

非完整性多体编队运动的一种 无源化控制方法*

吴凡, 耿志勇

(北京大学 湍流与复杂系统国家重点实验室,力学与空天技术系,北京 100871)

(陈立群推荐)

摘要: 讨论了非完整性多体编队运动问题.首先利用动态反馈将单个体的动力学模型线性化为2个三阶输入输出积分链的形式;然后提出一种带有单个体间阻尼注入的非连续分布式控制律,并利用 Liapunov 方法证明了在该控制律作用下闭环系统的渐进稳定性;最后通过一个平面机器人的编队运动仿真验证了所提方法的有效性.

关键词: 非完整性个体; 编队; 完全状态线性化; 无源性

中图分类号: V412.4 **文献标志码:** A

DOI:10.3879/j.issn.1000-0887.2010.01.004

引言

多体的编队运动问题,近年来受到广泛关注是由于其带来的理论挑战和众多实际应用,诸如:协同营救、合作移动大目标体、围猎捕获、卫星群集,等等.

编队运动控制问题与一致性问题紧密相连.现在对于由多个线性系统构成的多体一致性问题,利用代数图论结果,已存在有效的协调解法^[1-2].在这些文献中,单个线性系统表示为图中的1个节点,各线性系统之间的通信连接表示为图中的边,整个多体间的通信网络结构由图的 Laplacian 矩阵刻画.如此构成的多体系统的稳定性,可以由经过修改的单个线性系统的稳定性保证,这种修改体现了多体系统通信网络的结构信息.

然而,许多实际编队运动中涉及的单个体都是非线性的,甚至还受到非完整性约束.文献[3]中指出非完整性系统是不存在连续、静态的状态反馈镇定律.文献[4]采用了分布式连续、时变状态反馈控制律实现了多个非完整性小车的编队协调控制,并采用平均化理论证明了多体系统的稳定性.文献[5]通过输出变量的巧妙选择,将非完整性约束转化成完整性约束,在状态变换和输入变换下实现了输入输出线性化,将编队问题转化成单个体为双积分器线性模型的多体协调控制问题.对于多体协调控制,至今已形成几种通用模式,如:基于行为的控制^[6]、虚拟结构方法^[7]、主从方式^[8]方法.

本文针对具有非完整性约束的多体编队运动控制问题,提出一种采用无源性技术的方法.

* 收稿日期: 2009-04-14;修订日期: 2009-11-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10832006)

作者简介: 吴凡(1982—),男,江苏人,博士生(联系人. Tel: +86-10-62741029; E-mail: wufan@ pku.edu.cn).

首先,我们推广文献[9]中的完全状态线性化方法,将单个体的动力学模型线性化为2个三阶输入输出积分链的形式;接着,我们将单个体看作为MIMO线性系统,采用文献[10]中的一致性策略获得多体的编队机动;我们再利用无源化方法,在该一致性控制律上注入相对速度阻尼,以消除单个体间相对运动的振荡以及编队运动的稳态误差;最后利用Liapunov方法证明闭环系统的渐进稳定性。

本文的目标是尝试将非完整性系统的非连续状态反馈控制律与多个MIMO线性系统的一致性控制律结合起来,以获得有效的非完整性多体编队运动的控制策略,该控制律具有指数收敛速度并且依赖较少的单个体间通信。

本文按如下结构展开:第1节简要介绍代数图论中的一些相关知识;第2节对单个体的动力学模型进行完全状态线性化;第3节给出本文中编队运动控制的主要结果;第4节给出仿真结果;最后,总结全文并指出未来的研究方向。

1 预备知识

图可以有效地表示网络结构.阶数为 N 的图 $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{A})$ 由节点 $\mathbf{V} \{v_1, \dots, v_N\}$ 和边 $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ 组成.边 (v_i, v_j) 表示为由节点 v_j 指向节点 v_i 的线段.节点 v_i 的相邻节点记作: $N_i = \{v_j \in \mathbf{V}: (v_i, v_j) \in \mathbf{A}\}$.在多体系统中,节点 v_i 代表其中的单个体 i ,边 (v_i, v_j) 代表单个体 j 传送信息至单个体 i .图的Laplace矩阵表示为 $\mathbf{L} = [l_{ij}]$:

$$l_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij}, \quad l_{ij} = -a_{ij} \quad (i \neq j),$$

式中

$$a_{ij} = 1 \quad (v_j \in N_i), \quad a_{ij} = 0 \quad (v_j \notin N_i).$$

强连通图的Laplace矩阵有如下性质^[11]:

- 1) \mathbf{L} 有唯一的零特征值;
- 2) \mathbf{L} 的所有特征值均非负;
- 3) \mathbf{L} 关于零特征值的特征向量是元素全为1的列向量;
- 4) \mathbf{L} 的所有特征值可表示为

$$0 = \lambda_1(\mathbf{L}) < \lambda_2(\mathbf{L}) \leq \dots \leq \lambda_N(\mathbf{L}).$$

2 节点动力学模型及完全状态线性化

我们以复杂网络的观点考虑具有非完整性约束的多体编队运动控制问题.将整个多体系统看成一个网络,将其中受非完整性约束的单独个体(以下简称“单体”)看成网络中的1个节点,假设单体 i 服从如下节点动力学方程^[5]:

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_{xi} \\ \dot{r}_{yi} \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{\omega}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i \cos \theta_i \\ v_i \sin \theta_i \\ \omega_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/m_i & 0 \\ 0 & 1/J_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \\ \tau_i \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其受到一阶非完整性约束^[4,9]:

$$\dot{r}_{xi} \sin \theta - \dot{r}_{yi} \cos \theta = 0.$$

从物理意义上讲,这里的非完整性约束意味着对象的瞬时速度不能沿横向漂移,因而减少了瞬

时运动能力. 例如现实生活中的汽车不能实现瞬时的横向运动.

我们在惯性系中, 用 $\{r_{xi}, r_{yi}\}^T$ 表示单体 i 的质心位置, 用 θ_i 表示其姿态; v_i 与 ω_i 表示单体 i 的线速度与角速度的大小; τ_i 表示施加力矩, F_i 表示施加力; m_i 表示单体 i 的质量, J_i 表示单体 i 的惯量. 为简便起见, 本文考虑单位质量与惯量, 令单体 i 的输出为

$$\mathbf{h}_i = \begin{bmatrix} r_{xi} \\ r_{yi} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

不同于文献[5]中的输入输出线性化方法, 其需要输出变量的巧妙选择, 我们推广文献[9]中的动态反馈线性化方法, 引入变量 $\xi_i = v_i$:

$$\dot{\mathbf{h}}_i = \begin{bmatrix} \xi_i \cos\theta_i \\ \xi_i \sin\theta_i \end{bmatrix}. \quad (3)$$

将式(3)对时间求导:

$$\ddot{\mathbf{h}}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\xi_i \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \xi_i \cos\theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix}. \quad (4)$$

再次求导:

$$\ddot{\mathbf{h}}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\xi_i \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \xi_i \cos\theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_i \\ \ddot{\theta}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin\theta_i \cdot \dot{\theta}_i & -\dot{\xi}_i \sin\theta_i - \xi_i \cos\theta_i \cdot \dot{\theta}_i \\ \cos\theta_i \cdot \dot{\theta}_i & \dot{\xi}_i \cos\theta_i - \xi_i \sin\theta_i \cdot \dot{\theta}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix}. \quad (5)$$

若 $\xi_i \neq 0$, 动态反馈线性化控制律如下:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\xi}_i \\ \ddot{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\xi_i \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \xi_i \cos\theta_i \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sin\theta_i \cdot \dot{\theta}_i & -\dot{\xi}_i \sin\theta_i - \xi_i \cos\theta_i \cdot \dot{\theta}_i \\ \cos\theta_i \cdot \dot{\theta}_i & \dot{\xi}_i \cos\theta_i - \xi_i \sin\theta_i \cdot \dot{\theta}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix}. \quad (6)$$

得到完全线性化系统:

$$\ddot{\mathbf{h}}_i = \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

式中 $\mathbf{u}_i = [u_{1i} \ u_{2i}]^T$ 是三阶积分器系统的新的输入. 相应的动态补偿器如下:

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_i = \cos\theta_i \cdot s_{1i} + \sin\theta_i \cdot s_{2i}, \\ F_i = \dot{\xi}_i, \\ \tau_i = \dot{\omega}_i = \frac{1}{\xi_i} (-\sin\theta_i \cdot s_{1i} + \cos\theta_i \cdot s_{2i}), \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} s_{1i} &= u_{1i} + 2\sin\theta_i \cdot \omega_i \cdot \dot{\xi}_i + \xi_i \cdot \cos\theta_i \cdot \omega_i^2, \\ s_{2i} &= u_{2i} - 2\cos\theta_i \cdot \omega_i \cdot \dot{\xi}_i + \xi_i \cdot \sin\theta_i \cdot \omega_i^2. \end{aligned}$$

我们假定动态补偿器(8)的输出: 施加力与施加力矩, 可以由物理装置理想实现.

原系统(1)中具有 5 个状态变量, 动态补偿器(8)中增加了 1 个状态变量. 所有 6 个状态变量均在线性化系统(7)中出现, 因此没有遗留任何内动态(不同于文献[5]).

动态补偿器(8)存在着潜在的奇异性, 即 $\xi_i = 0$ 也就是个体停止运动时, 并导致了补偿器(8)的非连续性. 这属于非完整系统的结构奇异性^[3]. 当使用线性模型(7)时, 必须要设法避免这种奇异性. 假设个体要跟踪 1 条期望轨迹 $(x_d(t), y_d(t))$, 针对这条轨迹可以很容易地设

计出指数渐进收敛控制律:

$$u_1 = \overset{\dots}{x}_d + k_{p1}(x_d - x) + k_{d1}(\dot{x}_d - \dot{x}) + k_{a1}(\ddot{x}_d - \ddot{x}),$$

$$u_2 = \overset{\dots}{y}_d + k_{p2}(y_d - y) + k_{d2}(\dot{y}_d - \dot{y}) + k_{a2}(\ddot{y}_d - \ddot{y}).$$

应选择式中的控制增益满足多项式:

$$s^3 + k_{ai}s^2 + k_{di}s + k_{pi} = 0, \quad i = 1, 2$$

是 Hurwitz 的.

令 $e_x = x_d - x$, $e_y = y_d - y$, 记 $e = \{e_x, e_y\}$, 用 λ_{xi} , λ_{yi} ($i = 1, 2, 3$) 代表闭环系统的特征值. 求解闭环误差动力学方程的解, 可以得到

$$\dot{e}_x(t) = a_{x1}\exp(\lambda_{x1}t) + a_{x2}\exp(\lambda_{x2}t) + a_{x3}\exp(\lambda_{x3}t),$$

$$\dot{e}_y(t) = a_{y1}\exp(\lambda_{y1}t) + a_{y2}\exp(\lambda_{y2}t) + a_{y3}\exp(\lambda_{y3}t),$$

式中的常数 a_{xi} , a_{yi} 的取值由初始条件 ($e(0), \dot{e}(0), \ddot{e}(0)$) 以及特征值 λ_{xi} , λ_{yi} ($i = 1, 2, 3$) 确定. 合理选择控制增益, 可以使 $|\lambda_{x2}|$, $|\lambda_{y2}|$ 充分小, 而且成立

$$\left\| \begin{matrix} \dot{e}_x(t) \\ \dot{e}_y(t) \end{matrix} \right\| \leq \left\| \begin{matrix} \dot{e}_x(0) \\ \dot{e}_y(0) \end{matrix} \right\|, \quad \forall t \geq 0. \quad (9)$$

既然有

$$|\xi| = \left\| \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \dot{x}_d - \dot{e}_x \\ \dot{y}_d - \dot{e}_y \end{pmatrix} \right\| \geq \left\| \begin{pmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \end{pmatrix} \right\| - \left\| \begin{pmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \end{pmatrix} \right\|,$$

这种奇异性可以避免, 如果如下不等式满足

$$\min_{t \geq 0} \left\| \begin{pmatrix} \dot{x}_d(t) \\ \dot{y}_d(t) \end{pmatrix} \right\| > \left\| \begin{pmatrix} \dot{e}_x(0) \\ \dot{e}_y(0) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \dot{x}_d(0) - \xi_0 \cos(\theta_0) \\ \dot{y}_d(0) - \xi_0 \sin(\theta_0) \end{pmatrix} \right\|. \quad (10)$$

因此, 我们应先选择控制增益, 满足式(9), 再选择补偿器的初始值 ξ_0 使式(10)成立. 在渐进跟踪的初始过渡阶段, 很容易出现奇异性, 这种预先增益选择与初始化尤为重要.

给定 1 条期望跟踪路径, 总能通过速度整定的方法^[9], 使得如下不等式成立:

$$\min_{t \geq 0} \left\| \begin{pmatrix} \dot{x}_d(t) \\ \dot{y}_d(t) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \dot{x}_d(0) \\ \dot{y}_d(0) \end{pmatrix} \right\|. \quad (11)$$

在这种情况下, 我们可以这样初始化补偿器, 以满足不等式(10):

$$\xi_0 = \dot{x}_d(0) \cos \theta_0 + \dot{y}_d(0) \sin \theta_0.$$

在构型空间中 1 点的镇定问题中, 如果目标构型给当前初始构型造成了补偿器的奇异性, 则在构型空间中引入中间过渡点可以解决奇异性问题. 只要初始构型到中间过渡构型, 再到目标构型的依次镇定中不产生补偿器奇异性即可. 例如文献[9]中的平行停车问题, 通过增加 1 个中间过渡位姿, 汽车可以顺利的停泊在平行与初始位置的目标位置上.

3 编队运动控制

我们采用基于行为的控制方法^[5]来实现多体的编队运动控制. 定义误差函数 E_g , 描述 N 个单体当前位置与期望位置的总误差:

$$E_g = \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{h}}_i^T \mathbf{K}_g \bar{\mathbf{h}}_i, \quad (12)$$

式中 $\bar{\mathbf{h}}_i = \mathbf{h}_i - \mathbf{h}_i^d \in R^2$, 如图 1 所示, $\mathbf{K}_g \in R^{2 \times 2}$ 对称正定. 图 1 描述了平面上 3 个个体的编队运

动。

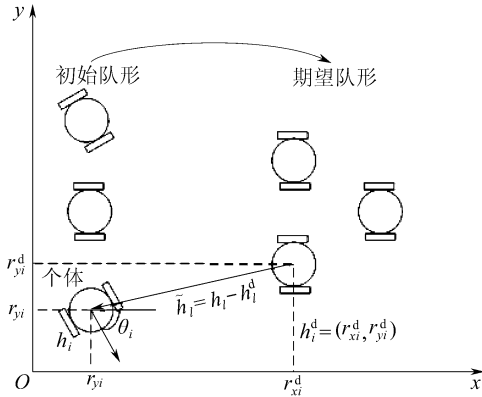


图 1 具有非完整性约束的多体编队

制误差函数(14)渐进收敛到0。

为达到编队运动目标,作状态变换

$$X_i = \begin{bmatrix} h_i - h_i^d \\ \dot{h}_i - \dot{h}_i^d \\ \ddot{h}_i - \ddot{h}_i^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{h}_i \\ \dot{\tilde{h}}_i \\ \ddot{\tilde{h}}_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (15)$$

易证,编队运动控制问题等价于以下一致性问题:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \mathbf{1} \otimes \alpha,$$

式中

$$X = [X_1^T, \dots, X_N^T]^T, \mathbf{1} = \underbrace{[1, \dots, 1]}_N^T, \alpha = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \in R^6.$$

我们从单体状态空间模型入手:

$$\dot{X}_i = AX_i + Bu_i, \tilde{h}_i = CX_i, \quad (16)$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes I_2, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes I_2, C = [1 \ 0 \ 0] \otimes I_2,$$

I_n 是 n 阶单位矩阵,符号 \otimes 表示 Kronecker 积.明显系统 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ 可控可观.整个多体的状态空间表达式为

$$\dot{X} = (I_N \otimes A)X + (I_N \otimes B)u, \tilde{h} = (I_N \otimes C)X. \quad (17)$$

我们首先利用文献 [11] 中的一致性算法

$$u = -(L \otimes K)x,$$

通过这样的状态反馈,式(17)可表达为

$$\dot{X} = ((I_N \otimes A) - (L \otimes BK))X. \quad (18)$$

引理 1^[10] 假设 $A_e + A_e^T > 0$, 多体间通信网络图强连通,系统(17)可控可观.则式(18)达到状态一致值: $\alpha = N^{1/2} \exp(At) (I_1^T \otimes I_N) X(0)$, 仅当存在正定矩阵 P , 增益矩阵 K 满足

类似可定义编队误差函数 E_f :

$$E_f = \sum_i \sum_{j \in N_i} (\bar{h}_i - \bar{h}_j)^T K_f (\bar{h}_i - \bar{h}_j), \quad (13)$$

式中 $K_f \in R^{2 \times 2}$ 正定.假设个体之间的通信拓扑图是强连通的,因此 $E_g = 0$ 当且仅当所有单体均达到期望编队位置; E_f 衡量了所有单体在运动过程中,队形变形的程度, $E_f = 0$ 当且仅当所有单体在运动中编成期望队形.编队运动控制的总误差函数定义为

$$E = E_g + E_f. \quad (14)$$

式(12)和(13)中 K_f, K_g 用于权衡目标收敛速度与队形保持效果.编队运动控制的目标可表示为控

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \lambda_1 (\mathbf{A}_e \mathbf{A}_e^T) \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P} < \mathbf{0},$$

$$\mathbf{K} = \frac{\lambda_{N-1} (\mathbf{A}_e \mathbf{A}_e^T)}{\lambda_1 (\mathbf{A}_e \mathbf{A}_e^T)} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (\text{有向通信网络图}),$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \lambda_N (\mathbf{L}) \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (\text{无向通信网络图}),$$

式中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_e \end{bmatrix} = \mathbf{S} \mathbf{L} \mathbf{S}^{-1}$, \mathbf{S} 是任意规则矩阵且第 1 行为 $(N^{-1/2} \mathbf{1})^T$, \mathbf{l}_i 是 \mathbf{L} 关于零特征值的左特征向量并满足: $\mathbf{l}_i^T N^{-1/2} \mathbf{1} = 1$.

文献[10]中的实验结果表明,在有向通信网络结构图的情况下,多体的状态会出现非零的一致值,导致编队的稳态误差和单体间相对运动的振荡.这个问题可以通过引入一个状态恒为 0 的虚拟单体,从而将一致值控制到 0 来解决.在这里,我们利用单体间阻尼注入技术^[12-13].

由于映射 $\mathbf{u}_i \rightarrow \dot{\tilde{\mathbf{h}}}_i$ 是无源的,所以反馈回路 $\dot{\tilde{\mathbf{h}}}_i \rightarrow \mathbf{u}_i$ 必须是严格无源的.我们构造一个从 $\dot{\tilde{\mathbf{h}}}_i$ 到 \mathbf{u}_i 的严格正实的线性系统 $\mathbf{C}(s)$:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\chi}}_i &= \mathbf{A}_p \boldsymbol{\chi}_i + \tilde{\mathbf{h}}_i, \\ \mathbf{z}_i &= \mathbf{C}_p \boldsymbol{\chi}_i. \end{aligned}$$

根据 KYP 引理^[14],存在正定矩阵 \mathbf{P} 和 \mathbf{Q} 满足

$$\mathbf{A}_p^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_p = -\mathbf{Q}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{C}_p^T. \quad (19)$$

映射 $\tilde{\mathbf{h}}_i \rightarrow \mathbf{u}_i$ 可以表示为

$$s\mathbf{C}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & \mathbf{I} \\ \mathbf{P} \mathbf{A}_p & \mathbf{P} \end{bmatrix}.$$

单体的增广状态空间模型为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_i \\ \dot{\boldsymbol{\chi}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \mathbf{K} \\ \mathbf{C} & \mathbf{A}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i \\ \boldsymbol{\chi}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_i, \quad \tilde{\mathbf{h}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i \\ \boldsymbol{\chi}_i \end{bmatrix}.$$

再次使用引理 1,我们给出带有阻尼注入的多体一致性控制律:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\chi}}_i = \mathbf{A}_p \boldsymbol{\chi}_i + \tilde{\mathbf{h}}_i, \\ \mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_g \cdot \tilde{\mathbf{h}}_i - \mathbf{D} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{h}}}_i - \mathbf{A}_c \tilde{\tilde{\mathbf{h}}}_i - \mathbf{K}_f \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\tilde{\mathbf{h}}_i - \tilde{\mathbf{h}}_j) - \mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{h}}_i - \mathbf{P} \mathbf{A}_p \cdot \boldsymbol{\chi}_i, \end{cases} \quad (20)$$

式中 \mathbf{P} 满足式(19),且

$$\mathbf{A}_c = k_1 \otimes \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{D} = k_2 \otimes \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{K}_g = k_3 \otimes \mathbf{I}_2, \quad k_i > 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

其中,多项式 $s^3 + k_1 s^2 + k_2 s + k_3 = 0$ 满足 Hurwitz 准则.

注 1 注意到在控制律中出现了单体的速度、加速度,既然需要这些信息进行动态反馈线性化,我们假设它们可以获得.

注 2 动态控制器的状态 $\boldsymbol{\chi}_i$ 在某种意义上代表了单体间相对速度的估计,起到了阻尼注入的作用,以消除单体间相对运动的振荡和编队的稳态误差.这种阻尼注入的方法利用了受控力学系统的本征无源性,使整个群体闭环系统耗散,而耗散系统的稳定性具有针对外界扰动的鲁棒性.此外,阻尼注入法避免了相对个体间相对速度的测量与通信,或者是构建相对速度观测器时,类似分离定理的证明,因而简化了设计.

定理 1 如果对由式(1)构成的多体系统施加控制策略(8)和(20),那么误差函数(14)将渐进收敛到 0.

证明 将受控系统写成紧凑形式:

$$\begin{cases} \dot{\chi} = (I_N \otimes A_p)\chi + \tilde{h}, \\ \mathbf{u} = - [(I_N \otimes K_g) + (L \otimes K_f) + (I_N \otimes P)] \cdot \tilde{h} - \\ (I_N \otimes D)\dot{\tilde{h}} - (I_N \otimes A_c)\ddot{\tilde{h}} - (I_N \otimes P) \cdot (I_N \otimes A_p)\chi. \end{cases} \quad (21)$$

构造 Liapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}\tilde{h}^T(I_N \otimes K_g + L \otimes K_f)\tilde{h} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{h}}^T\dot{\tilde{h}} + \frac{1}{2}\ddot{\tilde{h}}^T\ddot{\tilde{h}} + \frac{1}{2}\chi^T(I_N \otimes P)\chi, \quad (22)$$

其对时间的一阶导数是

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \dot{\tilde{h}}^T [(I_N \otimes K_g + L \otimes K_f)\tilde{h} + \dot{\tilde{h}}] + \dot{\tilde{h}}^T \cdot \mathbf{u} + \\ & \frac{1}{2}\ddot{\chi}^T(I_N \otimes P)\dot{\chi} + \frac{1}{2}\dot{\chi}^T(I_N \otimes P)\ddot{\chi}, \end{aligned} \quad (23)$$

式中 $\dot{\chi} = (I_N \otimes A_p)\chi + \dot{\tilde{h}}$, 利用等式:

$$(I_N \otimes P)(I_N \otimes A_p) + (I_N \otimes A_p)^T(I_N \otimes P) = -(I_N \otimes Q)$$

和控制律式(21), 得到

$$\dot{V} = -\dot{\tilde{h}}^T A_c \ddot{\tilde{h}} - \dot{\tilde{h}}^T D \dot{\tilde{h}} - \dot{\chi}^T (I_N \otimes Q) \dot{\chi} \quad (24)$$

是半负定的. 定义

$$\Omega = \{(\tilde{h}, \dot{\tilde{h}}, \ddot{\tilde{h}}, \dot{\chi}), \dot{V} = 0\},$$

令 Ω^- 为 Ω 中的最大不变子集. 在 Ω^- 上, 我们有 $\mathbf{u} = 0$, 因此, 式(21)表明如下两等式成立:

$$(I_N \otimes A_p)\chi + \tilde{h} = 0,$$

$$[(I_N \otimes K_g) + (L \otimes K_f) + (I_N \otimes P)]\tilde{h} + (I_N \otimes P)(I_N \otimes A_p)\chi = 0.$$

将两式组合, 可得

$$[(I_N \otimes K_g) + (L \otimes K_f)]\tilde{h} = 0, \quad (25)$$

由 LaSalle 不变原理^[14]可以得到系统的渐进稳定性.

4 仿 真

我们考虑 4 个具有非完整性约束的单体编队运动控制问题, 其中每个单体是受非完整性约束的轮式小车, 动力学模型满足式(1). 它们之间的通信拓扑结构固定, 如图 2 所示.

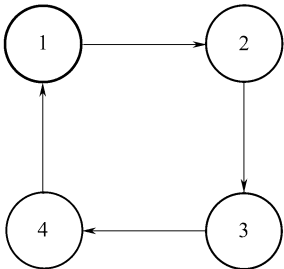


图 2 单体之间通信拓扑图

4 个小车的初始位姿 $(r_{xi}, r_{yi}, \theta_i)$ 分别为: $(-2, 2, 0), (-2, 1, 0), (-2, -1, 0), (-2, -2, 0)$. 我们首先规划 4 车编队成紧密队形: $(0, 0.5, 0), (0.5, 0.25, 0), (0.5, -0.25, 0), (0, -0.5, 0)$; 然后保持队形以 0.25 m/s 的速度沿 x 轴方向前进.

设定动态控制器初始值为

$$v_i(0) = v_{\max} = 0.3 \text{ m/s}, \quad \xi_i(0) = v_i(0),$$

$$\dot{\xi}_i(0) = F_{\max} = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}.$$

设定控制器参数为

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 7, \quad k_3 = 2.$$

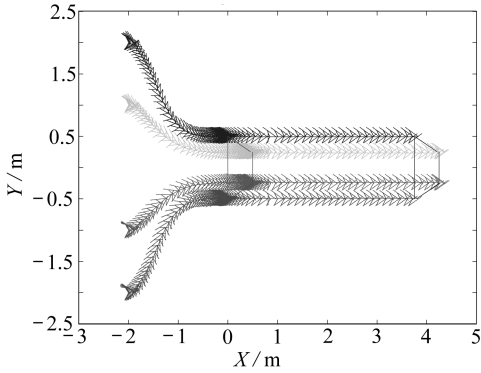


图 3 4 个非完整性小车的编队运动

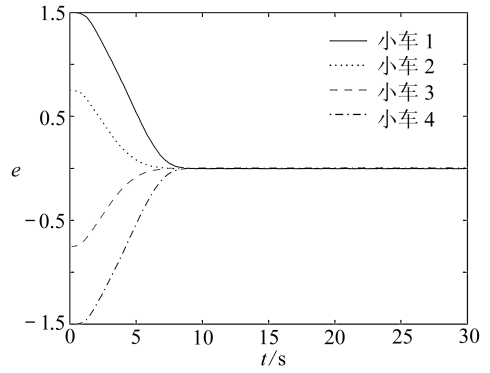


图 4 一致性状态误差

为了避免动态补偿器出现奇异情况,即式(3)中 $\xi = 0$,文献[9]给出了控制增益所需满足的充分条件使各状态变量具有合适、相对指数收敛速度,保证 v 在有限时间内不趋于 0, ω 总是有界。这里,我们采用一种更为直观、简单的方法:重设 ξ 值当其低于给定阈值。

可以证明,状态变量 v, ω 指数收敛到 0 的一个结果就是小车的姿态变量 θ 也以指数速度收敛到 0。仿真结果如图 3 和图 4 所示。

实际情形中,当小车的速度存在有界约束时:

$$\begin{aligned} |v| &\leq v_{\max} = 0.3 \text{ m/s}, \\ |\omega| &\leq \omega_{\max} = 0.5 \text{ rad/s}, \end{aligned}$$

我们采用文献[9]中的方法,进行速度度量,保证度量后速度的曲率半径等于算法得到的标称速度输入 v, ω 的曲率半径。实际速度输入如图 5 所示。

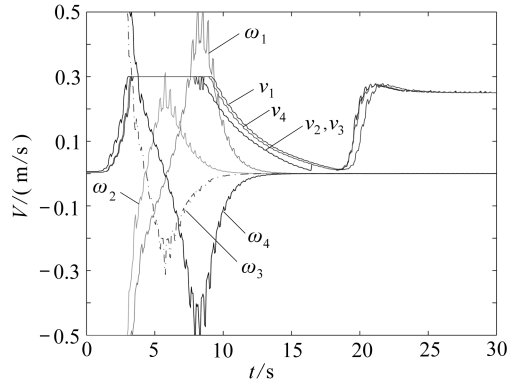


图 5 有界速度输入

6 结 论

本文针对具有非完整性约束的多个体的编队运动提出了一种利用无源性技术的控制策略。首先,我们通过构造动态补偿器将单体动力学模型进行完全状态线性化;其次,我们在线性化模型上得到分布式非连续编队运动控制律;接着,我们采用阻尼注入技术解决了控制中存在的单体间相对运动振荡和编队稳态误差问题。最后,我们利用 Liapunov 方法证明了闭环系统的渐进稳定性。我们通过一个非完整性多体的编队运动控制仿真,验证了所提控制策略的有效性。值得进一步研究的内容包含针对单体模型不确定性以及通信时延情况下的鲁棒控制策略的设计。

参考文献:

- [1] Saber R O, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1520-1533.
- [2] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(5): 655-661.
- [3] Brockett R W, Millman R S, Sussamann H J. *Differential Geometric Control Theory*[M].

- Cambridge M A; Birkhauser Boston, 1983.
- [4] Yamaguchi H. A distributed motion coordination strategy for multiple nonholonomic mobile robots in cooperative hunting operations [J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2003, **43** (7): 257-282.
- [5] Lawton J, Beard R W, Young B. A decentralized approach to formation maneuvers [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **19**(2): 933-941.
- [6] Balch T, Arkin R C. Behavior-based formation control for multi-robot teams [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1998, **14**(7): 926-939.
- [7] Ren W, Beard R W. Formation feedback control for multiple spacecraft via virtual structures [J]. *IEEE Proceedings Control Theory and Applications*, 2004, **15**(1): 357-368.
- [8] Mesbahi M, Hadaegh F Y. Formation flying control of multiple spacecraft via graphs, matrix inequalities, and switching [J]. *AIAA J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001, **24**(6): 369-377.
- [9] Oriolo G, De Luca A, Vendittelli M. WMR control via dynamic feedback linearization: design, implementation and experimental validation [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2002, **10**(5): 835-852.
- [10] Namerikawa T, Yoshioka C. Consensus control of observer-based multi-agent system with communication delay [J]. *SICE Annual Conference*, 2008, **1**(1): 2414-2419.
- [11] Saber R O, Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems [J]. *Proceedings of IEEE*, 2007, **95**(1): 1520-1533.
- [12] Lizarralde F, Wen J. Attitude control without angular velocity measurement: a passivity approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(7): 468-472.
- [13] Tsiotras P. Further passivity results for attitude control problem [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(2): 1597-1600.
- [14] Khalil H K. *Nonlinear Systems* [M]. Upper Saddle River. NJ: Prentice-Hall, 2002.

Formation Control for Nonholonomic Agents Using Passivity Techniques

WU Fan, GENG Zhi-yong

(*State Key Laboratory for Turbulence and Complex Systems, Department of Mechanics and Aerospace Engineering, Peking University, Beijing 100871, P. R. China*)

Abstract: The problem of formation control for multiple nonholonomic agents on a plane was studied. A dynamic feedback linearization method was used to transform each agent's dynamical model into two third-order integrator chains. Then a decentralized formation control law with inter-agent damping injection was derived. Asymptotical stability of the overall system was proved by Liapunov method. Simulation for a planar vehicles' formation maneuver shows the effectiveness of the proposed strategy.

Key words: nonholonomic agents; formation; full-state linearization; passivity