

多重胞元和规则多重分形^{*}

殷雅俊^{1,2}, 李颖¹, 杨帆¹, 范钦珊²

(1. 清华大学 航天航空学院 工程力学系,北京 100084;

2. 南京工业大学 力学部,南京 211816)

(周哲玮推荐)

摘要: 以超级分形纤维和双重分形纤维的研究结果为基础,达成了如下目标:首先,归纳、抽象出了多重胞元概念;其次,基于多重胞元概念,证实:具有严格自相似性的规则多重分形,不仅是可构造的,而且其构造模式具有普遍性;再者,通过分析构造模式,发现:任何规则多重分形,都可以在多重胞元意义下,被精确地等价成具有多重精细结构的广义单重分形.而基于这种等价性,单重分形维数公式就能够推广至规则多重分形维数公式,单重分形几何就能够推广至规则多重分形几何;最后,借助规则多重分形,构造了几种黄金分形.

关键词: 双重分形纤维; 双重胞元; 规则双重分形; 多重胞元; 规则多重分形

中图分类号: Q811.6;O184 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.01.006

引言

近期,在研究超级分形纤维^[1-4]时,我们受羊毛纤维和人类毛发^[5-7]多重结构的启发,定义了双重分形纤维概念^[7].所谓的超级分形纤维,是横截面为自相似分形图案的纤维,由此抽象出的分形,是具有严格自相似性的单重分形.同理,双重分形纤维,是横截面为双重自相似分形图案的纤维,由此抽象出的分形,是具有严格自相似性的双重分形^[7].

由文献[7]中的归纳和抽象过程可知,源自双重分形纤维的双重分形,本质上是规则双重分形.规则双重分形的本征特性是严格的双重自相似性.所谓的双重自相似性,是指规则双重分形中的每一重结构,都来自严格自相似的单重分形.以此类推,规则多重分形,应该满足严格的多重自相似性.确切地说,规则 m 重分形,应该满足严格的 m 重自相似性.

多重分形并不是个新概念.多重分形也称为多标度分形(multifractal)或分形测度(fractal measure)^[8].多标度分形概念的雏形^[9],最早于1968年出现在Mandelbrot的湍流研究论文中.1983年,Grassberger^[10],Hentschel和Procaccia^[11]在研究奇异吸引子时,发展了多标度分形概念,用广义维数和多重分形谱刻画分形结构,建立了多标度分形理论.1985年,Frisch和Parisi^[12]及Benzi等^[13]分别运用多标度分形概念分析实验结果.1986年,Halsey等^[14]和Bensimon等^[15]应用多标度分形理论,研究了扩散限制的凝聚集团(diffusion-limited aggregation)等分形

* 收稿日期: 2009-07-09; 修订日期: 2009-11-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10872114);江苏省自然科学基金资助项目(BK2008370)

作者简介: 殷雅俊(1964—),男,河南人,教授,博士,博士生导师(联系人. Tel: +86-10-62795536; E-mail: yinyj@tsinghua.edu.cn).

结构.1986年和1987年,Feigenbaum等^[16-17]在Ising模型的研究中,建立了多标度分形热力学.

从背景看,过去的多重分形,大都产生于非线性动力学演化过程,大都可以被归类为随机多重分形.随机多重分形普遍存在于自然界和众多学科领域中.然而,与大量的随机多重分形相比,规则多重分形很少见诸于文献.文献中偶尔提及的规则多重分形(例如双标度Cantor集^[8]),也都是经典的规则单重分形扩展而来的产物.从逻辑上看,规则多重分形是随机多重分形的特殊情形,应该更简单,但为什么如此稀少?我们推测原因如下.

规则多重分形与规则单重分形(例如Cantor集、Koch曲线和Sierpinski垫片)一样,是纯粹几何意义上的结构,具有理想性、抽象性、严格性和精确性.其理想性和抽象性,决定了它们的两面特征:一方面,它们来自于自然,是从自然界中抽象出来的(例如双重分形纤维^[7]);另一方面,它们又“远离”自然,在自然界中并不“真的”存在.这种理想性和抽象性,使得它们很难引起众多学科领域中学者们的关注.其严格性和精确性,则意味着它们是绝对精确的构造:不仅具有多重的精细结构,而且具有精确的几何和拓扑,必须满足严格的多重自相似性.这些苛刻的要求,增加了规则多重分形的构造难度.

尽管规则多重分形在自然界中并不“真的”存在,但这并不降低其科学价值.之所以这样讲,是因为我们有历史的参照:Euclid几何在自然界中也不“真的”存在,但这并不削弱其在自然科学中的基础性地位.正因为规则多重分形在分形几何中很稀少,才更有探索的必要性.

本文将尝试解决两个基本问题.第1个基本问题,是普适性的规则多重分形的构造模式.我们证实,将 m 个($m \geq 2$)规则单重分形的初始花样周期性地循环排列,可以生成规则的 m 重分形.由于这样的构造方式对任意的 m 值均成立,故形成了普适性的构造模式.第2个基本问题,是规则多重分形的分形几何学基础.我们发现,只要突破一个最基本的分形几何学概念——胞元概念,便可确立规则多重分形的几何学基础.具体的做法,是扬弃经典分形几何中的单重胞元概念,定义具有多重精细结构的多重胞元概念.基于多重胞元,我们不仅能够构造规则多重分形,而且可以在规则多重分形和广义的规则单重分形之间建立桥梁,进而,将规则单重分形几何推广至规则多重分形几何.

1 规则双重分形的案例

文献[7]给出了规则双重分形的案例.本文再设计两个案例,即(6+1,9+2)分圆和(9+2,6+1)分圆规则双重分形,作为本文归纳和抽象的基础.

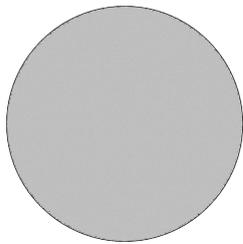


图1 圆形生成元

以圆形生成元(图1)为基础,可以生成(6+1)分圆分形^[3](图2)和(9+2)分圆分形^[7](图3).将(6+1)分圆和(9+2)分圆的几何图案以内切嵌入的方式交错混合排列,就得到(6+1,9+2)(图4)和(9+2,6+1)(图5)两种规则双重分形.

以图4为例,说明“内切嵌入”和“交错混合排列”的含义:(a)将(6+1)分圆视为起始花样;(b)将(9+2)分圆缩小,使之正好以相切的方式,嵌入到(6+1)分圆中的每一个圆中;(c)将(6+1)分圆缩小,使之正好以相切的方式,嵌入到缩小后的(9+2)分圆中的每一个圆中;…….不断地重复上述操作步骤,经过无限次循环,便得到(6+1,9+2)规则双重分形(图4).

同理,如果将(9+2)分圆视为起始花样,用类似的操作步骤,经过无限次循环,便得到(9+2,6+1)规则双重分形(图5).

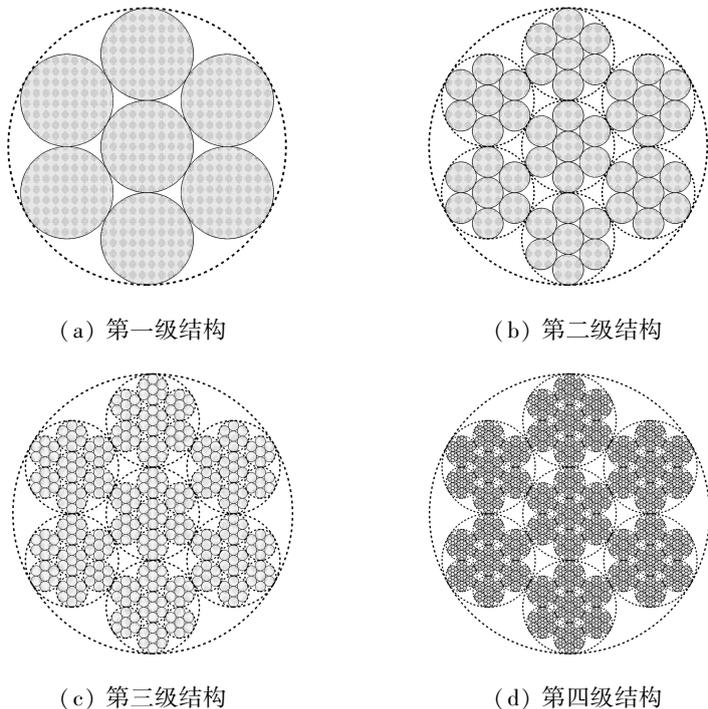


图2 (6+1)分圆超级分形纤维^[3]

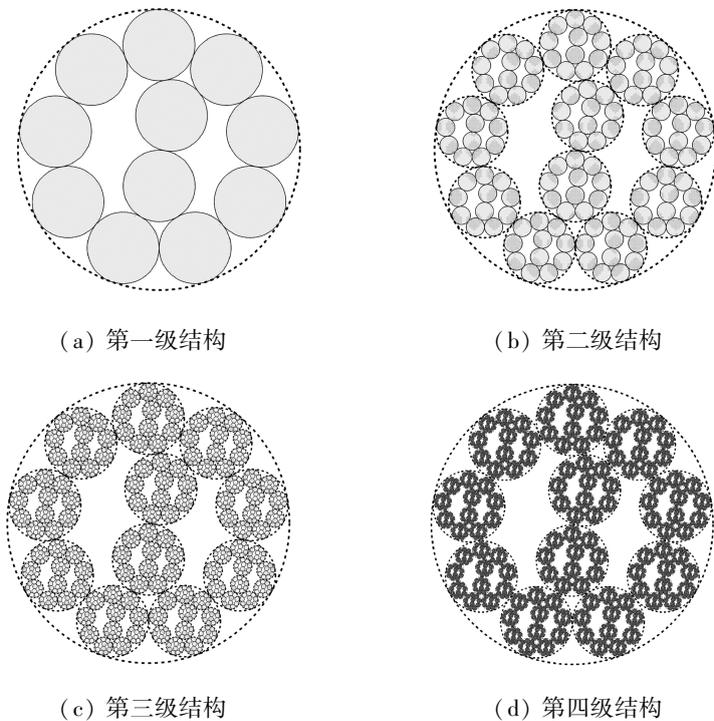


图3 (9+2)分圆超级分形纤维^[7]

本文以(6+1,9+2)和(9+2,6+1)规则双重分形作为归纳和抽象的基础,是基于如下理由:首先,是两种花样的原型在大自然中存在的普遍性。作为一种密排构型,(6+1)花样的原型广泛存在于众多非线性动力学过程中。其中最具代表性的原型是雪花。中国古语中就有“雪

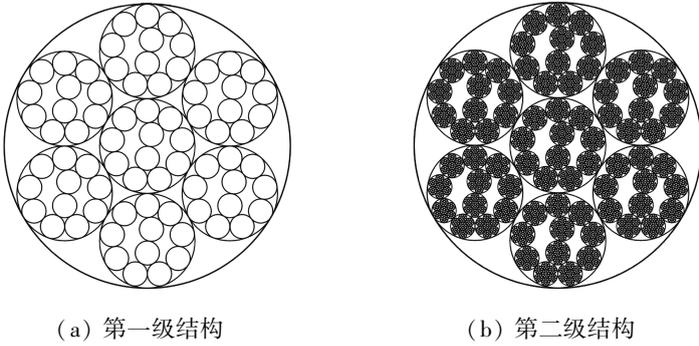


图4 (6+1,9+2)分圆规则双重分形

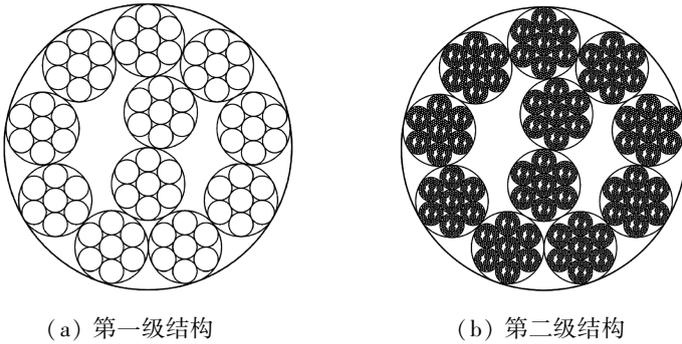


图5 (9+2,6+1)分圆规则双重分形

“飞六出”之说,表明古人已经认识到雪花结构的六角对称性.理论上讲,(6+1)分圆分形(图2)正是一朵“超级分形雪花”.

(9+2)花样的原规则广泛存在于动物的毛发纤维中.毛发纤维多级结构中一级是微纤维,奇妙的是,每一根微纤维,都由11根原纤维排列而成;而11根原纤维,都毫无例外地“选择”了(9+2)花样^[5-6].

其次,是(6+1)和(9+2)花样的对称性:前者的特征是完美对称性,而后者的特征则是对称性破缺^[7].在规则分形中,对称花样屡见不鲜,而对称性破缺的花样极为罕见;相反,在自然演化中,完美对称花样凤毛麟角,而对称性破缺的花样司空见惯.从自然科学的角度看,完美对称性和对称性破缺,具有同等的重要性.

再者,(6+1,9+2)花样的原型本身就是一种生物学实在.动物体内,多种细胞表面生长有纤毛(或微绒毛).大量纤毛排列成“丛”,如果将纤毛丛沿横截面切开,就会发现,所有的纤毛都密排成类似(6+1)的花样,而每根纤毛内的微管丛,则排列成类似(9+2)的花样^[18].

最后,(6+1,9+2)和(9+2,6+1)规则双重分形,为我们提炼出双重胞元概念提供了珍贵的原始素材.

总之,本文涉及的拓扑花样,虽然是纯粹抽象思维的产物,但同时也反映了自然界中的客观实在.

2 双重胞元与规则双重分形的构造模式

上述规则双重分形,是由两个规则单重分形的初始花样,以相切嵌入的方式交错混合排列而成.于是,“交错混合排列”,就是规则双重分形的构造方式.然而,这种构造方式具有普遍性

吗?或者说,它能够形成规则双重分形的构造模式吗?本节将给出答案。

图4和图5中规则双重分形的花样序列,可以分别抽象成为以下的符号序列^[7]:

$$(6+1) \leftarrow (9+2) \leftarrow (6+1) \leftarrow (9+2) \leftarrow \dots, (9+2) \leftarrow (6+1) \leftarrow (9+2) \leftarrow (6+1) \leftarrow \dots.$$

花样序列与符号序列一一对应,前者具体,后者抽象,都清晰地展示了规则双重分形的构造过程。注意到,这样的构造方式过去尚未见诸于文献。它能带来基本概念上的突破吗?如果能,突破口在哪里?答案是肯定的,突破口就是分形几何中的胞元概念。

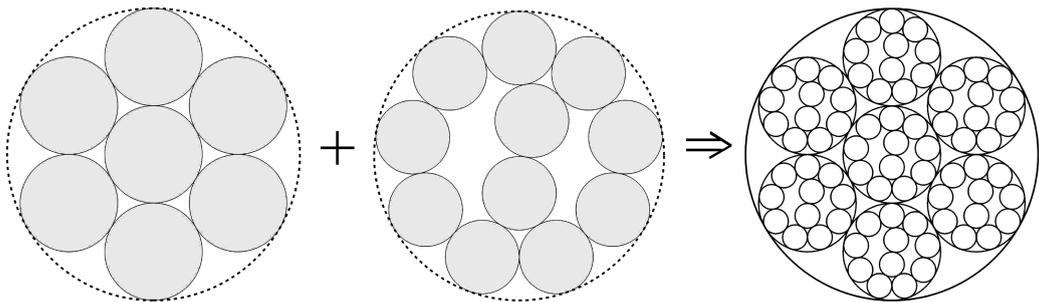
胞元是分形几何中最基本的概念之一。经典分形几何中,常见的胞元都是“单重”的(例如图1)。基于单重胞元的分形,当然是规则单重分形(例如图2、图3)。通过类比,我们推测,基于双重胞元的分形,自然是规则双重分形。反过来说,图4和图5中的规则双重分形,都应该有自己的双重胞元。

怎样定义双重胞元?我们仍然以图4为例,从构造过程着手,尝试归纳出双重胞元的内涵和外延。注意到,图4的符号序列,可以被重新整合成为以(6+1,9+2)为初始胞元的符号序列:

$$(6+1,9+2) \leftarrow (6+1,9+2) \leftarrow (6+1,9+2) \leftarrow \dots.$$

我们将图2(a)和图3(a)中的初始花样分别称为(6+1)分圆子胞元和(9+2)分圆子胞元。于是,初始胞元(6+1,9+2)就包含了两重结构,一重是(6+1)分圆子胞元,另一重是(9+2)分圆子胞元,因而它是一个双重胞元。

怎样通过双重胞元生成规则双重分形?我们将花样序列和符号序列结合起来,归纳出从双重胞元到规则双重分形的生成步骤:(a)将(9+2)分圆子胞元缩小,使之正好以相切的方式嵌入到(6+1)分圆子胞元中,得到(6+1,9+2)双重胞元(图6);(b)将(6+1,9+2)双重胞元视为花样序列的第一级结构(图4(a));(c)按照自相似规则,将(6+1,9+2)双重胞元缩小,使之正好以相切的方式嵌入到第一级结构中,得到第二级结构(图4(b));(d)将(6+1,9+2)双重胞元进一步缩小,使之正好以相切的方式嵌入到第二级结构中,得到第三级结构……。如此“周期性地”重复,最终循环演化成无穷级分形结构,即得(6+1,9+2)规则双重分形(图4)。



(a) (6+1)分圆子胞元

(b) (9+2)分圆子胞元

(c) (6+1,9+2)分圆双重胞元

图6 (6+1,9+2)分圆双重胞元的构造

同理,图5的符号序列,可以被重新整合成为以(9+2,6+1)为初始胞元的符号序列:

$$(9+2,6+1) \leftarrow (9+2,6+1) \leftarrow (9+2,6+1) \leftarrow \dots.$$

用类似的方式,我们可以构造出双重胞元(9+2,6+1)(图7),并“周期性地”循环演化成(9+2,6+1)规则双重分形(图5)。

于是,我们先归纳出子胞元的一般定义:(p)分圆分形和(q)分圆分形的第一级结构,分别称为(p)分圆子胞元和(q)分圆子胞元。我们再归纳出从双重胞元到规则双重分形的一般生成步骤:(a)将(q)分圆子胞元缩小,使之正好以相切的方式嵌入到(p)分圆子胞元中,得

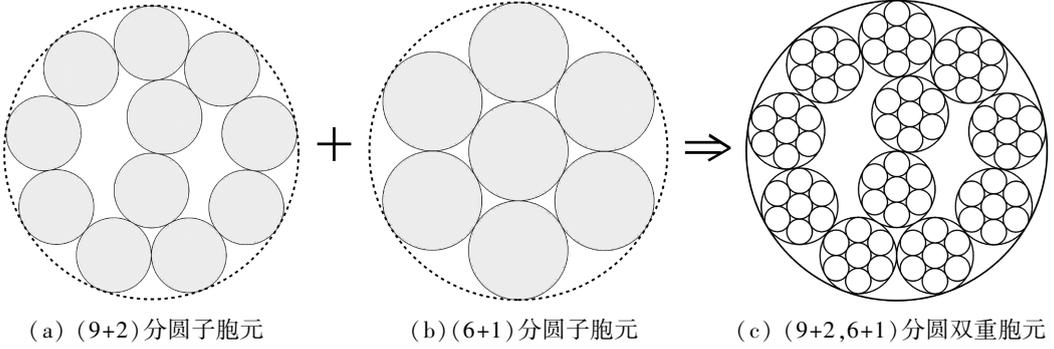


图7 (9+2,6+1)分圆双重胞元的构造

到双重胞元 (p, q) ; (b) 将双重胞元 (p, q) 视为花样序列的第一级结构; (c) 按照自相似规则, 将双重胞元 (p, q) 缩小, 使之正好以相切的方式嵌入到第一级结构中, 得到第二级结构; (d) 将双重胞元 (p, q) 进一步缩小, 使之正好以相切的方式嵌入到第二级结构中, 得到第三级结构……. 如此“周期性地”重复, 最终循环演化成无穷级分形结构, 即得 (p, q) 规则双重分形. 当然, 这个 (p, q) 规则双重分形, 对应一个以 (p, q) 为初始胞元的符号序列:

$$(p, q) \leftarrow (p, q) \leftarrow (p, q) \leftarrow \dots$$

与经典的单重胞元(例如图1)相比, 双重胞元(例如图6、图7)有很大不同: 前者形状简单, 后者形状复杂; 前者拓扑简单, 后者拓扑复杂; 前者没有子结构, 后者有子结构; 前者只有一重结构, 后者有两重结构; 前者导向规则单重分形, 后者导向规则双重分形.

单重胞元与双重胞元之间虽然有很大差别, 但也有密切联系: 如果 $p = q$, 则有 $(p, q) \mid_{p=q} = (p, p)$. 胞元 (p, p) 虽然有两重结构, 但两重结构完全自相似, 其整体几何结构全等于 (p) 分圆单重分形的第二级结构. 也就是说, 如果 $p = q$, 则 (p, q) 规则双重分形就退化为规则单重分形.

3 规则双重分形的维数

基于双重胞元概念, 我们可以把规则单重分形几何推广到规则双重分形几何. 具体的例子, 就是将规则单重分形维数公式, 推广到规则双重分形维数公式.

设 (p) 分圆分形和 (q) 分圆分形的分形维数分别为 $D_{s(p)}$ 和 $D_{s(q)}$. 根据经典分形几何, 有

$$D_{s(p)} = \frac{\ln n_p}{\ln(1/r_{s(p)})}, \quad D_{s(q)} = \frac{\ln n_q}{\ln(1/r_{s(q)})}, \quad (1)$$

其中, $n_p = p, n_q = q$. $r_{s(p)}$ 和 $r_{s(q)}$ 分别是 (p) 分圆分形和 (q) 分圆分形的自相似比.

注意到, 在 (p, q) 双重胞元概念下, (p, q) 规则双重分形可以被精确地等价为一个广义的规则单重分形, 只不过这个广义的规则单重分形的胞元, 具有 (p, q) 双重结构. 因而其分形维数公式在形式上, 必然与单重分形维数公式完全一致:

$$D_{s(p,q)} = \frac{\ln n_{(p,q)}}{\ln(1/r_{s(p,q)})}, \quad (2)$$

其中, $n_{(p,q)}$ 和 $r_{s(p,q)}$ 分别是 (p, q) 规则双重分形的子结构个数和自相似比. 容易知道

$$n_{(p,q)} = n_p n_q, \quad r_{s(p,q)} = r_{s(p)} r_{s(q)}. \quad (3)$$

式(2)和(3)给出

$$D_{s(p,q)} = \frac{\ln(n_p n_q)}{\ln(1/(r_{s(p)} r_{s(q)}))}. \quad (4)$$

结合式(1)和(4),还可以导出

$$D_{s(p,q)} = \frac{\ln n_p + \ln n_q}{\ln(1/r_{s(p)}) + \ln(1/r_{s(q)})} = \frac{1}{1 + \ln r_{s(q)}/\ln r_{s(p)}} D_{s(p)} + \frac{1}{1 + \ln r_{s(p)}/\ln r_{s(q)}} D_{s(q)}. \quad (5)$$

如果 $p = q$, 则式(4)和(5)退化为单重分形维数公式(即式(1)). 特别要指出的是, 式(4)和(5)的推导没有引入任何假定, 故精确成立.

式(4)和(5)给出规则双重分形的拓扑不变性质:

$$D_{s(p,q)} = D_{s(q,p)} \quad (6)$$

即规则双重分形的分形维数, 与两个分形子集的排列顺序无关. 于是我们归纳出一般性陈述: 任意的规则双重分形, 都有 (p, q) 和 (q, p) 两种(即 $2! = 2$)独立的拓扑花样. 这两种独立的拓扑花样, 具有相等的分形维数.

作为上述结果的具体应用, 我们考察 $(6+1, 9+2)$ 和 $(9+2, 6+1)$ 两种规则双重分形的分形维数. 在 $(6+1)$ 分圆分形(图2)中, 子结构个数 $n_{(6+1)}$ 和自相似比 $r_{s(6+1)}$ 分别为

$$n_{(6+1)} = 7, r_{s(6+1)} = \frac{1}{3}. \quad (7)$$

在 $(9+2)$ 分圆分形中(图3), 子结构个数 $n_{(9+2)}$ 和自相似比 $r_{s(9+2)}$ 分别为^[7]

$$n_{(9+2)} = 11, r_{s(9+2)} = \frac{1}{1 + 1/\sin 20^\circ}, \quad (8)$$

于是得双重分形维数 $D_{s(6+1,9+2)}$ 和 $D_{s(9+2,6+1)}$:

$$D_{s(6+1,9+2)} = D_{s(9+2,6+1)} \approx 1.7617. \quad (9)$$

4 多重胞元与规则多重分形

突破了胞元概念, 我们就可以实现进一步的推广: 将双重胞元推广到多重胞元, 将规则双重分形的构造模式推广到规则多重分形的构造模式.

4.1 规则三重分形

图8是三重胞元 $(6+1, 9+2, 3)$ 和 $(9+2, 6+1, 3)$ 的典型案例. 从图8中的三重胞元, 能够演化出对应的 $(6+1, 9+2, 3)$ 和 $(9+2, 6+1, 3)$ 规则三重分形. 从中我们可以抽象出一般性的思想: 基于 (p, q, t) 分圆三重胞元, 可以构造 (p, q, t) 规则三重分形, 其符号序列为

$$(p, q, t) \leftarrow (p, q, t) \leftarrow (p, q, t) \leftarrow \dots$$

在三重胞元意义下, 规则三重分形精确地等价于一个广义的规则单重分形, 其分形维数为

$$D_{s(p,q,t)} = \frac{\ln(n_p n_q n_t)}{\ln(1/(r_{s(p)} r_{s(q)} r_{s(t)}))}. \quad (10)$$

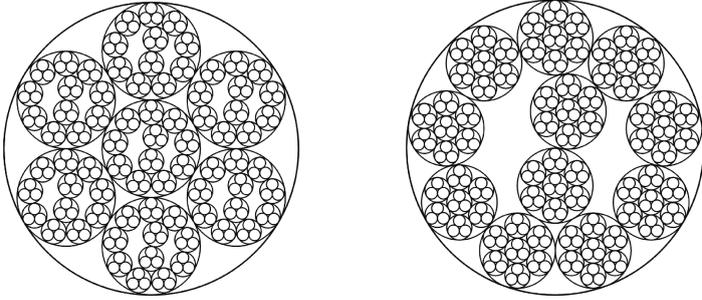
式(10)给出三重分形的拓扑不变性质:

$$D_{s(p,q,t)} = D_{s(p,t,q)} = D_{s(q,p,t)} = D_{s(q,t,p)} = D_{s(t,p,q)} = D_{s(t,q,p)} \quad (11)$$

即规则三重分形的分形维数, 与3个分形子集的排列顺序无关. 于是我们归纳出一般性陈述: 任意规则三重分形, 都有6(即 $3! = 6$)种独立的拓扑花样, 其排列次序为 (p, q, t) 、 (p, t, q) 、 (q, p, t) 、 (q, t, p) 、 (t, p, q) 和 (t, q, p) . 这6种独立的拓扑花样, 具有相等的分形维数. 图8只展示了6种拓扑花样中的2种.

4.2 规则多重分形

对于更一般的 (p, q, t, \dots) 分圆 m 重胞元, 可以构造更一般的 (p, q, t, \dots) 分圆 m 重规则分形, 其符号序列为



(a) (6+1, 9+2, 3)分圆三重胞元

(b) (9+2, 6+1, 3)分圆三重胞元

图8 三重胞元案例

$$(p, q, t, \dots) \leftarrow (p, q, t, \dots) \leftarrow (p, q, t, \dots) \leftarrow \dots$$

在 m 重胞元意义下, m 重规则分形精确地等价于一个广义的单重分形, 其分形维数为

$$D_{s(p,q,t,\dots)} = \frac{\ln(n_p n_q n_t \dots)}{\ln(1/(r_{s(p)} r_{s(q)} r_{s(t)} \dots))}. \quad (12)$$

从式(12)可知, 规则多重分形的分形维数, 也具有随分形子集排列顺序的无关性. 于是我们归纳出一般性的陈述: 任意的 m 重规则分形, 都有 $m! = m \times (m-1) \times \dots \times 2 \times 1$ 种独立的拓扑花样. 这 $m!$ 种独立的拓扑花样, 都具有相同的分形维数.

注意到, 规则多重分形是随机多重分形的特殊情形, 因此, 完全可以运用已有的多重分形理论(包括多重分形奇异谱^[14]及其几何特性^[19-20]), 分析本文中的规则多重分形, 探索其分形几何学性质. 但考虑到论文的篇幅, 我们将在后续的论文中, 报道这方面的研究成果.

4.3 多重胞元的方法论意义

注意4.2节中的命题: “ m 重胞元将 m 重规则分形精确地等价成为一个广义的规则单重分形”. 该命题可以用符号序列表达成等式形式:

$$p \leftarrow q \leftarrow t \leftarrow \dots \leftarrow p \leftarrow q \leftarrow t \leftarrow \dots = (p, q, t, \dots) \leftarrow (p, q, t, \dots) \leftarrow \dots$$

我们对等式左、右两端分析对比如下: 左端是周期为 m 的符号序列, 右端是周期为 1 的符号序列; 左端对应周期为 m 的花样序列, 右端对应周期为 1 的花样序列; 左端对应“逐重生长”的 m 重规则分形; 右端对应“逐级生长”(第 n 级内包含 $m \times n$ 重精细结构)的广义规则单重分形.

由此我们归纳出多重胞元 (p, q, t, \dots) 的方法论意义. 它是一个“集成器件”, 将 m 重精细结构的几何与拓扑信息, 精确地集成到一个单元之内. 集成带来了生长方式的变化: “逐重生长”变成了“逐级生长”; 它是一个“转换器件”或“数学变换”, 将复杂的秩序转换成简单的秩序, 将多周期的结构变换成单周期的结构.

变换(或映射)虽然是非常经典的思想, 但在近代数学和力学中, 却屡试不爽. 不论在固体力学还是在流体力学中, 我们经常利用变换(或映射), 把复杂的空间映射成简单的空间, 将不可解的问题变换成可解的问题, 进而, 利用简单问题的解, 求得复杂问题的解. 换言之, 变换的思想, 在已知和未知之间架起了“桥梁”, 通过这座“桥梁”, 我们把未知转化成已知, 从已知走向未知.

多重胞元 (p, q, t, \dots) 就起到了“变换”和“桥梁”的作用: 它把复杂的 m 重规则分形, 变换成了简单的规则单重分形, 于是, 利用单重分形的性质, 我们就求得了 m 重规则分形的性质.

5 黄金分形

黄金数为 $\Phi \approx 1.618$. 我们将分形维数约等于黄金数的分形, 称为黄金分形^[7]. 在规则单

重分形中,(5)分圆分形和(8)分圆分形,都是分形维数很接近黄金数的分形:

$$D_{s(5)} \approx 1.6196, D_{s(8)} \approx 1.6188,$$

然而,规则单重分形中的黄金分形是非常有限的.有了规则多重分形,黄金分形的范围就拓宽了.借助规则多重分形的维数公式(式(12)),可以得到一系列黄金分形:

$$D_{s(5,8)} = 1.6191, D_{s(5,6)} = 1.6255, D_{s(6,8)} = 1.6244, D_{s(6,9)} = 1.6178,$$

$$D_{s(7,9)} = 1.6169, D_{s(5,6,9)} = 1.6183, D_{s(3,4,9+2)} = 1.6189, \dots$$

理论上,通过规则多重分形的构造模式,我们能够构造任意多种黄金分形.

在日常生活中,黄金数一般与某种形式的优化联系在一起.He等人证实^[5-6],羊毛纤维的分形维数因为接近黄金数,而具有优化的传热性能.这提示我们:按照黄金分形设计工程材料或工程结构,是实现性能优化的可能途径.当然,黄金分形的物理或力学意义目前仍然不十分清楚.尽管如此,从工程优化的角度看,研究黄金分形确有必要性.而规则多重分形的构造模式,为工程优化设计提供了更多的选择.

6 结 论

多重胞元概念,既是规则多重分形构造模式普遍性的基础,也是规则多重分形的几何基础之一.通过多重胞元概念,本文确认了规则多重分形构造模式的普遍性,证实了规则多重分形与规则单重分形的内在联系和统一性,基于这一统一性,将规则单重分形几何推广至规则多重分形几何,不仅导出了规则多重分形维数公式,而且揭示了规则多重分形的拓扑学不变性质.总之,多重胞元是富有生命力的概念.

参考文献:

- [1] YIN Ya-jun, ZHANG Tong, YANG Fan, *et al.* Geometric conditions for fractal super carbon nanotubes with strict self-similarities [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, **37**(5): 1257-1266.
- [2] YIN Ya-jun, YANG Fan, ZHANG Tong, *et al.* Growth condition and growth limit for fractal super fibers and fractal super tubes [J]. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulations*, 2008, **9**(1): 96-102.
- [3] YIN Ya-jun, YANG Fan, FAN Qin-shan, *et al.* Cell elements, growth modes and topology evolutions of fractal supper fibers [J]. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2009, **10**(1): 1-12.
- [4] YIN Ya-jun, YANG Fan, FAN Qin-shan. Isologous fractal super fibers or fractal super lattices [J]. *International Journal of Electrospun Nanofibers and Applications*, 2008, **2**(3): 193-201.
- [5] FAN Jie, LIU Jun-fang, HE Ji-huan. Hierarchy of wool fibers and fractal dimensions [J]. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2008, **9**(3): 293-296.
- [6] HE Ji-huan, REN Zhong-fu, FAN Jie, *et al.* Hierarchy of wool fibers and its interpretation using E-infinity theory [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, **41**(4): 1839-1841.
- [7] 殷雅俊,杨帆,李颖,等.从毛发纤维中抽象出的分形几何与拓扑[J].应用数学和力学,2009, **30**(8): 919-926.
- [8] 黄立基,丁菊仁.多标度分形理论及进展[J].物理学进展,1991, **11**(3): 69-330.
- [9] Mandelbrot B B. On the intermittent free turbulence [C]//Weber E. *Proc Symp Turbulence of Fluid and Plasma*. New York: Interscience, 1969:483-492.
- [10] Grassberger P. Generalized dimensions of strange attractors [J]. *Physics Letters A*, 1983, **97**(6): 227-230.

- [11] Hentschel H, Procaccia I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors [J]. *Physica D*, 1983, **8**(3): 435-444.
- [12] Frisch U, Parisi G. On the singularity structure of fully developed turbulence [C]// Ghil M, Benzi R, Parisi G. *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*. Amsterdam: North-Holland, 1985:84-87.
- [13] Benzi R, Paladin G, Parisi G, *et al.* On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems [J]. *J Phys A*, 1984, **17**(18): 3521-3531.
- [14] Halsey T, Jensen M H, Kadanoff L P, *et al.* Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets [J]. *Phys Rev A*, 1986, **33**(2): 1141-1151.
- [15] Bensimon D, Jensen M H, Kadanoff L P. Renormalization-group analysis of the global structure of the period-doubling attractor [J]. *Phys Rev A*, 1986, **33**(5): 3622-3624.
- [16] Feigenbaum M J, Jensen M H, Procaccia I I. Time ordering and the thermodynamics of strange sets: theory and experimental tests [J]. *Phys Rev Lett*, 1986, **57**(13): 1503-1506.
- [17] Feigenbaum M. Some characterizations of strange sets [J]. *J Stat Phys*, 1987, **46**(5/6): 919-925.
- [18] 成令忠,冯京生,冯子强,等.组织学彩色图鉴[M].北京:人民卫生出版社,2000.
- [19] 周炜星,王延杰,于遵宏.多重分形奇异谱的几何特性(I):经典 Renyi 定义法[J].华东理工大学学报,2000, **26**(4): 385-389.
- [20] 周炜星,王延杰,于遵宏.多重分形奇异谱的几何特性(II):配分函数法 [J].华东理工大学学报,2000, **26**(4): 390-395.

Multiple Cell Elements and Regular Multifractals

YIN Ya-jun^{1,2}, LI Ying¹, YANG Fan¹, FAN Qin-shan²

(1. *Department of Engineering Mechanics, School of Aerospace, AML, Tsinghua University, Beijing 100084, P. R. China;*

2. *Division of Mechanics, Nanjing University of Technology, Nanjing 211816, P. R. China*)

Abstract: Based on fractal super fibers and binary fractal fibers, the following objectives were approached: Firstly, the concept of multiple cell elements was induced and abstracted. Secondly, through multiple cell elements, regular multifractals with strict self-similarities were confirmed not only constructible, but also being of universal construction mode. Thirdly, through the construction mode, a regular multifractal was found to be equivalent to a generalized regular single fractal with multiple fine structures under the meaning of multiple cell elements. On the basis of this equivalence, the dimension of single fractals was extended to that of regular multifractals, and the geometry of single fractals was extended to that of regular multifractals. Fourthly, through regular multifractals a few golden fractals were constructed.

Key words: binary fractal fibers; binary cell elements; regular binary fractals; multiple cell elements; multifractals