文章编号: 1000- 0887(2009) 12- 1493- 08

© 应用数学和力学编委会, ISSN 1000- 0887

关于变分包含问题和不动点问题的一些结果及应用*

郝 彦[1,2]

(1. 浙江海洋学院 数理与信息学院, 浙江 舟山 316004;
2. 浙江师范大学 数理与信息工程学院, 浙江 金华 321004)

(协平推荐)

摘要: 基于一个广义迭代算法, 考虑了逼近一类拟变分包含问题解集与一族无限多个非扩张映象公共不动点集的某一公共元问题• 在实 Hilbert 空间的框架下, 证明了由次广义迭代算法产生的迭代序列强收敛到某一公共元•

关 键 词: 变分不等式; 不动点; 非扩张映象; 拟变分包含问题
中图分类号: O177.5 文献标识码: A
DOI: 10.3879/j.issn.1000- 0887.2009.12.010

1 引言与预备知识

设 H 是一实 Hilbert 空间• 称映象 $S: H \to H$ 是一非扩张的, 如果 $\| Sx - Sy \| \leqslant \| x - y \|$, $\forall x, y \in H$• 在本文, 我们用 $F(S)$ 来表示映象 S 的不动点集• 称映象 $A: H \to H$ 为强正的, 如果存在一常数 $\gamma > 0$ 使得 $\langle Ax, x \rangle \geqslant \gamma \| x \|^2$, $\forall x \in H$• 称映象 $B: H \to H$ 为逆强单调的, 如果存在 $\alpha > 0$ 使得 $\langle Bx - By, x - y \rangle \geqslant \alpha \| Bx - By \|^2$, $\forall x, y \in H$• 集值映象 $M: H \to 2^H$ 称为单调的, 如果对所有的 $x, y \in H, f \in Mx, g \in My$, 有 $\langle x - y, f - g \rangle \geqslant 0$•

本文, 我们考虑下面所谓的拟变分包含问题: 求一点 $u \in H$, 使得

$$0 \in Bu + Mu, \tag{1}$$

其中 $B: H \to H$ 和 $M: H \to 2^H$ 是两个非线性映象, 见文献[1- 3]• 在本文, 我们用 $\mathrm{VI}(H, B, M)$ 来表示拟变分包含问题(1) 的解• 在结构分析、机械和经济中的大量问题都可以由该拟变分包含问题来刻画• 接下来, 我们考虑问题(1) 的如下两种特殊情况•

1) 如果 $M = \partial \phi: H \to 2^H$, 其中 $\phi: H \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 是真凸下半连续的泛函, $\partial \phi$ 是 ϕ 的次微分, 则求解拟变分包含问题(1) 等价于求一点 $u \in H$, 使得 $\langle Bu, v - u \rangle + \phi(v) - \phi(u) \geqslant 0$, $\forall v \in H$• 上式称为混合拟变分不等式•

2) 如果 $M = \partial \delta_C$, 其中 C 是H 的非空闭凸子集, $\delta_C: H \to [0, +\infty]$ 是 C 的特征函数, 即

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0, & x \in C, \\ +\infty, & x \notin C, \end{cases}$$

* 收稿日期: 2009- 05- 31; 修订日期: 2009- 10- 01
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10901140)
作者简介: 郝彦(1965—), 女, 黑龙江齐齐哈尔人, 副教授(E- mail: zjhaoyan@yahoo.cn).

则求解拟变分包含问题(1)等价于求解下面的变分不等式：求一点 $u \in C$，使得

$$\langle Bu, v-u\rangle \geqslant 0, \qquad \forall v \in C. \tag{2}$$

本文，我们用 $VI(C, B)$ 来表示变分不等式(2)的解集.

最近，变分包含问题(1)已经被许多作者进行研究. 本文受 Chang[1]，Zhang 等[3]，Chang 等[4]以及 Qin 等[5]的文章所启发，引入了一个广义迭代算法并用于逼近一类拟变分包含问题解集与一族无限多个非扩张映象公共不动点集的某一公共元. 并在 Hilbert 空间框架下建立了强收敛定理.

为了证明本文的主要结果，我们需要如下的概念和引理.

引理 1[6] 设 $\{\alpha_n\}$，$\{\gamma_n\}$ 和 $\{\delta_n\}$ 为非负实数列并满足 $\alpha_{n+1} \leqslant (1-\gamma_n)\alpha_n + \delta_n$，其中 $\{\gamma_n\}$ 在 $(0, 1)$ 内，$\{\gamma_n\}$ 和 $\{\delta_n\}$ 满足如下限制：$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n = \infty$ 且 $\limsup_{n\to\infty}\delta_n/\gamma_n \leqslant 0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0.$$

定义[7] 设 H 是一实 Hilbert 空间，$\{S_i\}$ 是无穷族非扩张映象，$\{\gamma_i\}$ 是非负实数列且满足 $0 \leqslant \gamma_i < 1$，$\forall i \geqslant 1$. 对所有的 $n \geqslant 1$，定义一映象 W_n 如下：

$$\begin{cases} U_{n,n+1} = I, \\ U_{n,n} = \gamma_n S_n U_{n,n+1} + (1-\gamma_n)I, \\ \vdots \\ U_{n,2} = \gamma_2 S_2 U_{n,3} + (1-\gamma_2)I, \\ W_n = U_{n,1} = \gamma_1 S_1 U_{n,2} + (1-\gamma_1)I. \end{cases} \tag{3}$$

我们知 W_n 是非扩张的并称之为 W-映象. 该 W-映象是由 $S_n, S_{n-1}, \dots, S_1$ 和 $\gamma_n, \gamma_{n-1}, \dots, \gamma_1$ 生成的.

引理 2[7] 设 H 是一实 Hilbert 空间，$\{S_i\}$ 是一无穷族非扩张映象，$\bigcap_{i=1}^{\infty}F(S_i) \neq \emptyset$，$\{\gamma_i\}$ 是一实数列且满足如下限制：$0 < \gamma_i \leqslant l < 1$，$\forall i \geqslant 1$，则

1) W_n 是非扩张的，且 $F(W_n) = \bigcap_{i=1}^{\infty}F(S_i)$，对每一个 $n \geqslant 1$；
2) 对每个 $x \in C$ 和每个正整数 k，极限 $\lim_{n\to\infty}U_{n,k}$ 存在；
3) 映象 W 是非扩张映象并满足 $F(W) = \bigcap_{i=1}^{\infty}F(S_i)$，其中 W 由如下所定义：

$$Wx := \lim_{n\to\infty}W_n x = \lim_{n\to\infty}U_{n,1}x, \qquad x \in H.$$

引理 3[4] 设 H 是一 Hilbert 空间，$\{S_i\}$ 是一无穷族非扩张映象，$\bigcap_{i=1}^{\infty}F(S_i) \neq \emptyset$，$\{\gamma_i\}$ 是一实数列且满足 $0 < \gamma_i \leqslant l < 1$，$\forall i \geqslant 1$. 如果 K 是 H 的任何有界子集，则

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in K}\|Wx - W_n x\| = 0.$$

在本文中，我们总是假设 $0 < \gamma_i \leqslant l < 1$，$\forall i \geqslant 1$.

引理 4[8] 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是 Banach 空间 E 的有界序列，$\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的一实数列满足如下限制：

$$0 < \liminf_{n\to\infty}\beta_n \leqslant \limsup_{n\to\infty}\beta_n < 1.$$

假设 $x_{n+1} = (1-\beta_n)y_n + \beta_n x_n$ 且 $\limsup_{n\to\infty}(\|y_{n+1} - y_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \leqslant 0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n - x_n\| = 0.$$

2 主要结果

定理 1 设 H 是一实 Hilbert 空间，$M_1: H \to 2^H$ 和 $M_2: H \to 2^H$ 是两个极大单调映象. 假

设 $B_1:H\to H$ 是 δ_1-逆强单调映象, $B_2:H\to H$ 是 δ_2-逆强单调映象, $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是从 H 到 H 的一无穷族非扩张映象. 设 $f:H\to H$ 是 H 上的压缩, 其压缩系数为 $\alpha(0<\alpha<1)$, A 是强正线性有界自伴算子, 其系数为 $\bar{\gamma}>0$. 假设 $0<\gamma<\bar{\gamma}/\alpha$ 并且 $\Omega=\bigcap_{i=1}^{\infty}F(S_i)\cap \mathrm{VI}(H,B_1,M_1)\cap \mathrm{VI}(H,B_2,M_2)\neq\varnothing$. $x_1\in H$. 令序列 $\{x_n\}$ 由如下迭代程序产生:

$$\begin{cases} z_n=J_{M_2,\eta}(x_n-\eta B_2x_n), \\ y_n=J_{M_1,\lambda}(z_n-\lambda B_1z_n), \\ x_{n+1}=\alpha_n\gamma f(x_n)+\beta_nx_n+[(1-\beta_n)I-\alpha_nA]W_ny_n, \quad \forall n\geqslant 1, \end{cases} \tag{4}$$

其中, $\{W_n\}$ 是由式(3) 所定义, $\lambda\in(0,2\delta_1)$, $\eta\in(0,2\delta_2)$, $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 的数列, 使得 $0<a\leqslant\beta_n\leqslant b<1$, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$. 则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $z\in\Omega$, 这里 z 也是如下变分不等式的唯一解:

$$\langle(A-\gamma f)z,z-x^*\rangle\leqslant 0, \qquad \forall x^*\in\Omega. \tag{5}$$

等价地, 我们有 $P_\Omega(I-A+\gamma f)z=z$.

证明　由 $A-\gamma f$ 的强单调性可得变分不等式(5) 的解的唯一性. 下面, 我们用 z 来表示式(5) 的唯一解. 接下来, 我们证明映象 $I-\lambda B_1$ 和 $I-\eta B_2$ 都是非扩张的. $\forall x,y\in H$, 由 $\lambda\in(0,2\delta_1]$, 可得

$$\begin{aligned} &\|(I-\lambda B_1)x-(I-\lambda B_1)y\|^2= \\ &\quad \|x-y\|^2-2\lambda\langle x-y,B_1x-B_1y\rangle+\lambda^2\|B_1x-B_1y\|^2\leqslant \\ &\quad \|x-y\|^2-2\lambda\delta_1\|B_1x-B_1y\|^2+\lambda^2\|B_1x-B_1y\|^2\leqslant\|x-y\|^2, \end{aligned}$$

这说明映象 $I-\lambda B_1$ 是非扩张的, 同理可证 $I-\eta B_2$ 也是非扩张的. 令 $x^*\in\Omega$, 则

$$x^*=J_{M_1,\lambda}(x^*-\lambda B_1x^*)=J_{M_2,\eta}(x^*-\eta B_2x^*).$$

于是

$$\|z_n-x^*\|=\|J_{M_2,\eta}(x_n-\eta B_2x_n)-J_{M_2,\eta}(x^*-\eta B_2x^*)\|\leqslant\|x_n-x^*\|.$$

由此可得

$$\|y_n-x^*\|\leqslant\|(z_n-\lambda B_1z_n)-(x^*-\lambda B_1x^*)\|\leqslant\|x_n-x^*\|. \tag{6}$$

由控制序列的条件假设, 不失一般性, 我们令 $\alpha_n\leqslant(1-\beta_n)\|A\|^{-1}$, 对所有 $n\geqslant 1$. 注意到 A 是强正线性有界自伴算子, 则 $\|A\|=\sup\{|\langle Ax,x\rangle|:x\in H,\ \|x\|=1\}$. 对 $x\in C$ 且满足 $\|x\|=1$, 我们有 $\langle((1-\beta_n)I-\alpha_nA)x,x\rangle=1-\beta_n-\alpha_n\langle Ax,x\rangle\geqslant 0$, 即 $(1-\beta_n)I-\alpha_nA$ 是正的. 于是

$$\begin{aligned} &\|(1-\beta_n)I-\alpha_nA\|= \\ &\quad \sup\{1-\beta_n-\alpha_n\langle Ax,x\rangle:x\in C,\ \|x\|=1\}\leqslant 1-\beta_n-\alpha_n\bar{\gamma}. \end{aligned} \tag{7}$$

由式(6) 和(7), 得

$$\begin{aligned} &\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant \\ &\quad \alpha_n\|\gamma f(x_n)-Ax^*\|+\beta_n\|x_n-x^*\|+ \\ &\quad \|(1-\beta_n)I-\alpha_nA\|\,\|W_ny_n-x^*\|\leqslant \\ &\quad [1-\alpha_n(\bar{\gamma}-\alpha\gamma)]\|x_n-x^*\|+\alpha_n\|\gamma f(x^*)-Ax^*\|. \end{aligned}$$

简单归纳可得 $\|x_n-x^*\|\leqslant\max\{\|x_1-x^*\|,\|\gamma f(x^*)-Ax^*\|/(\bar{\gamma}-\alpha\gamma)\}$, 即序列 $\{x_n\}$ 是有界的, 由此可得 $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 也是有界的. 不失一般性, 我们假设存在有界集 $K\subset$

H，使得

$$x_n, y_n, z_n \in K, \qquad \forall n \geqslant 1. \tag{8}$$

注意到迭代算法(4)及映象 $J_{M_2,\eta}$ 和 $I-\eta B_2$ 的非扩张性，我们有

$$\|z_{n+1}-z_n\| \leqslant \|(x_{n+1}-\eta B_2x_{n+1})-(x_n-\eta B_2x_n)\| \leqslant \|x_{n+1}-x_n\|. \tag{9}$$

同理可得

$$\|y_{n+1}-y_n\| \leqslant \|z_{n+1}-z_n\| \leqslant \|x_{n+1}-x_n\|.$$

设

$$x_{n+1} = (1-\beta_n)v_n + \beta_n x_n, \qquad \forall n \geqslant 1, \tag{10}$$

则

$$\|v_{n+1}-v_n\| \leqslant \frac{\alpha_{n+1}}{1-\beta_{n+1}}\|\gamma f(x_{n+1})-AW_ny_n\| + \frac{\alpha_n}{1-\beta_n}\|\gamma f(x_n)-AW_ny_n\| + \|W_{n+1}y_{n+1}-W_ny_n\|. \tag{11}$$

另一方面，我们有如下估计：

$$\|W_{n+1}y_{n+1}-W_ny_n\| \leqslant \sup_{x\in K}\left\{\|W_{n+1}x-Wx\|+\|Wx-W_nx\|\right\}+\|x_{n+1}-x_n\|, \tag{12}$$

其中 K 是由式(8)定义的 H 的有界子集．结合式(11)和(12)，可得

$$\|v_{n+1}-v_n\|-\|x_{n+1}-x_n\| \leqslant \frac{\alpha_{n+1}}{1-\beta_{n+1}}\|\gamma f(x_{n+1})-AW_ny_n\| + \frac{\alpha_n}{1-\beta_n}\|\gamma f(x_n)-AW_ny_n\| + \sup_{x\in K}\left\{\|W_{n+1}x-Wx\|+\|Wx-W_nx\|\right\}.$$

由控制序列所满足的限制条件得 $\limsup_{n\to\infty}(\|v_{n+1}-v_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|)\leqslant 0$．由引理 4 得 $\lim_{n\to\infty}\|v_n-x_n\|=0$．注意到式(10)，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\| = 0. \tag{13}$$

设 $f_n = \gamma f(x_n)-AW_ny_n$，$\forall n\geqslant 1$．对任意 $x^*\in\Omega$，我们有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2 &= \|\alpha_n(\gamma f(x_n)-AW_ny_n) + [\beta_n(x_n-x^*)+(1-\beta_n)(W_ny_n-x^*)]\|^2 \leqslant \\ &\|\beta_n(x_n-x^*)+(1-\beta_n)(W_ny_n-x^*)\|^2+2\alpha_n\langle f_n, x_{n+1}-x^*\rangle \leqslant \\ &\beta_n\|x_n-x^*\|^2+(1-\beta_n)\|y_n-x^*\|^2+2\alpha_nM^2,\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $M=\max\left\{\sup_{n\geqslant 1}\|f_n\|, \sup_{n\geqslant 1}\|x_n-x^*\|\right\}$．另一方面，我们有

$$\|y_n-x^*\|^2 \leqslant \|(I-\lambda_nB_1)z_n-(I-\lambda_nB_1)x^*\|^2 \leqslant \|z_n-x^*\|^2+\lambda(\lambda-2\delta_1)\|B_1z_n-B_1x^*\|^2. \tag{15}$$

将式(15)代入式(14)，得

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2 \leqslant \|x_n-x^*\|^2+(1-\beta_n)\lambda(\lambda-2\delta_1)\|B_1z_n-B_1x^*\|^2+2\alpha_nM^2.$$

由式(13)以及控制序列所满足的限制条件，得

$$\lim_{n\to\infty}\|B_1z_n-B_1x^*\| = 0. \tag{16}$$

注意到式(14)，我们有

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant$$
$$\beta_n\|x_n-x^*\|^2+(1-\beta_n)\|z_n-x^*\|^2+2\alpha_n M^2. \tag{17}$$

同理可得

$$\lim_{n\to\infty}\|B_2x_n-B_2x^*\|=0. \tag{18}$$

另一方面, 我们有如下估计:

$$\|z_n-x^*\|^2\leqslant\frac{1}{2}\Big\{\|x_n-x^*\|^2+\|z_n-x^*\|^2-\|x_n-z_n\|^2+$$
$$2\eta\langle x_n-z_n,B_2x_n-B_2x^*\rangle-\eta^2\|B_2x_n-B_2x^*\|^2\Big\},$$

由此可推出

$$\|z_n-x^*\|^2\leqslant$$
$$\|x_n-x^*\|^2-\|x_n-z_n\|^2+2\eta\|x_n-z_n\|\|B_2x_n-B_2x^*\|. \tag{19}$$

将式(19)代入到式(17), 得

$$(1-\beta_n)\|x_n-z_n\|^2\leqslant$$
$$(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_n-x_{n+1}\|+$$
$$2\alpha_n M^2+2\eta\|x_n-z_n\|\|B_2x_n-B_2x^*\|.$$

由 $0<a\leqslant\beta_n\leqslant b<1$, 式(13)和(18), 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-z_n\|=0.$$

同理可证

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-z_n\|=0.$$

注意到

$$(1-\beta_n)\|W_ny_n-x_n\|\leqslant\|x_n-x_{n+1}\|+\alpha_n\|\gamma f(x_n)-BW_ny_n\|,$$

由式(13)以及控制序列所满足的限制, 得

$$\lim_{n\to\infty}\|W_ny_n-x_n\|=0.$$

注意到

$$\|W_ny_n-y_n\|\leqslant\|y_n-z_n\|+\|z_n-x_n\|+\|x_n-W_ny_n\|,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\|W_ny_n-y_n\|=0. \tag{20}$$

接下来, 我们证明 $\limsup_{n\to\infty}\langle(\gamma f-A)z,x_n-z\rangle\leqslant 0$, 其中 $z=P_\Omega[I-(A-\gamma f)]z$. 为此, 选取 $\{x_n\}$ 的一子序列 $\{x_{n_i}\}$, 使得

$$\limsup_{n\to\infty}\langle(\gamma f-A)z,x_n-z\rangle=\lim_{i\to\infty}\langle(\gamma f-A)z,x_{n_i}-z\rangle. \tag{21}$$

注意到 $\{x_{n_i}\}$ 是有界的, 则存在某一子序列 $\{x_{n_{i_j}}\}$ 弱收敛于 w. 不失一般性, 我们假设 $x_{n_i}\rightharpoonup w$. 又由于 $\|x_n-y_n\|\leqslant(\|x_n-z_n\|+\|y_n-z_n\|)\to 0$. 因此可得到 $y_{n_i}\rightharpoonup w$.

首先, 我们证明 $w\in \mathrm{VI}(H,B_1,M_1)$. 注意到 $M+B_1$ 是极大单调的(参看文献[9]). 设 $(e_1,e_2)\in \mathrm{graph}(M_1+B_1)$. 由于 $y_{n_i}=J_{M_1,\lambda}(z_{n_i}-\lambda B_1z_{n_i})$, 则 $(z_{n_i}-y_{n_i}-\lambda B_1z_{n_i})/\lambda\in M_1(y_{n_i})$. 由 M_1+B_1 的极大单调性, 可得

$$\langle e_1-y_{n_i},e_2-B_1e_1-(z_{n_i}-y_{n_i}-\lambda B_1z_{n_i})/\lambda\rangle\geqslant 0.$$

由此可得到

$$\langle e_1 - y_{n_i}, e_2\rangle \geqslant \langle e_1 - y_{n_i}, B_1 y_{n_i} - B_1 z_{n_i}\rangle + \frac{1}{\lambda}\langle e_1 - y_{n_i}, z_{n_i} - y_{n_i}\rangle.$$

注意到 $y_n - z_n \to 0$ 和 $y_{n_i} \rightharpoonup w$, 我们有 $\langle e_1 - w, e_2\rangle \geqslant 0$. 注意到 $M_1 + B_1$ 是极大单调的, 则 $\theta \in (M_1 + B_1)(w)$, 即, $w \in \mathrm{VI}(H, B_1, M_1)$. 由 $x_n - z_n \to 0$, 得 $z_{n_i} \rightharpoonup w$. 同理可证 $w \in \mathrm{VI}(H, B_2, M_2)$.

接下来, 我们证明 $w \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i) = F(W)$. 假设该结论不成立, 即, $Ww \neq w$. 由 $y_{n_i} \rightharpoonup w$ 及空间满足 Opial 条件(参看文献[10]), 得

$$\liminf_{i\to\infty} \| y_{n_i} - w \| < \liminf_{i\to\infty} \| y_{n_i} - Ww \| \leqslant \liminf_{i\to\infty}\left\{ \| y_{n_i} - Wy_{n_i} \| + \| y_{n_i} - w \|\right\}. \tag{22}$$

另一方面, 我们有

$$\| Wy_n - y_n \| \leqslant \| Wy_n - W_n y_n \| + \| W_n y_n - y_n \| \leqslant \sup_{x\in K} \| Wx - W_n x \| + \| W_n y_n - y_n \|.$$

由引理 3 及式(20), 得 $\lim_{n\to\infty} \| Wy_n - y_n \| = 0$, 注意到式(22), 我们得如下不等式:

$$\liminf_{i\to\infty} \| y_{n_i} - w \| < \liminf_{i\to\infty} \| y_{n_i} - w \|.$$

因此, $w \in F(W) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i)$.

由式(21), 我们有

$$\limsup_{n\to\infty}\langle (\gamma f - A)z, x_n - z\rangle = \langle (\gamma f - A)z, w - z\rangle \leqslant 0. \tag{23}$$

最后, 我们证明序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 z. 注意到

$$\begin{aligned}\| x_{n+1} - z \|^2 \leqslant{}& \alpha_n \gamma\langle f(x_n) - f(z), x_{n+1} - z\rangle + \alpha_n\langle \gamma f(z) - Az, x_{n+1} - z\rangle + \\ & \beta_n \| x_n - z \| \| x_{n+1} - z \| + (1 - \beta_n - \alpha_n \gamma) \| y_n - z \| \| x_{n+1} - z \| \leqslant \\ & \frac{1 - \alpha_n(\gamma - \alpha\gamma)}{2} \| x_n - z \|^2 + \frac{1}{2} \| x_{n+1} - z \|^2 + \\ & \alpha_n\langle \gamma f(z) - Az, x_{n+1} - z\rangle,\end{aligned}$$

即 $\| x_{n+1} - z \|^2 \leqslant [1 - \alpha_n(\gamma - \alpha\gamma)] \| x_n - z \|^2 + 2\alpha_n\langle \gamma f(z) - Az, x_{n+1} - z\rangle$. 由引理 1 可得 $\lim_{n\to\infty} \| x_n - z \| = 0$. 证毕.

在定理 1 中, 令 $\gamma = 1$, $A = I$, 这里 I 表示恒等映象, 则不难获得如下结果.

推论 设 H 是一实 Hilbert 空间, $M_1: H \to 2^H$ 和 $M_2: H \to 2^H$ 是两个极大单调映象. 假设 $B_1: H \to H$ 是 δ_1- 逆强单调映象, $B_2: H \to H$ 是 δ_2- 逆强单调映象, $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是从 H 到 H 的一无穷族非扩张映象. 设 $f: H \to H$ 是 H 上的压缩, 其压缩系数为 $\alpha(0 < \alpha < 1)$. 假设 $\Omega = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i) \cap \mathrm{VI}(H, B_1, M_1) \cap \mathrm{VI}(H, B_2, M_2) \neq \varnothing$, 设 $x_1 \in H$, 序列 $\{x_n\}$ 由如下迭代程序产生:

$$\begin{cases} z_n = J_{M_2,\eta}(x_n - \eta B_2 x_n), \\ y_n = J_{M_1,\lambda}(z_n - \lambda B_1 z_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + (1 - \beta_n - \alpha_n) W_n y_n, \quad \forall n \geqslant 1, \end{cases}$$

其中 $\{W_n\}$ 是由式(3) 所定义, $\lambda \in (0, 2\delta_1)$, $\eta \in (0, 2\delta_2)$, $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 的数列, 使得 $0 < a \leqslant \beta_n \leqslant b < 1$, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$. 则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $z \in \Omega$, 这里 z 也是下面变分不等式的唯一解: $\langle (I - f)z, z - x^*\rangle \leqslant 0$, $\forall x^* \in \Omega$.

3 应　用

定理 2　设 H 是一实 Hilbert 空间, C 是 H 的一非空闭凸子集, $B_1: C \to H$ 是 δ_1- 逆强单调映象, $B_2: C \to H$ 是 δ_2- 逆强单调映象, S 是一从 C 到自身的非扩张映象. 设 $f: C \to C$ 是一压缩映象, 其压缩系数为 $\alpha(0 < \alpha < 1)$. 假设 $\Omega = F(S) \cap \mathrm{VI}(C, B_1) \cap \mathrm{VI}(C, B_2) \neq \varnothing$. 令 $x_1 \in H$ 且 $\{x_n\}$ 是由下式生成的序列:

$$\begin{cases} z_n = P_C(x_n - \eta B_2 x_n), \\ y_n = P_C(z_n - \lambda B_1 z_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + (1 - \beta_n - \alpha_n) S y_n, \qquad \forall n \geqslant 1, \end{cases}$$

其中 $\{W_n\}$ 是由式(3) 所定义, $\lambda \in (0, 2\delta_1)$, $\eta \in (0, 2\delta_2)$, $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 的数列, 使得 $0 < a \leqslant \beta_n \leqslant b < 1$, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$. 则 $\{x_n\}$ 强收敛于某一点 $z \in \Omega$.

证明　如果 $M_1 = M_2 = \partial\delta_C$, 其中 $\delta_C: H \to [0, +\infty]$ 是 C 的特征函数, 则拟变分包含问题(1) 与变分不等式(2) 是等价的. 另一方面, 由于 $M_1 = M_2 = \partial\delta_C$, 则 $J_{M_1,\lambda}$ 和 $J_{M_2,\eta}$ 在 C 上是恒等映象. 由定理 1, 可推出定理 2.

下面, 我们考虑另一类重要的非线性映象: 严格伪压缩映象.

映象 $T: C \to C$ 称为是 k- 严格伪压缩的, 如果存在常数 $k \in [0, 1)$, 使得

$$\| Tx - Ty \|^2 \leqslant \| x - y \|^2 + k \| (I - T)x - (I - T)y \|^2, \qquad \forall x, y \in C.$$

注意到 k- 严格伪压缩映象严格包含非扩张映象. 设 $A = I - T$, 其中 $T: C \to C$ 是一 k- 严格伪压缩的, 则 A 是 $(1 - k)/2$- 逆强单调的.

定理 3　设 H 是一实 Hilbert 空间, C 是 H 的一非空闭凸子集, $T_1: C \to C$ 是一 k_1- 严格伪压缩映象, $T_2: C \to C$ 是一 k_2- 严格伪压缩映象, $S: C \to C$ 是一非扩张映象. f 是 C 上的压缩, 压缩系数是 $\alpha(0 < \alpha < 1)$. 假设 $\Omega = F(S) \cap F(T_1) \cap F(T_2) \neq \varnothing$. 令 $x_1 \in H$ 且 $\{x_n\}$ 是由下式生成的序列:

$$\begin{cases} z_n = (1 - \eta) x_n + \eta T_2 x_n, \\ y_n = (1 - \lambda) z_n + \lambda T_1 z_n, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + (1 - \beta_n - \alpha_n) S y_n, \qquad \forall n \geqslant 1, \end{cases}$$

其中 $\lambda \in (0, 1 - k_1)$, $\eta \in (0, 1 - k_2)$, $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的序列, 使得

$$0 < a \leqslant \beta_n \leqslant b < 1, \quad \lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty,$$

则 $\{x_n\}$ 强收敛于某一点 $z \in \Omega$.

证明　令 $B_i = I - T_i: C \to H$, 则 $B_i: C \to H$ 是 δ_i 严格伪压缩的, 其中 $\delta_i = (1 - k_i)/2$. 并且 $F(T_i) = \mathrm{VI}(C, B_i)$, 对每一个 $i = 1, 2$. 由定理 2, 可推出定理 3.

[参　考　文　献]

[1] Chang S S. Set-valued variational inclusions in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 2000, **248**(2): 438-454.

[2] Noor M A, Noor K I. Sensitivity analysis for quasi-variational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1999, **236**(2): 290-299.

[3] Zhang S S, Lee J H W, Chan C K. Algorithms of common solutions for quasi variational inclusion and

fixed point problems[J]. Appl Math Mech, 2008, **29**(5): 571- 581.

[4] Chang S S, Lee H W J, Chan C K. A new method for solving equilibrium problem, fixed point problem and variational inequality problem with application to optimization[J]. Nonlinear Anal, 2009, **70**(9): 3307- 3319.

[5] Qin X, Shang M, Su Y. Strong convergence of a general iterative algorithm for equilibrium problems and variational inequality problems[J]. Math Comput Modell, 2008, **48**(7/8): 1033- 1046.

[6] Xu H K. An iterative approach to quadratic optimization[J]. J Optim Theory Appl, 2003, **116**(3): 659- 678.

[7] Shimoji K, Takahashi W. Strong convergence to common fixed points of infinite nonexpansive mappings and applications[J]. Taiwanese J Math, 2001, **5**(2): 387- 404.

[8] Suzuki T. Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's type sequences for one- parameter nonexpansive semigroups without Bochne integrals[J]. J Math Anal Appl, 2005, **305**(1): 227- 239.

[9] Pascali D, Sburlan S. Nonlinear Mappings of Monotone Type[M]. Alphen aan den Rijn, Netherlands: Sythoff Noordhoff, 1978.

[10] Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings[J]. Bull Amer Math Soc, 1967, **73**(4): 595- 597.

Some Results on Variational Inclusion Problems and Fixed Point Problems With Applications

HAO Yan[1, 2]

(1. School of Mathematics Physics and Information Science, Zhejiang Ocean University, Zhoushan, Zhejiang 316004, P. R. China;
2. College of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua, Zhejiang 321004, P. R. China)

Abstract: Based on a general iterative algorithm, the problem of approximating a common element in the solution set of quasi- variational inclusion problems and in the common fixed point set of an infinite family of nonexpansive mappings was considered. It is proved that the iterative sequences generated in the purposed iterative algorithm converges strongly to some common element in the framework of real Hilbert spaces.

Key words: variational inequality; fixed point; nonexpansive mapping; quasi- variational inclusion