,5} a_{4,5}^* K^f, \\ &r_{4,5} = \frac{\lambda^f q_{4,5}^2}{\rho^f c_0^2} - \frac{\lambda^f \xi^2}{\rho^f c_0^2} - (1 + \nu_0 p) a_{4,5}^*, \quad a_{4,5}^* = \left(\frac{q_{4,5}^2 - e_2^f}{1 + \nu_0 p} \right) \frac{\lambda^f}{\rho^f c_0^2}, \\ &q_{4,5}^2 = \frac{A^* \pm \sqrt{A^{*2} - 4B^*}}{2}, \quad A^* = e_1 + e_2^* + e_3^*, \quad B^* = e_1 e_2^* + e_3^* \xi^2, \\ &e_2^* = \xi^2 - \frac{\rho^f c_0^{f2} \Omega_2^2}{\lambda^f} - \frac{\rho^f c_0^{f2} p^2}{\lambda^f}, \quad e_3^* = \frac{\epsilon^f p \rho^f c_0^{f2}}{\lambda^f} (1 + \nu_0 p) \left(\frac{n_1 + n_0 \tau_0 p}{n^* + t_1 p} \right), \\ &f_1 = q_4 k_5 - k_4 q_5, \quad f_2 = i \xi (k_4 - k_5), \quad f_3 = i \xi (q_4 - q_5), \quad f_4 = r_4 k_5 - k_4 r_5, \\ &f_5 = r_4 q_5 - q_4 r_5, \quad f_6 = i \xi (r_5 - r_4), \quad g_1 = s_1 r_2 - r_1 s_2, \quad g_2 = s_1 b_2 - b_1 s_2, \\ &g_3 = s_1 l_2 - l_1 s_2, \quad g_4 = s_1 k_2 - k_1 s_2, \quad g_5 = r_1 b_2 - b_1 r_2, \quad g_6 = r_1 l_2 - l_1 r_2, \\ &g_7 = r_1 k_2 - k_1 r_2, \quad g_8 = b_1 l_2 - l_1 b_2, \quad g_9 = b_1 k_2 - k_1 b_2, \quad g_{10} = l_1 k_2 - k_1 l_2, \\ &d_1 = b_3 g_1 - r_3 g_2 + s_3 g_5, \quad d_2 = r_3 g_3 - l_3 g_1 - s_3 g_6, \\ &d_3 = k_3 g_1 - r_3 g_4 + s_3 g_7, \quad d_4 = l_3 g_2 - b_3 g_3 + s_3 g_8, \\ &d_5 = k_3 g_2 + b_3 g_4 - s_3 g_9, \quad d_6 = k_3 g_3 - l_3 g_4 + s_3 g_{10}, \\ &h_1 = b_2 f_1 - l_2 f_2 + k_2 f_3, \quad h_2 = b_3 f_1 - l_3 f_2 + k_3 f_3, \quad h_3 = b_1 f_1 - l_1 f_2 + k_1 f_3 \end{aligned} \right. \quad (29)$$

特例

i) 不计介质 I 的角速度(即 $\Omega_2^s = 0$), 可以得到重力作用下, 非旋转广义热弹性介质的位移、应力和温度分布, 在变换域中的分量表达式•

ii) 不计介质 I 的重力作用(即 $g = 0$), 可以得到旋转热弹性介质的位移、应力和温度分布的表达式•

iii) 不计介质 II 的角速度(即 $\Omega_2^f = 0$), 可以得到重力作用下非旋转广义热弹性介质的位移、应力和温度分布, 在变换域中的表达式•

iv) 两种介质的角速度及重力作用都不计(即 $\Omega_2^s = \Omega_2^f = g = 0$), 可以得到非旋转热弹性介质的位移、应力和温度分布的表达式•

1.2 热弹性理论的特例

i) 当式(30)成立时, 可以得到旋转介质的耦合的热弹性理论(C- T 理论)•

$$n' = n_1 = 1, t_1 = \tau_0 = \vartheta_0 = 0 \quad (30)$$

ii) 当式(31)成立时, 得到 Lord- Shulman 热弹性理论(L- S 理论)•

$$n' = n_1 = n_0 = 1, t_1 = \vartheta_0 = 0, \tau_0 > 0 \quad (31)$$

iii) 当式(32)成立时, 得到 Green- Lindsay 热弹性理论(G- L 理论)•

$$n' = n_1 = 1, n_0 = 0, t_1 = 0, \vartheta_0 \geq \tau_0 > 0, \quad (32)$$

其中 ϑ_0, τ_0 为两个弛豫时间•

iv) 当式(33)成立时, 得到旋转介质、无能量耗散时的广义热弹性理论(线性化的 II 型 GN 理论)•

$$n' > 0, n_1 = 0, n_0 = 1, t_1 = \vartheta_0 = 0, \tau_0 = 1 \quad (33)$$

方程(7)和(8)不变, 方程(3)改用以下形式

$$K^* \cdot \cdot^2 T^* = \rho^* C_E^* \frac{\partial^2 T^*}{\partial t^2} + \nu^* \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}, \quad (34)$$

其中 n' 为有(1/s)量纲的常数, $n'k' = K^* = C_E^*(\lambda + 2\mu)/4$ 为该理论的特征常数, 对介质 I, $* = s$, 对介质 II, $* = f$ •

1.3 逆转换

转换后的位移和应力是 z 的函数, 是 Laplace 和 Fourier 转换参数 p 和 ξ 的函数, 形式为 $f(\xi, z, p)$ • 为了得到该函数在物理域内的表达式, 应用 Sharma 和 Kumar^[39] 的方法, 先进行逆 Fourier 转换, 然后进行 Laplace 转换•

2 外力类型

这里, 考虑 4 种类型的外力, 即集中力、连续力、分布力和移动荷载• 对于集中力, 有

$$F(x, t) = \delta(x) \delta(t), F(\xi, p) = 1 \quad (35)$$

对于沿界面作用的连续力, 有

$$F(x, t) = \delta(x) H(t), F(\xi, p) = \frac{1}{p} \quad (36)$$

分布力有 2 种, 即均布力和线性分布力• 对于作用在法向的均布力(见方程(23)), 有

$$F(x, t) = \phi(x) \delta(t), F(\xi, p) = \phi(\xi), \quad (37)$$

其中

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

对于作用在坐标原点 ($x = z = 0$)、宽度为 $2a$ 的均布条状的单位荷载, 关于 (x, ξ) 变量对的 Fourier 转换为

$$\phi(\xi) = 2\sin(\xi a)/\xi \quad \xi \neq 0 \quad (38)$$

对于作用在法向的线性分布力(见方程(23)), 有

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a}, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad (39)$$

$\phi(x)$ 的 Fourier 转换为

$$\phi(\xi) = 2[1 - \cos(\xi a)]/(\xi^2 a). \quad (40)$$

正如方程(24) ~ (28)一样, 通过将 $\phi(\xi)$ 替换为 $2\sin(\xi a)/\xi$ 和 $2[1 - \cos(\xi a)]/(\xi^2 a)$, 式(29)在法向作用均布力和线性分布力时, 得到位移、应力和温度分布的表达式·

当荷载沿 $x -$ 轴以匀速度 U 在界面 $z = 0$ 移动时, 有

$$F(x, t) = H(t) \delta(x - Ut),$$

因此

$$F(\xi, p) = \frac{1}{p - i\xi U}. \quad (41)$$

3 数值结果及讨论

以举例说明为目的, 介绍早期的分析过程, 现给出一个数值结果的算例· 这些结果描述了本文 L-S 理论中的温度、位移、应力场的变化情况· 为了这个目的, 采用铜作为热弹性材料, 其物理常数值为^[37]

$$\begin{aligned} \mu &= 3.86 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad \lambda^s = 7.76 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad C_E^s = 3.8108 \times 10^2 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}, \\ \rho^s &= 8.954 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad K^s = 3.8609 \times 10^{10} \text{ W/(m} \cdot \text{K)}, \quad \alpha_t^s = 0.0178 \times 10^{-3} \text{ /K}, \end{aligned}$$

热弹性流体的物理常数值为^[38]

$$\begin{aligned} \lambda^f &= 0.2074 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad \alpha_t^f = 0.069 \times 10^{-3} \text{ /K}, \quad K^f = 6.0290 \times 10^8 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}, \\ \rho^f &= 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad C_E^f = 4.1868 \times 10^3 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}, \end{aligned}$$

在 $z = 1$ 面上, $U < c_0$ 时, 选取 $\Omega_2^s = 0.5$, $\Omega_2^f = 0.25$ 进行数值计算, 法向位移 u_3^s 、法向应力 t_{33}^s 和温度分布 T^s 如图 1~ 图 12 所示, 其中

- 实线表示重力作用下旋转广义热弹性固体(TESRG);
- 虚线表示重力作用下非旋转广义热弹性固体(TESWG);
- 带星号实线表示没有重力作用时的旋转广义热弹性固体(TESR);
- 带星号虚线表示没有重力作用时的非旋转广义热弹性固体 ($\Omega_2^s = \Omega_2^f = g = 0$) (TES)· 应用带一个弛豫时间参数的广义理论(L-S 理论, $\tau_0 = 0.03$), 得到数值解及其图形结果·

集中力作用下的法向位移 u_3 、法向应力 t_{33} 和温度分布 T 的变化情况如图 1~ 图 3 所示· 重力作用下(旋转和非旋转的)热弹性介质的法向位移值在很小的范围内变化, 这变化实际上是相反的· 对 $0 \leq x \leq 1.8$ 区域中的旋转和非旋转介质来说, 其变化幅度较大, 而在其余区域, 这实际上是一些震荡的变化· 法向位移的这些变化在图 1 中给出· 从图 2 中可以发现, 有重

力作用时热弹性介质法向应力的震荡,实际上要比无重力作用时要小. 与法向位移的变化类似,有重力作用时的广义热弹性介质的温度分布值在很小的范围内变化. 介质无重力作用(旋转和非旋转)时,它们的变化也非常类似,实际上仅仅是大小有所差别而已. 温度分布的变化情况在图 3 中给出.

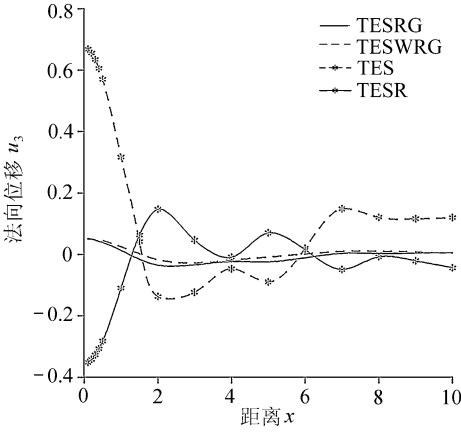


图 1 由沿界面作用的集中力引起的法向位移 u_3 随水平距离 x 的变化

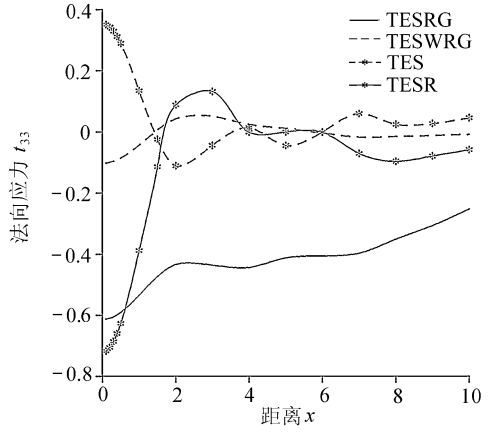


图 2 由沿界面作用的集中力引起的法向应力 t_{33} 随水平距离 x 的变化

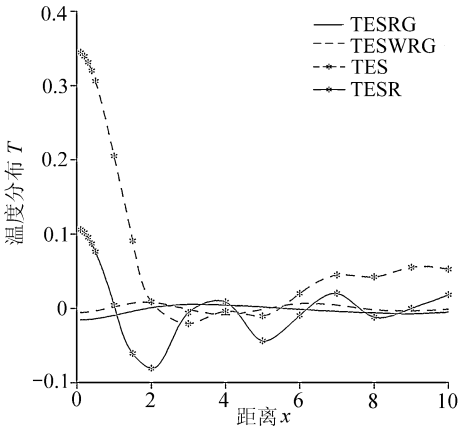


图 3 由沿界面作用的集中力引起的温度分布 T 随水平距离 x 的变化

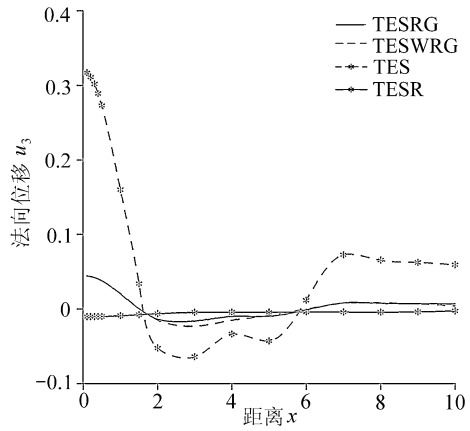


图 4 由沿界面作用的连续力引起的法向位移 u_3 随水平距离 x 的变化

图 4~ 图 6 分别描述了连续力作用下的法向位移 u_3 , 法向应力 t_{33} 和温度分布 T . 图中表明,对于 TESRG, TESWRG 和 TESR, 法向位移和温度分布的数值都很小. 关于法向应力的变化, TESRG, TESWRG 和 TES 的变化规律很相似, 只是数值上稍有差别. 这些介质的法向应力值在 $0 \leq x \leq 2.0$ 内急剧增大, 然后震荡减小.

当沿两种介质的界面作用着均布力时, 法向位移 u_3 , 法向应力 t_{33} 和温度分布 T 的变化情况与集中力作用时的变化情况类似, 分别在图 7~ 图 9 中表示.

当荷载沿着界面移动时, 法向位移 u_3 , 法向应力 t_{33} 和温度分布 T 的变化情况与连续力作用的变化情况类似, 但是两种情形的数值相差较大, 分别在图 10~ 图 12 中表示.

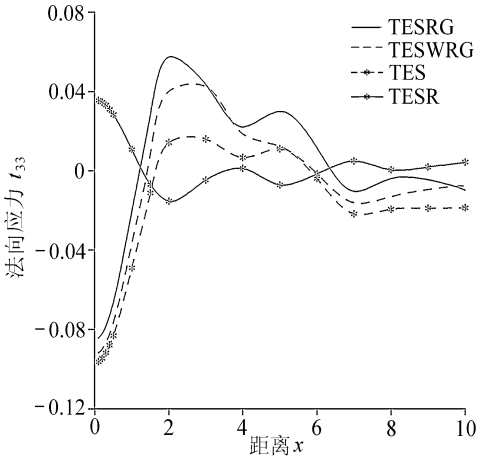


图 5 由沿界面作用的连续力引起的法向应力 t_{33} 随水平距离 x 的变化

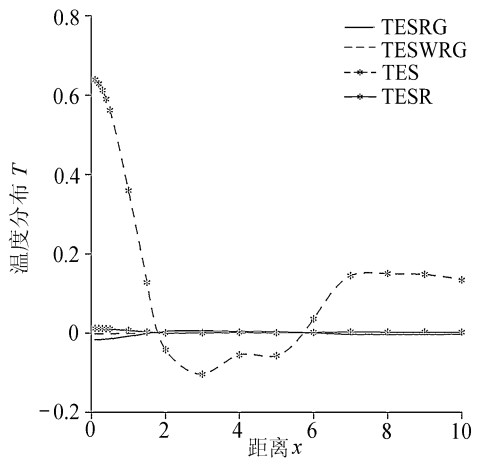


图 6 由沿界面作用的连续力引起的温度分布 T 随水平距离 x 的变化

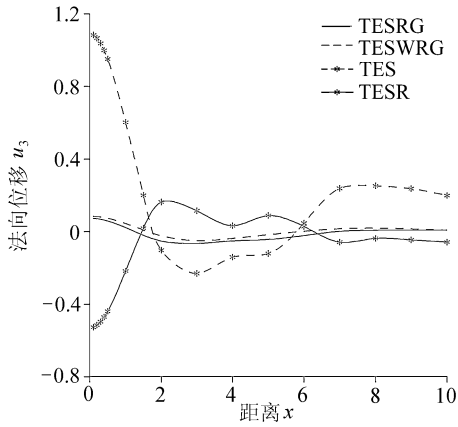


图 7 由沿界面作用的均布力引起的法向位移 u_3 随水平距离 x 的变化

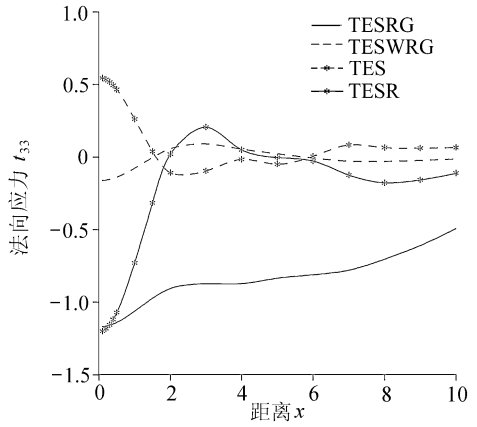


图 8 由沿界面作用的均布力引起的法向应力 t_{33} 随水平距离 x 的变化

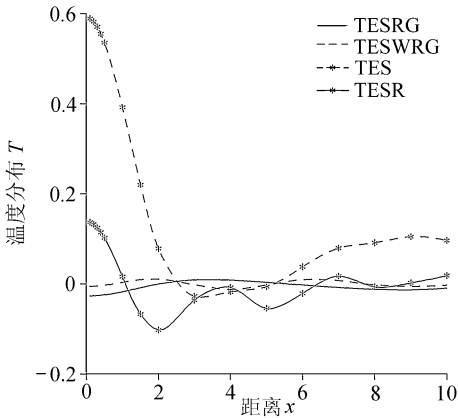


图 9 由沿界面作用的均布力引起的温度分布 T 随水平距离 x 的变化

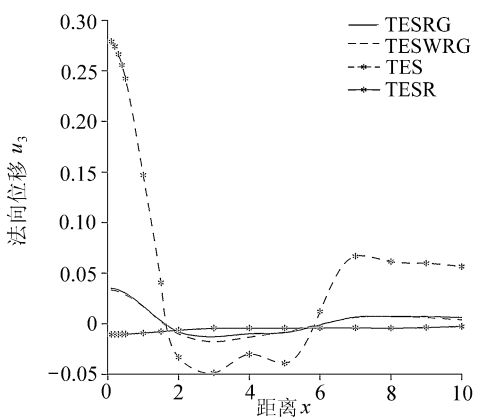


图 10 由沿界面作用的移动荷载引起的法向位移 u_3 随水平距离 x 的变化

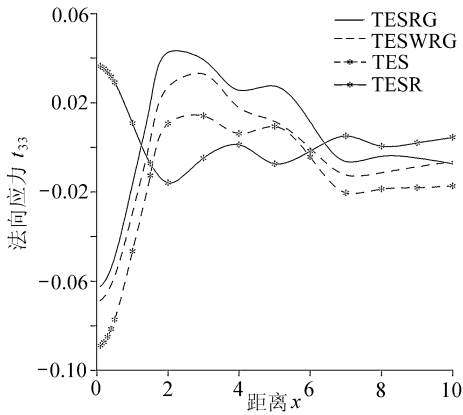


图 11 由沿界面作用的移动荷载引起的法向应力 t_{33} 随水平距离 x 的变化

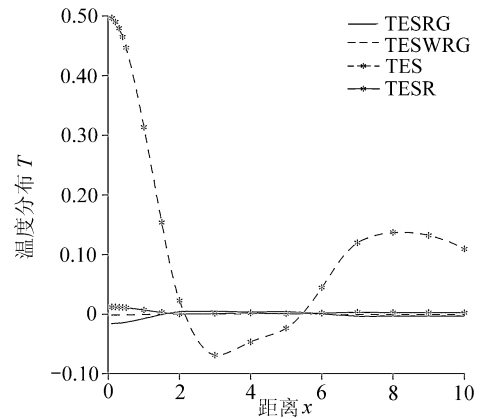


图 12 由沿界面作用的移动荷载引起的温度分布 T 随水平距离 x 的变化

4 结 论

研究了有旋转和重力作用,在集中力、均布力,同时又是连续力和移动荷载独立作用时,法向位移、法向应力和温度分布的变化。这些量的变化情况是类似的。热弹性 L-S 理论和 G-L 理论所得结果的差别并不太大。

[参 考 文 献]

- [1] Chandrasekharaiah D S. Hyperbolic thermoelastic: a review of recent literature[J]. Appl Mech Rev, 1998, **51**(12): 705- 729.
- [2] Lord H W, Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity solids[J]. J Mech Phys Solids, 1967, **15**(5): 299- 309.
- [3] Mller I. The coldness, a universal function in thermoelastic bodies[J]. Arch Rat Mech Anal, 1971, **41**(5): 319- 332.
- [4] Green A E, Laws N. On the entropy production inequality[J]. Arch Rat Mech Anal, 1972, **45**(1): 45- 47.
- [5] Green A E, Lindsay K A. Thermoelasticity[J]. J Elasticity, 1972, **2**(1): 1- 7.
- [6] Suhubi E S. Thermoelastic solids[A]. In: Eringen A C, Ed. Continuum Physics [C]. Vol II Part II, Chapter II. New York Academic Press, 1975.
- [7] Green A E, Naghdi P M. On thermoelasticity without energy dissipation[J]. J Elasticity, 1993, **31**(3): 189- 208.
- [8] Barber J R, Martin- Moran C J. Green's functions for transient thermoelastic contact problems for the half- plane[J]. Wear, 1982, **79**: 11- 19.
- [9] Barber J R. Thermoelastic displacements and stresses due to a heat source moving over the surface of a half plane[J]. ASME, Transactions, Journal of Applied Mechanics, 1984, **51**(3): 636- 640.
- [10] Sherief H H. Fundamental solution of the generalized thermoelastic problem for short times[J]. J Thermal Stresses, 1986, **9**(2): 151- 164.
- [11] Dhaliwal R S, Majumdar S R, Wang J. Thermoelastic waves in an infinite solid caused by a line heat source[J]. Int J Math & Math Sci, 1997, **20**(2): 323- 334.
- [12] Chandrasekharaiah D S, Srinath K S. Thermoelastic interactions without energy dissipation due to a point heat source[J]. J Elasticity, 1998, **50**(2): 97- 108.

- [13] Sharma J N, Chauhan R S, Kumar R. Time- harmonic sources in a generalized thermoelastic continuum[J]. *J Thermal Stresses*, 2000, **23**(7): 657- 674.
- [14] Sharma J N, Chauhan R S. Mechanical and thermal sources in a generalized thermoelastic half- space [J]. *J Thermal Stresses*, 2001, **24**(7): 651- 675.
- [15] Sharma J N, Sharma P K, Gupta S K. Steady state response to moving loads in thermoelastic solid media[J]. *J Thermal Stresses*, 2004, **27**(10): 931- 951.
- [16] 德斯瓦尔 S, 乔德哈瑞 S. 带扩散的广义弹性固体中移动荷载引起的二维相互作用[J]. *应用数学和力学*, 2008, **29**(2): 188- 202.
- [17] Chand D, Sharma J N, Sud S P. Transient generalized magneto- thermoelastic waves in a rotating half space[J]. *Int J Engg Sci*, 1990, **28**(6): 547- 556.
- [18] Schoenberg M, Censor D. Elastic waves in rotating media[J]. *Quart Appl Math*, 1973, **31**: 115- 125.
- [19] Clarke N S, Burdness J S. Rayleigh waves on a rotating surface[J]. *ASME J Appl Mech*, 1994, **61**: 724 - 726.
- [20] Destrade M. Surface waves in rotating rhombic crystal[J]. *Proc Royal Soc London , Series A*, 2004, **460**: 653- 665.
- [21] Roychoudhuri S K, Mukhopadhyay S. Effect of rotation and relaxation times on plane waves in generalized thermo- visco- elasticity[J]. *Int J Math Math Sci*, 2000, **23**(7): 497- 505.
- [22] Ting T C T. Surface waves in a rotating anisotropic elastic half- space[J]. *Wave Motion*, 2004, **40** (4): 329- 346.
- [23] Sharma J N, Thakur D. Effect of rotation on Rayleigh- Lamb waves in magneto- thermoelastic media[J]. *J Sound Vib*, 2006, **296**(4/5): 871- 887.
- [24] Sharma J N, Walia V. Effect of rotation on Rayleigh- Lamb waves in piezothermoelastic half space [J]. *J Solid Structures*, 2007, **44**(3/ 4): 1060- 1072.
- [25] Sharma J N, Othman M I A. Effect of rotation on generalized thermo- viscoelastic Rayleigh- Lamb waves[J]. *J Solid Structures*, 2007, **44**(13): 4243- 4255.
- [26] Sharma J N, Walia V, Gupta S K. Effect of rotation and thermal relaxation on Rayleigh waves in piezothermoelastic half space[J]. *Int J Mech Sci*, 2008, **50**(3): 433- 444.
- [27] Othman M I A, Song Y. Effect of rotation on plane waves of generalized electro- magneto- thermo- viscoelasticity with two relaxation times[J]. *Appl Math Modellin g*, 2008, **32**(5): 811- 825.
- [28] Bromwich T J J A. On the influence of gravity on elastic waves and in particular on the vibrations of an elastic globe[J]. *Proc London Math Soc*, 1898, **30**(1): 98- 120.
- [29] Love A E H. *Some Problems of Geodynamics* [M]. New York: Dover, 1911.
- [30] De S N, Sengupta P R. Plane Lamb' s problem under the influence of gravity[J]. *Gerland Beitr Geophysics (Leipzig)*, 1973, **82**: 421- 426.
- [31] De S N, Sengupta P R. Influence of gravity on wave propagation in an elastic layer[J]. *J Acoust Soc Am*, 1974, **55**(5): 919- 921.
- [32] De S N, Sengupta P R. Surface waves under the influence of gravity[J]. *Gerland Beitr Geophysics (Leipzig)*, 1976, **85**: 311- 318.
- [33] Sengupta P R, Acharya D. The influence of gravity on the propagation of waves in a thermoelastic layer[J]. *Rev Roum Sci Technol Mech Appl Tome*, 1979, **24**: 395- 406.
- [34] Das S C, Acharya D P, Sengupta P R. Surface waves in an inhomogeneous elastic medium under the influence of gravity[J]. *Rev Roum Des Sci Tech*, 1992, **37**(5): 539- 551.
- [35] Abd- Alla A M, Ahmed S M. Rayleigh waves in an orthotropic thermoelastic medium under gravity field and initial stress[J]. *J Earth Moon Planets*, 1996, **75**(3): 185- 197.
- [36] Abd- Alla A M, Ahmed S M. Stonley and Rayleigh waves in a nonhomogeneous orthotropic elastic medium under the influence of gravity[J]. *Appl Math Comp*, 2003, **135**: 187- 200.

- [37] Youssef H M. Problem of generalized thermoelastic infinite medium with cylindrical cavity subjected to ramp- type heating and loading[J]. Arch Appl Mech, 2006, **75**: 553- 565.
- [38] Sinha S B, Elsibai K A. Reflection and refraction of thermoelastic waves at an interface of two semi-infinite media with two relaxation times[J]. J Thermal Stresses, 1997, **20**(2): 129- 145.
- [39] Sharma J N, Kumar V. Plane strain problems of transversely isotropic thermoelastic media[J]. J Thermal Stresses, 1997, **20**(5): 463- 476.

Effect of Rotation in Generalized Thermoelastic Solid Under the Influence of Gravity With an Overlying Infinite Thermoelastic Fluid

Praveen Ailawalia¹, Naib Singh Narah²

(1. Department of Mathematics, M . M . Engg . College,

Maharishi Markandeswar University Mullana ,

District Ambala , Haryana , India ;

2. Department of Mathematics D . A . V College, Ambala City , Haryana , India)

Abstract: The present problem was concerned with the study of deformation of a rotating generalized thermoelastic solid with an overlying infinite thermoelastic fluid due to different forces acting along the interface under the influence of gravity. The components of displacement, force stress and temperature distribution were obtained in Laplace and Fourier domain by applying integral transforms. These components were then obtained in the physical domain by applying a numerical inversion method. Some particular cases were also discussed in context of the problem. The results are also presented graphically to show the effect of rotation and gravity in the medium.

Key words: rotation; gravity; generalized thermoelasticity; thermoelastic fluid; Laplace and Fourier transforms; temperature distribution