文章编号:1000-0887(2010)01-0019-07

直观随机赋范空间中三次泛函方程的稳定性*

张石生[1], J·M·拉斯尔斯[2], R·沙达提[3]

(1. 宜宾学院 数学系,四川 宜宾 644007;
2. 希腊雅典大学 雅典数学与讯息学院 教师教育系,15342,希腊;
3. 阿米卡比技术大学 数学与计算机科学系,德黑兰 15914,伊朗)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 先引入直观随机赋范空间的概念. 然后,借助这一概念,然后对任意的三角范数在该空间的框架下,研究了三次泛函方程的稳定性. 另外,还介绍了随机空间理论、直观空间理论及泛函方程理论间的密切关系.

关 键 词: 稳定性; 三次泛函方程; 随机赋范空间; 直观随机赋范空间
中图分类号: O177.91　　**文献标志码**: A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.01.003

1 引言及预备知识

泛函方程稳定性问题的研究与 Ulam[1] 中的群同态的稳定性问题有关,也与 Hyers[2] 对 Banach 空间关于这一问题的肯定解答有关. Hyers 的结果对加性映象被 Aoki [3] 推广. 对线性映象,当计及一无界的 Cauchy 差时,Hyers 的结果也被 Rassias [4] 作了推广. Rassias 的文献[4]对我们现在称之为泛函方程的广义 Ulam-Hyers 稳定性的发展有诸多的影响. 关于这一问题更多的信息,有兴趣的读者可参考文献[5-11].

泛函方程

$$3f(x+3y)+f(3x-y)=15f(x+y)+15f(x-y)+80f(y) \tag{1}$$

称为三次泛函方程. 三次泛函方程的稳定性问题,对映象 $f: X \to Y$,其中 X 是一实的赋范空间,Y 是一 Banach 空间,在文献[12]中讨论过. 之后,许多数学家对某些类型的三次方程的稳定性问题进行了研究[4,13]. 另外,Mirmostafaee 等[14-15],Alsina [16],Miheţ 和 Radu [17],Miheţ 等[18],Baktash 等[19],Miheţ 等①,Saadati 等②在模糊、概率及随机赋范空间的框架下,对稳定性问题也进行过研究.

以后,我们所用到的与直观 Menger 概率赋范空间理论中有关的术语、记号和约定与文献

* 收稿日期: 2009-07-06; 修订日期: 2009-11-26
作者简介: 张石生(1934—),男,云南曲靖人,教授(E-mail:changss@yahoo.cn);
Reza Saadati(联系人. E-mail:rsaadati@eml.cc).

① Miheţ D, Saadati R, Vaezpour S M. The stability of an additive functional equation in Menger probabilistic φ-normed spaces[J]. *Math Slovak*(in press).

② Saadati, Vaezpour S M, Cho Y J. A note on the "On the stability of cubicmappings and quadratic mappings in random normed spaces"[J]. *J Inequal Appl*(in press).

[17,20-24]中相同.

定义 1.1 测度分布函数是这样的函数 $\mu:\mathbf{R}\to[0,1]$,它在 $\mathbf{R}$ 上是不减的,

$$\inf_{t\in\mathbf{R}}\mu(t)=0,\ \sup_{t\in\mathbf{R}}\mu(t)=1.$$

以后我们用 D 表所有的测度分布函数的族,而用 H 表 D 中之一特殊元,其由下式定义:

$$H(t)=\begin{cases}0, & \text{如果 } t\leqslant 0,\\ 1, & \text{如果 } t>0.\end{cases}$$

如果 X 是一非空集,则 $\mu:X\to D$ 称为 X 上的一概率测度,且记 $\mu(x)$ 为 μ_x.

定义 1.2 非-测度分布函数是这样的一函数 $\nu:\mathbf{R}\to[0,1]$ 它在 $\mathbf{R}$ 上是右连续的、不增的,而且 $\inf_{t\in\mathbf{R}}\nu(t)=1$,$\sup_{t\in\mathbf{R}}\nu(t)=0$.

我们将用 B 表所有非-测度分布函数的族,并用 G 表 B 中由下式定义的一特殊元:

$$G(t)=\begin{cases}1, & \text{如果 } t\leqslant 0,\\ 0, & \text{如果 } t>0.\end{cases}$$

如果 X 是一非空集,则 $\nu:X\to B$ 称为 X 上之一概率非-测度,而且记 $\nu(x)$ 为 ν_x.

引理 1.3[25-26] 现考虑由下式定义的集 L^* 和运算 $\leqslant_{L^*}$:

$$L^*=\{(x_1,x_2):(x_1,x_2)\in[0,1]^2\text{且 } x_1+x_2\leqslant 1\},$$

$$(x_1,x_2)\leqslant_{L^*}(y_1,y_2)\Leftrightarrow x_1\leqslant y_1,x_2\geqslant y_2,\qquad \forall(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in L^*.$$

则 $(L^*,\leqslant_{L^*})$ 是一完备格.

我们用 $0_{L^*}=(0,1)$ 和 $1_{L^*}=(1,0)$ 表其单位.经典地说,一个三角范数 $*=T$ 是定义在 $[0,1]$ 上的一映象 $T:[0,1]^2\to[0,1]$,其满足条件 $T(1,x)=1*x=x$ 对所有的 $x\in[0,1]$,且是增的、交换的、结合的.一个三角余范数 $S=\diamond$ 是一个增的、交换的、结合的映象 $S:[0,1]^2\to[0,1]$ 且满足条件 $S(0,x)=0\diamond x=x$ 对所有 $x\in[0,1]$.

当采用格 $(L^*,\leqslant_{L^*})$ 时,这些定义可以直接加以推广.

定义 1.4[26] L^* 上的三角范数(t-范数)是一个满足下述条件的映象 $\mathcal{T}:(L^*)^2\to L^*$:

(a) $\forall x\in L^*$, $\mathcal{T}(x,1_{L^*})=x$ (边界条件);

(b) $\forall(x,y)\in(L^*)^2$, $\mathcal{T}(x,y)=\mathcal{T}(y,x)$(交换性);

(c) $\forall(x,y,z)\in(L^*)^3$, $\mathcal{T}(x,\mathcal{T}(y,z))=\mathcal{T}(\mathcal{T}(x,y),z)$(结合性);

(d) $\forall(x,x',y,y')\in(L^*)^4$, $x\leqslant_{L^*}x'$ 且 $y\leqslant_{L^*}y'\Rightarrow\mathcal{T}(x,y)\leqslant_{L^*}\mathcal{T}(x',y')$(单调性).

如果 $(L^*,\leqslant_{L^*},\mathcal{T})$ 是一具有单位 1_{L^*} 的 Abel 拓扑半群,则 $\mathcal{T}$ 称为连续的 t-范数.

定义 1.5[26] L^* 上的一连续 t-范数 $\mathcal{T}$ 称为连续 t-可表示的,如果在[0,1] 上存在一个连续的 t-范数 $*$ 及一个连续的 t-余范数 $\diamond$ 使得对所有的 $x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)\in L^*$,

$$\mathcal{T}(x,y)=(x_1*y_1,x_2\diamond y_2).$$

例如

$$\mathcal{T}(a,b)=(a_1b_1,\min\{a_2+b_2,1\})$$

和

$$M(a,b)=(\min\{a_1,b_1\},\max\{a_2,b_2\})$$

对全体 $a=(a_1,a_2),b=(b_1,b_2)\in L^*$ 都是连续 t-可表示的.

现在,我们由 $\mathcal{T}^1=\mathcal{T}$ 及

$$\mathcal{T}^n(x^{(1)},\cdots,x^{(n+1)})=\mathcal{T}(\mathcal{T}^{n-1}(x^{(1)},\cdots,x^{(n)}),x^{(n+1)}),\qquad\forall n\geqslant 2,x^{(i)}\in L^*$$

递推地定义序列 $\mathcal{T}^n$.

定义 1.6 L^* 上的负元素是一任意的减映象 $\mathscr{N}:L^* \to L^*$ 其满足条件：$\mathscr{N}(0_{L^*}) = 1_{L^*}$，$\mathscr{N}(1_{L^*}) = 0_{L^*}$. 如果 $\mathscr{N}(\mathscr{N}(x)) = x$ 对所有的 $x \in L^*$，则称 $\mathscr{N}$ 为一对合负元素. $[0,1]$ 上的负元素是一减映象 $N:[0,1] \to [0,1]$，其满足条件 $N(0) = 1, N(1) = 0$. 我们用 N_s 表 $[0,1]$ 上由下式定义的标准的负元素：

$$N_s(x) = 1 - x, \qquad \forall x \in [0,1].$$

定义 1.7 设 μ 和 ν 分别是由 $X \times (0, +\infty)$ 到 $[0,1]$ 的测度和非测度分布函数，使得对所有的 $x \in X$ 和 $t > 0$ 有 $\mu_x(t) + \nu_x(t) \leqslant 1$. 三元组 $(X, \mathscr{P}_{\mu,\nu}, \mathscr{T})$ 称为一直观的随机的赋范空间（简记为 IRN-空间），如果 X 是一向量空间，$\mathscr{T}$ 是连续的 t- 可表示的而且 $\mathscr{P}_{\mu,\nu}$ 是一由 $X \times (0, +\infty) \to L^*$ 的且满足下述条件的映象：对所有的 $x, y \in X$，$t, s > 0$，

(a) $\mathscr{P}_{\mu,\nu}(x,0) = 0_{L^*}$；

(b) $\mathscr{P}_{\mu,\nu}(x,t) = 1_{L^*}$ 当且仅当 $x = 0$；

(c) $\mathscr{P}_{\mu,\nu}(\alpha x,t) = \mathscr{P}_{\mu,\nu}(x, t/|\alpha|)$ 对所有 $\alpha \neq 0$；

(d) $\mathscr{P}_{\mu,\nu}(x+y, t+s) \geqslant_{L^*} \mathscr{T}(\mathscr{P}_{\mu,\nu}(x,t), \mathscr{P}_{\mu,\nu}(y,s))$.

在这种情形，$\mathscr{P}_{\mu,\nu}$ 称为一直观的随机范数，这里

$$\mathscr{P}_{\mu,\nu}(x,t) = (\mu_x(t), \nu_x(t)).$$

例 1.8 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一赋范空间. 设对所有的 $a = (a_1, a_2)$，$b = (b_1, b_2) \in L^*$ 有 $\mathscr{T}(a, b) = (a_1 b_1, \min(a_2 + b_2, 1))$，而 μ, ν 分别是由下式定义的测度和非-测度分布函数：

$$\mathscr{P}_{\mu,\nu}(x,t) = (\mu_x(t), \nu_x(t)) = \left(\frac{t}{t + \|x\|}, \frac{\|x\|}{t + \|x\|}\right), \qquad \forall t \in \mathbf{R}^+,$$

则 $(X, \mathscr{P}_{\mu,\nu}, \mathscr{T})$ 是一 IRN-空间.

定义 1.9 1) IRN-空间 $(X, \mathscr{P}_{\mu,\nu}, \mathscr{T})$ 中之序列 $\{x_n\}$ 称为 Cauchy 序列，如果对任意的 $\varepsilon > 0$ 及 $t > 0$，存在 $n_0 \in \mathbf{N}$ 使得

$$\mathscr{P}_{\mu,\nu}(x_n - x_m, t) >_{L^*} (N_s(\varepsilon), \varepsilon), \qquad \forall n, m \geqslant n_0,$$

其中 N_s 是标准的负元素.

2) 序列 $\{x_n\}$ 称为收敛于点 $x \in X$（记为 $x_n \xrightarrow{\mathscr{P}_{\mu,\nu}} x$），如果当 $n \to \infty$ 时，对每一 $t > 0$，$\mathscr{P}_{\mu,\nu}(x_n - x, t) \to 1_{L^*}$.

3) 一个 IRN-空间 $(X, \mathscr{P}_{\mu,\nu}, \mathscr{T})$ 称为完备的，如果 X 中每一个 Cauchy 序列都收敛于某一点 $x \in X$.

2 主要结果

定义 2.1 设 X, Y 是二向量空间. 由下式定义的泛函方程 $f:X \to Y$，

$$3f(x+3y) + f(3x-y) = 15f(x+y) + 15f(x-y) + 80f(y) \tag{2}$$

称为三次泛函方程.

定理 2.2 设 X 是一线性空间，$(Y, \mathscr{P}_{\mu,\nu}, \mathscr{T})$ 是一完备的 IRN-空间. 设 $f:X \to Y$ 是一映象 $f(0) = 0$ 且满足条件：存在 $\xi, \zeta: X^2 \to D^+$，（其中 $\xi(x,y)$ 记为 $\xi_{x,y}$，$\zeta(x,y)$ 记为 $\zeta_{x,y}$，$(\xi_{x,y}(t), \zeta_{x,y}(t))$ 记为 $Q_{\xi,\zeta}(x,y,t)$），使得

$$\begin{aligned}&\mathscr{P}_{\mu,\nu}(3f(x+3y) + f(3x-y) - 15f(x+y) - 15f(x-y) - 80f(y), t) \geqslant_{L^*} \\ &\quad Q_{\xi,\zeta}(x,y,t).\end{aligned} \tag{3}$$

如果

$$\mathcal{T}_{i=1}^{\infty}(Q_{\xi,\zeta}(3^{n+i-1}x,0,3^{3n+2i+1}t))=1_{L^*},\tag{4}$$

而且对所有的 $x,y\in X$ 和 $t>0$,

$$\lim_{n\to\infty}Q_{\xi,\zeta}(3^n x,3^n y,3^{3n}t)=1_{L^*},\tag{5}$$

则存在唯一的三次映象 $C:X\to Y$ 使得

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu}(f(x)-C(x),t)\geqslant_{L^*}\mathcal{T}_{i=1}^{\infty}(Q_{\xi,\zeta}(3^{i-1}x,0,3^{2i+2}t)).\tag{6}$$

证明　在式(3)中令 $y=0$, 于是有

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu}\left(\frac{f(3x)}{27}-f(x),t\right)\geqslant_{L^*}Q_{\xi,\zeta}(x,0,3^3t).\tag{7}$$

从而得知

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu}\left(\frac{f(3^{k+1}x)}{3^{3(k+1)}}-\frac{f(3^kx)}{3^{3k}},\frac{t}{3^{3k}}\right)\geqslant_{L^*}Q_{\xi,\zeta}(3^kx,0,3^3t).\tag{8}$$

上式表明

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu}\left(\frac{f(3^{k+1}x)}{3^{3(k+1)}}-\frac{f(3^kx)}{3^{3k}},t\right)\geqslant_{L^*}Q_{\xi,\zeta}(3^kx,0,3^{3(k+1)}t)\tag{9}$$

即

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu}\left(\frac{f(3^{k+1}x)}{3^{3(k+1)}}-\frac{f(3^kx)}{3^{3k}},\frac{t}{3^{k+1}}\right)\geqslant_{L^*}Q_{\xi,\zeta}(3^kx,0,3^{2(k+1)}t)\tag{10}$$

对所有的 $k\in\mathbf{N}$ 和 $t>0$ 成立. 因 $1>1/3+\cdots+1/3^n$, 于是由三角不等式得知

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\mu,\nu}\left(\frac{f(3^nx)}{27^n}-f(x),t\right)&\geqslant_{L^*}r\,\mathcal{P}_{\mu,\nu}\left(\frac{f(3^nx)}{27^n}-f(x),\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^{k+1}}t\right)\geqslant_{L^*}\\&\mathcal{T}_{k=0}^{n-1}\left(\mathcal{P}_{\mu,\nu}\left(\frac{f(3^{k+1}x)}{3^{3(k+1)}}-\frac{f(3^kx)}{3^{3k}},\frac{t}{3^{k+1}}\right)\right)\geqslant_{L^*}\\&\mathcal{T}_{i=1}^{n}(Q_{\xi,\zeta}(3^{i-1}x,0,3^{2i+2}t)).\end{aligned}\tag{11}$$

为了证明序列 $\{f(3^nx)/27^n\}$ 的收敛性,我们在式(11)中代 x 以 3^mx,于是对任意的 $m,n>0$ 有

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu}\left(\frac{f(3^{n+m}x)}{27^{(n+m)}}-\frac{f(3^mx)}{27^m},t\right)\geqslant_{L^*}\mathcal{T}_{i=1}^{n}(Q_{\xi,\zeta}(3^{i+m-1}x,0,3^{2i+3m+2}t)).\tag{12}$$

因为不等式的右端当 m 趋近无穷时趋近于 1_{L^*},故序列 $\{f(3^nx)/3^{3n}\}$ 是一个 Cauchy 列. 于是对 $x\in X$, 我们可以定义

$$C(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(3^nx)}{3^{3n}}.$$

现在证明 C 是一个三次映象. 事实上,在式(3)中,我们分别用 3^nx 和 3^ny 代替 x,y, 即得

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}_{\mu,\nu}\left(\frac{f(3^n(x+3y))}{27^n}+\frac{f(3^n(3x-y))}{27^n}-\frac{15f(3^n(x+y))}{27^n}-\right.\\&\left.\frac{15f(3^n(x-y))}{27^n}-\frac{80f(3^n(y))}{27^n},t\right)\geqslant_{L^*}Q_{\xi,\zeta}(3^nx,3^ny,3^{3n}t).\end{aligned}$$

让 $n\to\infty$ 取极限,得知对所有的 $x,y\in X$, C 满足方程(2).

为了证明式(6),只要在式(11)中让 $n\to\infty$ 取极限.

为了证明满足式(6)的三次函数 C 是唯一的,我们假定还存在另一个三次函数 C' 它也满足式(6). 显然, $C(3^nx)=3^{3n}C(x)$ 且 $C'(3^nx)=3^{3n}C'(x)$ 对所有的 $x\in X$ 及 $n\in\mathbf{N}$. 于是由式(6)和式(4)即得

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}_{\mu,\nu}(C(x)-C'(x),t)\geqslant_{L^*}\\&\quad\mathcal{P}_{\mu,\nu}(C(3^nx)-C'(3^nx),3^{3n}t)\geqslant_{L^*}\\&\quad\mathcal{T}(\mathcal{P}_{\mu,\nu}(C(3^nx)-f(3^nx),3^{3n-1}t),\mathcal{P}_{\mu,\nu}(f(3^nx)-C'(3^nx),3^{3n-1}t))\geqslant_{L^*}\\&\quad\mathcal{T}(\mathcal{T}_{i=1}^{\infty}(Q_{\xi,\zeta}(3^{n+i-1}x,0,3^{3n+2i+2}t)),\mathcal{T}_{i=1}^{\infty}(Q_{\xi,\zeta}(3^{n+i-1}x,0,3^{3n+2i+2}t)))=\\&\quad\mathcal{T}(1_{L^*},1_{L^*})=1_{L^*}\end{aligned}$$

对所有的 $x\in X$. 这就证明了 C 的唯一性. 证毕.

推论 2.3 设 $(X,\mathcal{P}'_{\mu',\nu'},\mathcal{T})$ 是一 IRN-空间,且 $(Y,\mathcal{P}_{\mu,\nu},\mathcal{T})$ 是一完备的 IRN-空间. 设 $f:X\to Y$ 是一映象,使得对 $t>0$ 有

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}_{\mu,\nu}(3f(x+3y)+f(3x-y)-15f(x+y)-15f(x-y)-80f(y),t)\geqslant_{L^*}\\&\quad\mathcal{P}'_{\mu',\nu'}(x+y,t),\end{aligned}$$

而且对所有的 $x,y\in X$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{T}_{i=1}^{\infty}(\mathcal{P}'_{\mu',\nu'}(3^{n+i-1}x,3^{3n+2i+1}t))=1_{L^*},$$

于是存在唯一的三次映象 $C:X\to Y$ 使得

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu}(f(x)-C(x),t)\geqslant_{L^*}\mathcal{T}_{i=1}^{\infty}(\mathcal{P}'_{\mu',\nu'}(3^{i-1}x,3^{2i+2}t)).$$

现在我们给出如下的一个例子,用以说明定理 2.2 的主要结果:

例 2.4 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是一 Banach 代数空间,$(X,\mathcal{P}_{\mu,\nu},M)$ 是一 IRN-空间,其中

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu}(x,t)=\left(\frac{t}{t+\|x\|},\frac{\|x\|}{t+\|x\|}\right),$$

$(Y,\mathcal{P}_{\mu,\nu},M)$ 是一完备的 IRN-空间对所有的 $x\in X$. 借助 $f(x)=x^3+x_0$ 定义映象 $f:X\to Y$,其中 x_0 是 X 中的一单位元. 直接计算得知

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}_{\mu,\nu}(3f(x+3y)+f(3x-y)-15f(x+y)-15f(x-y)-80f(y),t)\geqslant_{L^*}\\&\quad\mathcal{P}_{\mu,\nu}(x+y,t),\qquad\forall t>0.\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}M_{i=1}^{\infty}(\mathcal{P}_{\mu,\nu}(3^{n+i-1}x,3^{3n+2i+1}t))=\\&\quad\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}M_{i=1}^{m}(\mathcal{P}_{\mu,\nu}(x,3^{2n+i+2}t))=\\&\quad\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\mathcal{P}_{\mu,\nu}(x,3^{2n+3}t)=\\&\quad\lim_{n\to\infty}\mathcal{P}_{\mu,\nu}(x,3^{2n+3}t)=1_{L^*}.\end{aligned}$$

于是定理 2.2 中的所有条件成立,从而存在唯一的三次映象 $C:X\to Y$ 使得

$$\mathcal{P}_{\mu,\nu}(f(x)-C(x),t)\geqslant_{L^*}\mathcal{P}_{\mu,\nu}(x,3^4t).$$

致谢 作者们对审稿人为改进本文所提出的的宝贵意见表示衷心感谢.

参考文献:

[1] Ulam S M. *Problems in Modern Mathematics*[M]. Chapter VI, Science Editions. New York: Wiley, 1964.

[2] Hyers D H. On the stability of the linear functional equation[J]. *Proc Nat Acad Sci*, 1941, **27**(4): 222-224.

[3] Aoki T. On the stability of the linear transformation in Banach spaces[J]. *J Math Soc Japan*, 1950, **2**: 64-66.

[4] Rassias Th M. On the stability of the linear mapping in Banach spaces[J]. *Proc Amer Math*

Soc, 1978, **72**(2): 297-300.

[5] Baak C, Moslehian M S. On the stability of J^*-homomorphisms[J]. *Nonlinear Anal -TMA*, 2005, **63**(1): 42-48.

[6] Chudziak J, Tabor J. Generalized pexider equation on a restricted domain[J]. *J Math Psychology*, 2008, **52**(6): 389-392.

[7] Czerwik S. *Functional Equations and Inequalities in Several Variables*[M]. River Edge, NJ: World Scientific, 2002.

[8] Hyers D H, Isac G, Rassias Th M. *Stability of Functional Equations in Several Variables*[M]. Basel: Birkhäuser, 1998.

[9] Jung S M. *Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations in Mathematical Analysis*[M]. Palm Harbor: Hadronic Press, 2001.

[10] Rassias Th M. On the stability of functional equations and a problem of Ulam[J]. *Acta Appl Math*, 2000, **62**(1): 23-130.

[11] Rassias Th M. *Functional Equations, Inequalities and Applications*[M]. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[12] Jun K W, Kim H M. The generalized Hyers-Ulam-Rassias stability of a cubic functional equation[J]. *J Math Anal Appl*, 2002, **274**(2): 867-878.

[13] Jun K W, Kim H M, Chang I S. On the Hyers-Ulam stability of an Euler-Lagrange type cubic functional equation[J]. *J Comput Anal Appl*, 2005, **7**(1): 21-33.

[14] Mirmostafaee M, Mirzavaziri M, Moslehian M S. Fuzzy stability of the Jensen functional equation[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2008, **159**(6): 730-738.

[15] Mirzavaziri M, Moslehian M S. A fixed point approach to stability of a quadratic equation[J]. *Bull Braz Math Soc*, 2006, **37**(3): 361-376.

[16] Alsina C. On the stability of a functional equation arising in probabilistic normed spaces[J]. *General Inequalities*, 1987, **5**: 263-271.

[17] Miheţ D, Radu V. On the stability of the additive Cauchy functional equation in random normed spaces[J]. *J Math Anal Appl*, 2008, **343**(1): 567-572.

[18] Miheţ D, Saadati R, Vaezpour S M. The stability of the quadratic functional equation in random normed spaces[J]. *Acta Appl Math*. DOI: 10.1007/s10440-009-9476-7.

[19] Baktash E, Cho Y J, Jalili M, *et al*. On the stability of cubic mappings and quadratic mappings in random normed spaces[J]. *J Inequal Appl*, 2008. Article ID 902187.

[20] Chang S S, Cho Y J, Kang S M. *Nonlinear Operator Theory in Probabilistic Metric Spaces*[M]. New York: Nova Science Publishers, Inc, 2001.

[21] Hadžić O, Pap E. *Fixed Point Theory in PM-Spaces*[M]. Amsterdam, Holland: Kluwer Academic Publishers, 2001.

[22] 库图苏 S, 图纳 A, 雅库特 A T. 直觉 Menger 空间中的广义压缩映射原理及其在微分方程中的应用[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(6): 713-723.

[23] Schweizer B, Sklar A. *Probabilistic Metric Spaces*[M]. New York: Elsevier, North Holand, 1983.

[24] Šerstnev A N. On the notion of a random normed space[J]. *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1963, **149**(2): 280-283.

[25] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, **20**(1): 87-96.

[26] Deschrijver G, Kerre E E. On the relationship between some extensions of fuzzy set theory[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2003, **23**(2): 227-235.

Stability of the Cubic Functional Equation in Intuitionistic Random Normed Spaces

ZHANG Shi-sheng[1], John Michael Rassias[2], Reza Saadati[3]

(1. *Department of Mathematics*, *Yibin University*, *Yibin*, *Sichuan* 644007, *P. R. China*;

2. *Section of Mathematics and Informatics*, *Pedagogical Department*, *National and Capodistrian University of Athens*, 4, *Agamemnonos St.*, *Aghia Paraskevi*, *Athens* 15342, *Greece*;

3. *Department of Mathematics and Computer Science*, *Amirkabir University of Technology*, 424 *Hafez Avenue*, *Tehran* 15914, *Iran*)

Abstract: The purpose is first to introduce the notation of intuitionistic random normed spaces, and then by virtue of this notation to study the stability of a cubic functional equation in the setting of these spaces under arbitrary triangle norms. Furthermore, the interdisciplinary relation among the theory of random spaces, the theory of intuitionistic spaces and the theory of functional equations are also presented.

Key words: stability; cubic functional equation; random normed space; intuitionistic random normed spaces