文章编号:1000-0887(2010)01-0071-10

具有非单调摩擦热弹性接触问题的有限元法*

I·谢斯塔克[1], B·S·乔凡诺维克[2]

(1. 贝尔格莱德大学 采矿和地质学院,贝尔格莱德 11000, 塞尔维亚;
2. 贝尔格莱德大学 数学学院,贝尔格莱德 11000, 塞尔维亚)

(陈立群推荐)

摘要: 给出了一个变形体和刚性基础之间用双边摩擦表达其接触性质的、静态热弹性问题的方程式及其近似解法. 以非单调、多值性表示该摩擦定律. 忽略了问题的耦合效应,则问题的传热部分与弹性部分各自独立处理. 位移矢量公式化为非凸的次静态问题,用局部 Lipschitz 连续函数来表示变形体的总势能. 用有限单元法近似求解全部问题.

关 键 词: 静态热弹性接触; 非单调多值摩擦; 半变分不等式; 次静态问题; 有限单元近似法

中图分类号: O176;O343.3;O241.82 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.01.008

引 言

本文研究了一个描述变形体和刚性基础之间双边摩擦接触的静态热弹性问题. 摩擦以非单调、多值定律形式给出[1-2]. 忽略了问题的耦合效应,则温度场中问题的传热部分,与弹性体问题无关,而弹性体问题与温度场是相关的. 弹性问题的边界条件是非单调、多值形式. 这类问题文献[3]在理论上已作了更为普遍的考虑. 弹性问题的变分方程式是半变分不等式(参见文献[1-2,4-6]). 该半变分不等式被公式化为两个未知量:位移矢量和摩擦力. 该系统与只考虑位移矢量的次静态形式问题密切相关[7]. 在这个式子中,总势能是非凸的局部 Lipschitz 的连续函数. 用有限单元法来近似求解该传热问题和弹性体问题[7]. 离散化的温度将作为半变分不等式代数方程的输入数据. 进一步,次静态问题的代数方程,通过凝聚压缩法,将它简化为一个只在弹性体部分边界附近的“小”问题[7-11]. 二阶 bundle-Newton 法就可以用来数值地求解半变分不等式[12]. 作者在问题离散时用到的其他数值方法,可以参见文献[1-2].

Panagiotopoulos[2]给出了力学中的半变分不等式理论,描述了一些重要的工程问题,如发生非单调多值边界和界面条件,或者需要加以重视的作用力和位移,或应力-应变之间,出现了一些非单调的多值关系. 有代表性的应用,除著名的单边接触和摩擦问题外,包括粘结、剥蚀和

* **收稿日期:** 2009-03-29; **修订日期:** 2009-10-17
基金项目: 塞尔维亚共和国科学部资助项目(144005)
作者简介: Ivan Šestak (联系人. E-mail:isestak@sezampro.yu);
Boško S. Jovanović(E-mail: bosko@matf.bg.ac.rs).
本文原文为英文,黄雅意 译,张禄坤 校.

效应(如复合材料的分层剥离)以及,一般而言,非线性的结构分析[1-2,4-6].

1 经典变分方程

令 Ω 为 R^2 中具有 Lipschitz 连续边界 Γ 的一个有界开区域,Γ 被分成可测量的互相独立的 4 部分,Γ_D,Γ_N,Γ_C 和 Γ_θ,使得 $\operatorname{meas}(\Gamma_D) > 0$(见图1).在常温下,为方便计,温度设为0.考虑一个占有区域 Ω 的各向同性弹性体,并限于经典的线性热弹性理论.假定弹性体固支在边界 Γ_D 上,作用在区域 Ω 上的表面力密度为 $\boldsymbol{f} = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}))$,作用在边界 Γ_N 上的线性牵引力密度为 $\boldsymbol{g} = (g_1(\boldsymbol{x}), g_2(\boldsymbol{x}))$.另外,弹性体每单位表面承受的热源 $q = q(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \omega \subset \Omega$,同时它与刚性基础在表面 Γ_C 上相接触.

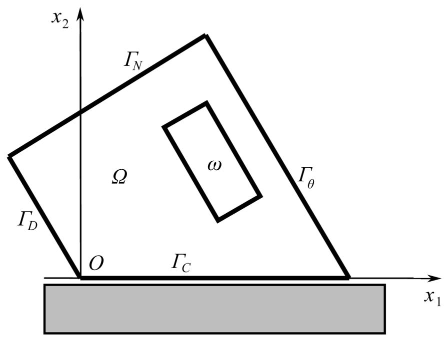

图1 与刚性基础双边接触的弹性体

我们用 $\boldsymbol{u} = (u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}))$ 表示位移矢量,$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{ij}(\boldsymbol{x})\}$ 表示应力张量,$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \{\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\}$,$2\varepsilon_{ij} = \partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i (i=1,2)$ 表示应变张量,$\theta = \theta(\boldsymbol{x})$ 表示温度.线性的热弹性体的平衡方程和热传导方程按如下形式给出:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}, \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \tag{1}$$

$$k\Delta\theta + q\chi_\omega = 0, \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \tag{2}$$

其中,div 和 Δ 分别为散度算子和 Laplace 算子,定义为 $\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j})$ 和 $\Delta\theta = \theta_{,ii} (i,j=1,2)$,$\chi_\omega$ 为 Ω 的子集 ω 的特征函数.弹性体的性质由如下热弹性体的本构方程所控制:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - \beta\theta\mathcal{I}, \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \tag{3}$$

其中,$\mathcal{C} = \{c_{ijkl}\} (i,j,k,l = 1,2)$ 为正定对称的弹性张量,β 为热膨胀系数,$\mathcal{I}$ 为 2×2 单位矩阵.令 $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ 和 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2) = (-n_2, n_1)$ 分别表示边界 Γ_C 上的外法向的单位向量和切向的单位向量.Γ 上 $\boldsymbol{u}$ 的法向和切向分量分别定义如下:$u_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$ 和 $u_{\mathrm{T}} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}$.如果 $\boldsymbol{\tau}: \Omega \to R_{\mathrm{s}}^{2\times 2}$ 是 Ω 中的应力张量,其中 $R_{\mathrm{s}}^{2\times 2}$ 为二阶的对称矩阵空间,那么 $\boldsymbol{S}: \Gamma \to R^2$,其中 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{n}$ 为 Γ 上的应力矢量.此外,$S_{\mathrm{N}} = (\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}$ 和 $S_{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{t}$ 分别表示 Γ 上 $\boldsymbol{S}$ 的法向和切向分量[13].

假定边界 Γ_C 上双边接触摩擦为

$$u_{\mathrm{N}} = 0, \ -S_{\mathrm{T}} \in \hat{b}(u_{\mathrm{T}}), \qquad \text{在 } \Gamma_C \text{ 上}, \tag{4}$$

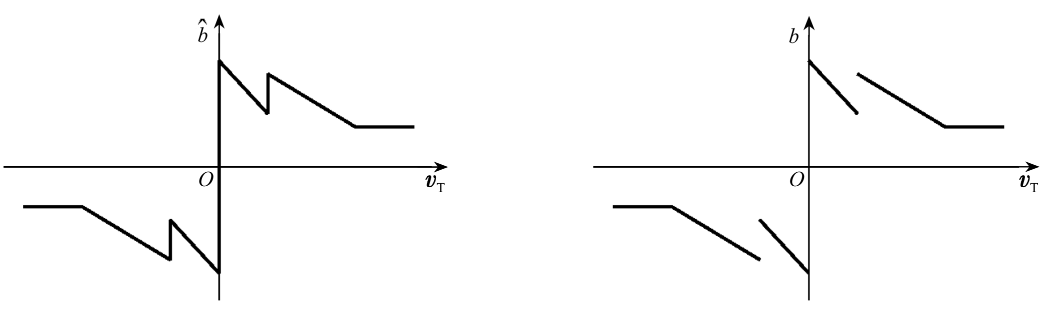

图2 非单调的多值摩擦定律

其中 $\hat{b}:\mathbf{R}\to 2^{\mathbf{R}}$ 为非单调的多值函数. 图 2(a) 给出了摩擦定律 $\hat{b}$ 的一个示例(更多的例子见文献[1-2]).

对于问题的传热部分,假定 Γ 上的边界温度如下:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial n_k}=0, & \text{在 } \Gamma_A \text{ 上},\\ -\dfrac{\partial\theta}{\partial n_k}=\alpha(\theta-\bar{\theta}), & \text{在 } \Gamma_\theta \text{ 上}, \end{cases} \tag{5}$$

其中, $\Gamma_A=\Gamma_D\cup\Gamma_N\cup\Gamma_C$, α 为对流热交换系数, $\partial\theta/\partial n_k=k\nabla\theta\cdot\boldsymbol{n}$, $\bar{\theta}$ 为周围流体的温度.

问题的经典形式归纳如下:

$$(P_{\boldsymbol{u}\theta})\quad\begin{cases} \text{寻找数对}(\boldsymbol{u},\ \theta)\text{,使得} & \\ \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}, & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ \boldsymbol{\sigma}=\mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})-\beta\theta\mathcal{I}, & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ k\Delta\theta+q\chi_\omega=0, & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}, & \text{在 } \Gamma_D \text{ 上},\\ \boldsymbol{\sigma n}=\boldsymbol{g}, & \text{在 } \Gamma_N \text{ 上},\\ u_{\mathrm{N}}=0,\ -S_{\mathrm{T}}\in\hat{b}(u_{\mathrm{T}}), & \text{在 } \Gamma_C \text{ 上},\\ -\dfrac{\partial\theta}{\partial n_k}=\alpha(\theta-\bar{\theta}), & \text{在 } \Gamma_\theta \text{ 上},\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial n_k}=0, & \text{在 } \Gamma_A \text{ 上}. \end{cases}$$

由于本问题中的弹性体是均匀的,故 $\mathcal{C}$ 为常张量, β,k,α 为正常数.

可以看出,问题 $(P_{\boldsymbol{u}\theta})$ 可分解为两个独立问题. 首先研究温度 θ 的传热问题. 该变量将作为弹性体问题的输入数据.

为了给出所分解问题的变分式,我们为温度变量引入函数空间 $\Phi=H^1\Omega$, 为位移矢量引入空间

$$H=\{\boldsymbol{v}\in V\mid v_{\mathrm{N}}=0,\text{在 } \Gamma_C \text{ 上}\},$$

其中,空间 V 定义如下:

$$V=\{\boldsymbol{v}\in(H^1(\omega))^2\mid \boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\text{在 } \Gamma_D \text{ 上}\}.$$

Sobolev 空间的所有定义可参考文献[14-15]. V 中的范数定义如下:

$$\|\boldsymbol{v}\|_V=(\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|^2_{(L^2(\Omega))^{2\times2}})^{1/2},$$

且由第一 Korn 不等式[16],该范数与 $(H^1(\Omega))^2$ 中的范数 $\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}$ 是等价的.

此外,对于传热问题和弹性体问题的变分式分别使用如下熟知的 Green 公式:

$$k\int_\Omega\nabla\theta\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x=-k\int_\Omega(\Delta\theta)\varphi\,\mathrm{d}x+\int_\Gamma\frac{\partial\theta}{\partial n_k}\varphi\,\mathrm{d}S, \tag{6}$$

$$\int_\Omega\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega(\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x+\int_\Gamma(\boldsymbol{\sigma n})\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}S, \tag{7}$$

这里, $\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\ (i,j=1,2)$, 其中重复的脚标采用了求和约定.

由 Green 公式(6)、热传导方程(2)和边界条件(5),传热问题的变分式如下:

$$(P_\theta)\quad\begin{cases} \text{寻找 } \theta\in\Phi\text{,使得} & \\ c(\theta,\ \varphi)=l(\varphi), & \forall\varphi\in\Phi, \end{cases}$$

其中,双线性形式 $c:\Phi\times\Phi\to\mathbf{R}$ 和线性形式 $l:\Phi\to\mathbf{R}$ 分别定义如下:

$$\begin{cases} c(\theta,\varphi)=k\int_\Omega \nabla\theta\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x+\alpha\int_{\Gamma_\theta}\theta\varphi\,\mathrm{d}S, \\ l(\varphi)=\int_\omega q\varphi\,\mathrm{d}x+\alpha\int_{\Gamma_\theta}\bar\theta\varphi\,\mathrm{d}S. \end{cases} \tag{8}$$

为了给出位移矢量的变分式,我们将 Green 公式(7)的边界积分变换如下:

$$\int_\Gamma(\boldsymbol{\sigma n})\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}S=\int_{\Gamma_N}(\boldsymbol{\sigma n})\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}S+\int_{\Gamma_C}(S_\mathrm{N}v_\mathrm{N}+S_\mathrm{T}v_\mathrm{T})\,\mathrm{d}S=$$
$$\int_{\Gamma_N}\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}S-\int_{\Gamma_C}\xi\Pi\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}S, \tag{9}$$

这里,我们利用了 Γ_D, Γ_N和 Γ_C 上的边界条件,且定义了 $\xi=-S_\mathrm{T}$,$\Pi\boldsymbol{v}=v_\mathrm{T}|_{\Gamma_C}$,其中 $\Pi:V\to L^2(\Gamma_C)$ 为线性连续映射. 将本构方程(3)、平衡方程(1)和边界积分(9)代入公式(7),得到如下问题:

$$(P_{\boldsymbol{u}\xi})\quad\begin{cases} \text{寻找数对}(\boldsymbol{u},\xi)\in H\times L^2(\Gamma_C),\text{使得} \\ a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+\int_{\Gamma_C}\xi\Pi\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}S=l_\theta(\boldsymbol{v}), \qquad \forall\boldsymbol{v}\in H, \\ \xi\in\hat{b}(\Pi\boldsymbol{u}), \qquad \text{在 }\Gamma_C\text{ 上}. \end{cases}$$

双线性形式 $a:V\times V\to\mathbf{R}$ 和线性形式 $l_\theta:V\to\mathbf{R}$ 分别定义如下:

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\int_\Omega C\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}):\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}x, \tag{10}$$

$$l_\theta(\boldsymbol{v})=\int_\Omega\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x+\beta\int_\Omega\theta\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_N}\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}S. \tag{11}$$

可以看到,线性形式 $l_\theta(\boldsymbol{v})$ 取决于温度 θ,即问题(P_θ) 的解. 问题($P_{\boldsymbol{u}\xi}$) 被称为半变分不等式.

假定,$\boldsymbol{f}\in(L^2(\Omega))^2$, $\boldsymbol{g}\in(L^2(\Gamma_N))^2$,$\bar\theta\in L^2(\Gamma_C)$,$\theta\in H^1(\Omega)$.

可以证明,双线性形式 $a(\cdot,\cdot)$ 是 V-椭圆,且在 V 上有界,而线性形式 $l_\theta(\cdot)$ 在 V 上有界(对于 $\theta\in\Phi$), 即

$$a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\geqslant m_0\|\boldsymbol{v}\|^2_{1,\Omega}, \tag{12}$$

$$|a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\leqslant m_1\|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega}\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}, \tag{13}$$

$$|l_\theta(\boldsymbol{v})|\leqslant m_2\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}, \tag{14}$$

其中 m_0,m_1 和 m_2 为正常数.

进一步,令 b 为去掉多值函数$\hat{b}$ 的多值性后所得到的可测函数(见图2(b)). 假定函数 b 满足如下的增长条件[2,4-5]:

$\exists\bar{s}>0$ 使得

$$\operatorname*{ess\,sup}_{s\in(-\infty,-\bar{s})}b(s)\leqslant 0\leqslant\operatorname*{ess\,inf}_{s\in(\bar{s},\infty)}b(s), \tag{15}$$

$$|b(s)|\leqslant C(1+|s|), \qquad \text{对 } s\in\mathbf{R}, \tag{16}$$

其中 $C>0$.

问题 (P_θ) 解的存在性证明是一个标准过程. 然而,问题($P_{\boldsymbol{u}\xi}$) 解的存在性证明要复杂得多,可参考文献[1-2, 4-5].

对于问题 ($P_{\boldsymbol{u}\xi}$), 以下定理成立[17].

定理 1 如果条件(12) ~ (16)满足,则问题 ($P_{\boldsymbol{u}\xi}$) 在 $H\times L^2(\Gamma_C)$ 中有一个解.

令 j 为 b 的一个原函数,即

$$j(\boldsymbol{x}) = \int_0^{x} b(s)\,\mathrm{d}s, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R},$$

且定义 $J: L^2(\Gamma_C) \to \mathbf{R}$, 因为

$$J(\boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_C} j(\Pi \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}S, \qquad \boldsymbol{v} \in V. \tag{17}$$

从而弹性体的总势能定义如下：

$$L_\theta(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) - l_\theta(\boldsymbol{v}) + J(\boldsymbol{v}), \qquad \boldsymbol{v} \in V.$$

问题 $(P_{\boldsymbol{u}\xi})$ 与如下位移矢量的次静态问题密切相关[7,9]：

$$(P_{\boldsymbol{u}}) \quad \begin{cases} \text{寻找 } \boldsymbol{u} \in V, \text{使得} \\ 0 \in \bar{\partial} L_\theta(\boldsymbol{u}), \end{cases}$$

其中$\bar{\partial}$表示局部 Lipschitz 函数的 Clarke 梯度[17].

对于一个局部 Lipschitz 函数 $h: X \to \mathbf{R}$,其中 X 为一个 Banach 空间,回忆 Clarke 的广义方向导数和广义梯度定义. 函数 h 在 $\boldsymbol{x} \in X$ 处、$\boldsymbol{v} \in X$ 方向的广义方向导数,用 $h^0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{v})$ 表示,定义如下：

$$h^0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{v}) = \limsup_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x},\ t\downarrow 0} \frac{h(\boldsymbol{y} + t\boldsymbol{v}) - h(\boldsymbol{y})}{t}.$$

函数 h 在 $\boldsymbol{x} \in X$ 处的广义梯度,用 $\bar{\partial} h(\boldsymbol{x})$ 表示,为二元空间 X^* 的一个子集,给出如下：

$$\bar{\partial} h(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{\zeta} \in X^* \mid h^0(\boldsymbol{x};\boldsymbol{v}) \geqslant \langle \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{v}\rangle_{X^*\times X},\ \forall \boldsymbol{v} \in X\},$$

其中,$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^*\times X}$ 表 X^* 和 X 之间的二元对偶.

2 近 似 值

用有限单元法对上述问题进行近似解. 本节的目的是介绍问题 $(P_{\boldsymbol{u}\xi})$ 和问题$(P_{\boldsymbol{u}})$ 适当的离散化. 为简化计,我们假定 Ω 是一个多边形区域,Γ_C 为一直线,直角坐标系的 x_1- 轴沿着直线 Γ_C (见图 1). 线性和双线性形式将不进行数值近似,因为上述问题中的插值多项式都是一次的.

首先讨论问题 (P_θ) 的近似值.

令 $\{\mathcal{D}_h\}$, $h \to 0+$ 为$\bar{\Omega}$的一个三角剖分的正则序列,且 $h > 0$ 为离散化参数[18]. 具有 $\mathcal{D}_h$ 的有限维空间：

$$\boldsymbol{\Phi}_h = \{\varphi_h \in C(\bar{\Omega}) \mid \varphi_h|_T \in P_1(T),\ \forall T \in \mathcal{D}_h\},$$

其中 $P_1(T)$ 表示 T 上一次多项式空间. 问题(P_θ) 相应的离散化问题如下：

$$(P_\theta)_h \quad \begin{cases} \text{寻找 } \theta_h \in \boldsymbol{\Phi}_h, \text{使得} \\ c(\theta_h, \varphi_h) = l(\varphi_h), \qquad \forall \varphi_h \in \boldsymbol{\Phi}_h, \end{cases}$$

其中,双线性形式 $c: \boldsymbol{\Phi}_h \times \boldsymbol{\Phi}_h \to \mathbf{R}$ 和线性形式 $l: \boldsymbol{\Phi}_h \to \mathbf{R}$ 由式(8) 定义. 众所周知[18],对于任意 $h > 0$,问题$(P_\theta)_h$ 有一个解 θ_h,在 Φ_h 里有界,即 $\|\theta_h\|_{1,\Omega} \leqslant C$,其中 C 为正常数.

下面我们根据 Haslinger 等[7] 的结果,讨论问题 $(P_{\boldsymbol{u}\xi})$ 的近似值.

具有 $\mathcal{D}_h$ 的位移矢量的有限维空间：

$$V_h = \{v_h \in (C(\bar{\Omega}))^2 \mid v_h|_T \in (P_1(T))^2, \forall T \in \mathcal{D}_h,\ v_h = 0,\ \text{在 } \Gamma_D \text{ 上}\}.$$

设 $\{x_h^i\}_{i=0}^m$ 为由 $\mathcal{D}_h$ 产生的 Γ_C 边界节点的集合. 空间 H 离散化 H_h 定义如下：

$H_h = \{ v_h \in V_h \mid v_{hN}(x_h^i) = 0,\ i = 1,2,\cdots,m \}$.

接着定义变量 ξ 的空间 Y_h：

$Y_h = \{ \boldsymbol{\eta}_h \in L^2(\Gamma_C) \mid \boldsymbol{\eta}_h|_{S_i} \in P_0(S_i),\ \forall S_i \in \mathcal{T}_h^C \}$.

空间 Y_h 中 $\mathcal{T}_h^C$ 的区段 $S_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 如下定义[7-8]. 设 $x_h^{i+1/2}$ 为区间$[x_h^i,\ x_h^{i+1}](i = 0,1,\cdots,m-1)$ 的中点,则区段 $S_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 定义为(见图 3)：

$S_1 = [x_h^0,\ x_h^{3/2}]$,

$S_i = [x_h^{i-1/2},\ x_h^{i+1/2}],\qquad i = 2,\cdots,m-1$,

$S_m = [x_h^{m-1/2},\ x_h^m]$.

那么, $x_h^1 \in S_1$, $x_h^i \in S_i$, $i = 2,\cdots,m-1$ 且 $x_h^m \in S_m$. 在 x_h^i 上 $\boldsymbol{\eta}_h \in Y_h$ 的值将作为 Y_h 的自由度. 最后,设 $P_h: W_h \to Y_h$ 为 Lagrange 插值算子,

$$P_h w_h = \sum_{i=1}^{m} w_h(x_h^i)\chi_i,\qquad \forall w_h \in W_h,$$

其中 χ_i 为 S_i 的内部特征函数,空间 W_h 如下定义：

$W_h = \Pi(V_h) = \{ w_h \in C(\bar{\Gamma}_C): w_h|_{S_i'} \in P_1(S_i'),\ \forall S_i',\ w_h(x_h^0) = 0 \}$,

其中 $S_i' = [x_h^i,\ x_h^{i+1}](i = 0,\cdots,m-1)$. 映射 P_h 联合函数 $w_h \in W_h$,作为 Lagrange 分段常数插入 $\mathcal{T}_h^C$ (见图 3).

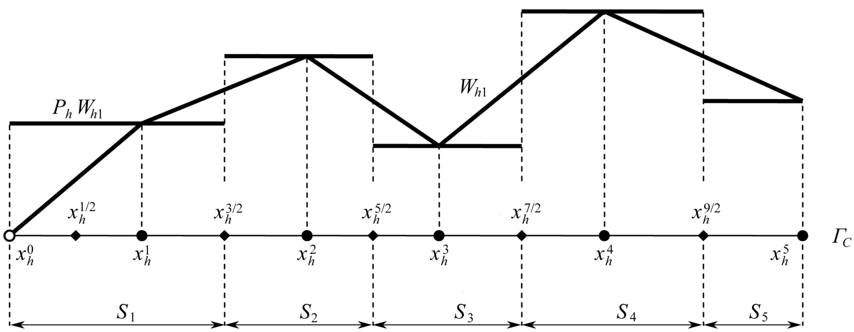

图 3 由 w_{h1} 构造 Γ_C 上区段 S_i 以及 $P_h w_{h1}$

问题 $(P_{\boldsymbol{u}\xi})$ 离散化如下：

$$(P_{\boldsymbol{u}\xi})_h\quad \begin{cases} \text{寻找}(u_h,\xi_h) \in H_h \times Y_h,\text{使得} \\ a(u_h,v_h) + \int_{\Gamma_C} \xi_h P_h(\Pi v_h)\,\mathrm{d}S = l_\theta(v_h),\qquad \forall v_h \in H_h, \\ \xi_h(x_h^i) \in \hat{b}(P_h(\Pi u_h)(x_h^i)),\qquad i = 1,2,\cdots,m. \end{cases}$$

由于 ξ_h 和 $P_h(\Pi v_h)$ 是边界 Γ_C 上的分段常数,故上述包含条件不仅在 $x_h^i(i = 0,1,\cdots,m)$ 上满足,而且在整个 Γ_C 上都满足.

算子 P_h 满足以下性质(参见文献[19]中的第 4 章)：

$$v_h \rightharpoonup \boldsymbol{v}(\text{弱})\ \text{在}\ V\ \text{中},\ \boldsymbol{v}_h \in V_h \Rightarrow \| P_h(\Pi v_h) - \Pi v \|_{L^2(\Gamma_C)} \to 0,\ h \to 0+. \qquad (18)$$

以下定理成立[7].

定理 2 如果本文中关于 $a(\cdot,\cdot)$, $l_\theta(\cdot)$, b 和 P_h 的所有假设都得到满足,那么对于任意的 $h > 0$, $(P_{\boldsymbol{u}\xi})_h$ 存在一个解(u_h,ξ_h),且在 $V \times L^2(\Gamma_C)$ 有界,即 $\| u_h \|_{1,\Omega} + \| \xi_h \|_{0,\Gamma_C} \leqslant C$, 其中 C 为一正常数.

此外,以下的收敛结果成立[7].

定理 3 如果条件(15)、(16)和(18)得到满足,那么对 $(P_{\boldsymbol{u}\xi})_h$ 解的任意有界序列 $\{(u_h,\xi_h)\}$,我们可以找到一子序列 $\{(u_{h'},\xi_{h'})\}$ 和一单元 $(\boldsymbol{u},\xi)\in H\times L^2(\Gamma_C)$,当 $h'\to 0+$ 时,使得 V 中 $u_{h'}\to\boldsymbol{u}$,$L^2(\Gamma_C)$ 中 $\xi_{h'}\rightharpoonup\xi$(弱收敛). 并且,数对 $(\boldsymbol{u},\xi)$ 是问题 $(P_{\boldsymbol{u}\xi})$ 的一个解.

为了数值地求解 $(P_{\boldsymbol{u}\xi})_h$,我们引入一个合适的离散总势能函数来消去第 2 个分量 ξ_h. 我们按连续情况进行分析.

令

$$J_h(v_h)=\int_{\Gamma_C} j(P_h(\Pi v_h))\,\mathrm{d}S=\int_{\Gamma_C}\int_0^{P_h(\Pi v_h)} b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}S. \tag{19}$$

离散总势能函数 $L_{\theta h}:\boldsymbol{V}_h\to\mathbf{R}$ 定义如下:

$$L_{\theta h}(v_h)=\frac{1}{2}a(v_h,v_h)-l_\theta(v_h)+J_h(v_h).$$

代替 $(P_{\boldsymbol{u}\xi})_h$,我们先求解一个变量 u_h 的包含问题:

$$(P_{\boldsymbol{u}})_h\quad\begin{cases}\text{寻找 } u_h\in V_h,\text{使得}\\ 0\in\bar{\partial}L_{\theta h}(u_h),\end{cases}$$

在连续情况下,问题 $(P_{\boldsymbol{u}\xi})_h$ 比问题 $(P_{\boldsymbol{u}})_h$ 更一般,即,如果 u_h 是 $(P_{\boldsymbol{u}})_h$ 的一个解,则存在 $\xi_h\in Y_h$,使得数对 (u_h,ξ_h) 是 $(P_{\boldsymbol{u}\xi})_h$ 的一个解[7].

3 代数公式

先从问题 $(P_\theta)_h$ 开始. 设 n 为 $\boldsymbol{\Phi}_h$ 的维数,$\{\psi_j\}_{j=1}^n$ 为其 Courant 基. 那么,其解为 $\theta_h=\sum_{j=1}^n\theta_j\psi_j$,其中 θ_j 为未知常数. 将空间 $\boldsymbol{\Phi}_h$ 与 R^n 等同,θ_h 与 $\underline{\boldsymbol{\theta}}=(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ 等同. 则 $(P_\theta)_h$ 的代数公式如下:

$$(\bar{P}_\theta)\quad\begin{cases}\text{寻找 } \underline{\boldsymbol{\theta}}\in R^n,\text{使得}\\ (\boldsymbol{C}\underline{\boldsymbol{\theta}},\underline{\varphi})_{R^n}=(\underline{\boldsymbol{l}},\underline{\varphi})_{R^n},\qquad\forall\underline{\varphi}\in R^n,\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{C}=(c(\psi_i,\psi_j))_{i,j=1}^n$,$\underline{\boldsymbol{l}}=(l(\psi_i))_{i=1}^n$,$(\cdot,\cdot)_{R^n}$ 为 R^n 的内积. 形式 $c(\cdot,\cdot)$ 和 $l(\cdot)$ 由式(8)定义. 解 $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ 将是 $(P_{\boldsymbol{u}\xi})_h$ 代数式的输入数据.

进一步地,我们给出问题 $(P_{\boldsymbol{u}\xi})_h$ 的代数式.

现令 $n=2\mathrm{card}(\mathcal{D}_h\backslash\mathcal{T}_h^D)$,其中 card 表示该集合的基数,$\mathcal{T}_h^D$ 为边界 Γ_D 分成区段的一个划分. 将 V_h 等同于 R^n,W_h 和 Y_h 等同于 R^m,并令 $\{\varphi^j\}_{j=1}^n$ 为 V_h 的 Courant 基. 此外,令 $\boldsymbol{\Lambda}=(\Lambda_{ij})$,$\Lambda_{ij}=\varphi^j(x_h^i)\,(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$ 为与 V_h 和 Y_h 有关的 $m\times n$ 矩阵.

从而,$(P_{\boldsymbol{u}\xi})_h$ 在边界 Γ_C 上的积分可以变换为如下矢量形式:

$$\int_{\Gamma_C}\xi_h P_h(v_{h1})\,\mathrm{d}S=\sum_{i=1}^m\int_{S_i}\xi_h P_h(v_{h1})\,\mathrm{d}S=$$

$$\sum_{i=1}^m c_i\xi_h(x_h^i)v_{h1}(x_h^i)=(\underline{\xi},\underline{v}_1)_{R^m}=(\underline{\xi},\boldsymbol{\Lambda}\underline{\boldsymbol{v}})_{R^m},$$

这里 $c_i=\mathrm{meas}(S_i)\,(i=1,\cdots,m)$,$\underline{\xi}=(\xi_h(x_h^i))_{i=1}^m$,其中,$\xi_h(x_h^i)\equiv c_i\xi_h(x_h^i)$,$\Pi v_h=v_{h1}$. 最后一个等式中 $\underline{\boldsymbol{v}}\in R^n$. 则 $(P_{\boldsymbol{u}\xi})_h$ 的代数式如下:

$$(\bar{P}_{u\xi})\quad \begin{cases} 寻找(\underset{\sim}{u},\ \underset{\sim}{\xi})\in R^n\times R^m,使得 \\ (A\underset{\sim}{u},\ \underset{\sim}{v})_{R^n}+(\underset{\sim}{\xi},\ \Lambda\underset{\sim}{v})_{R^m}=(\underset{\sim}{l}_\theta,\ \underset{\sim}{v})_{R^n}, \qquad \forall\, \underset{\sim}{v}\in R^n, \\ \xi_i\in c_i\hat{b}((\Lambda\underset{\sim}{u})_i), \qquad i=1,\cdots,m, \end{cases}$$

这里，$A=(a(\varphi^i,\varphi^j))_{i,j=1}^n$ 为一 $n\times n$ 的方阵，$\underset{\sim}{l}_\theta=(l_\theta(\varphi^j))_{j=1}^n\in R^n$，$(\Lambda\underset{\sim}{v})_i=v_1^i(i=1,\cdots,m)$，其中 v_1^i 对应于 Γ_C 上节点位移的第 1 个分量. 称问题$(\bar{P}_{u\xi})$ 为代数的半变分不等式.

为了使计算更有效，我们只规定 $\bar{\Gamma}_C$ 节点上的非线性特点. 假定首先列出相应的节点位移场分量，可以用$\bar{\Gamma}_C$ 上未知量的凝聚压缩法，分解矩阵 A，矢量 $\underset{\sim}{l}_\theta$ 和解矢量 $\underset{\sim}{u}$ 如下：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\quad \underset{\sim}{l}_\theta=\begin{pmatrix} \underset{\sim}{l}_{\theta1} \\ \underset{\sim}{l}_{\theta2} \end{pmatrix},\quad \underset{\sim}{u}=\begin{pmatrix} \underset{\sim}{u}_1 \\ \underset{\sim}{u}_2 \end{pmatrix},$$

其中，A_{11} 为一 $m\times m$ 矩阵，$\underset{\sim}{l}_{\theta1},\underset{\sim}{u}_1\in R^m$，$\underset{\sim}{u}_2\in R^{n-m}$. 如果在问题$(\bar{P}_{u\xi})$ 中，先取 $\underset{\sim}{v}^{\mathrm{T}}=(\underset{\sim}{v}_1,\ \underset{\sim}{0})\in R^n$，再取 $\underset{\sim}{v}^{\mathrm{T}}=(\underset{\sim}{0},\underset{\sim}{v}_2)\in R^n$，可以得到位移矢量 $\underset{\sim}{u}_1$ 系统如下：

$$(\tilde{P}_{u_1\xi})\quad \begin{cases} 寻找(\underset{\sim}{u}_1,\ \underset{\sim}{\xi})\in R^m\times R^m,使得 \\ \tilde{A}\underset{\sim}{u}_1+\underset{\sim}{\xi}=\tilde{\underset{\sim}{l}}_{\theta1}, \\ \xi_i\in c_i\hat{b}((\underset{\sim}{u}_1)_i), \qquad i=1,\cdots,m, \end{cases}$$

对剩下的 $n-m$ 节点的位移矢量 $\underset{\sim}{u}_2$ 为

$$\underset{\sim}{u}_2=A_{22}^{-1}(\underset{\sim}{l}_{\theta2}-A_{21}\underset{\sim}{u}_1), \tag{20}$$

其中，$\tilde{A}=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$，$\tilde{\underset{\sim}{l}}_{\theta1}=\underset{\sim}{l}_{\theta1}-A_{12}A_{22}^{-1}\underset{\sim}{l}_{\theta2}$.

问题 $(\tilde{P}_{u_1\xi})$ 相应的泛函 $\tilde{L}_\theta:R^m\to\mathbf{R}$ 定义如下：

$$\tilde{L}_\theta(\underset{\sim}{v}_1)=\frac{1}{2}(\tilde{A}\underset{\sim}{v}_1,\ \underset{\sim}{v}_1)_{R^m}-(\tilde{\underset{\sim}{l}}_{\theta1},\ \underset{\sim}{v}_1)_{R^m}+\Psi(\underset{\sim}{v}_1),$$

其中，泛函 $\Psi:R^m\to\mathbf{R}$ 为泛函(19)的近似值(由矩形公式)，即

$$\Psi(\underset{\sim}{v}_1)=\sum_{i=1}^m c_i\int_0^{(\underset{\sim}{v}_1)_i} b(t)\,\mathrm{d}t.$$

从而，将问题 $(\tilde{P}_{u_1\xi})$ 变换为含未知量 $\underset{\sim}{u}_1$ 的非平稳的最优化问题：

$$(\tilde{P}_{u_1})\quad \begin{cases} 寻找\ \underset{\sim}{u}_1\in R^m,使得 \\ 0\in\bar{\partial}\tilde{L}_\theta(\underset{\sim}{u}_1). \end{cases}$$

可见问题 $(\tilde{P}_{u_1})$ 已被显著简化. 已知 $\underset{\sim}{u}_1$，就可由式(20) 计算出 $\underset{\sim}{u}_2$.

问题 $(\tilde{P}_{u_1})$ 等价于如下问题：

$$(P_{u_1})\quad \begin{cases} 寻找\ \underset{\sim}{u}_1\in R^m,使得 \\ 0\in\tilde{A}\underset{\sim}{u}_1-\tilde{\underset{\sim}{l}}_{\theta1}+\bar{\partial}\Psi(\underset{\sim}{u}_1). \end{cases}$$

意味着(见文献[4])

$$\xi\in\bar{\partial}J(\boldsymbol{v})\Rightarrow\xi(\boldsymbol{x})\in\bar{\partial}j((\Pi\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}))\subseteq\hat{b}((\Pi\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x})), \qquad \text{a. e. }\Gamma_C,$$

问题 (P_{u_1}) 的所有解也是问题$(\bar{P}_{u\xi})$ 的解. 问题(P_{u_1}) 可以由文献[12]介绍和分析的 Newton 法非平稳变量求解.

为了确认 $\underset{\sim}{u}_1^{\mathrm{comp}}$(计算值) 足够准确，我们由系统$(\tilde{P}_{u_1\xi})$，$\underset{\sim}{\xi}=\tilde{\underset{\sim}{l}}_{\theta1}-\tilde{A}\underset{\sim}{u}_1$，计算$\underset{\sim}{\xi}$，同时，对于

$\underset{\sim}{\boldsymbol{u}}_1 = \underset{\sim}{\boldsymbol{u}}_1^{\mathrm{comp}}$ 和 $\underset{\sim}{\xi} = \underset{\sim}{\xi}^{\mathrm{comp}}$ 来说,包含式 $\xi_i \in c_i \hat{b}((\underset{\sim}{\boldsymbol{u}}_1)_i)(i = 1, \cdots, m)$ 证实是满足的,其中

$$\underset{\sim}{\xi}^{\mathrm{comp}} = \underset{\sim}{\tilde{l}}_{\theta 1} - \tilde{\boldsymbol{A}} \underset{\sim}{\boldsymbol{u}}_1^{\mathrm{comp}}. \tag{21}$$

任一包含式与此相背离,意味着,$\underset{\sim}{\boldsymbol{u}}_1^{\mathrm{comp}}$ 需要用更高精度才能找到. 然后,由式(21)计算问题的第 2 个未知量 $\underset{\sim}{\xi}$.

致谢 本文第 2 作者感谢塞尔维亚共和国科学部项目 144005 的资助.

参考文献:

[1] Panagiotopoulos P D. *Inequality Problems in Mechanics and Applications: Convex and Nonconvex Energy Functions*[M]. Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser, 1985.

[2] Panagiotopoulos P D. *Hemivariational Inequalities: Applications in Mechanics and Engineering*[M]. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1993.

[3] Denkowski Z, Migórski S. A system of evolution hemivariational inequalities modeling thermoviscoelastic frictional contact[J]. *Nonlinear Analysis*, 2005, **60**(8): 1415-1441.

[4] Goeleven D, Motreanu D, Dumont Y, *et al*. *Variational and Hemivariational Inequalities. Theory, Methods and Applications, Volume* Ⅰ: *Unilateral Analysis and Unilateral Mechanics*[M]. Boston, Dordrecht, London: Kluwer, 2003.

[5] Goeleven D, Motreanu D. *Variational and Hemivariational Inequalities. Theory, Methods and Applications, Volume* Ⅱ: *Unilateral Problems*[M]. Dordrecht, London: Kluwer, 2003.

[6] Naniewicz Z, Panagiotopoulos P D. *Mathematical Theory of Hemivariational Inequalities and Applications*[M]. New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, 1995.

[7] Haslinger J, Miettinen M, Panagiotopoulos P D. *Finite Element Method for Hemivariational Inequalities. Nonconvex Optimization and Its Applications*[M]. Vol **35**, Dordrecht: Kluwer, 1999.

[8] Baniotopoulos C C, Haslinger J, Morávková Z. Mathematical modeling of delamination and nonmonotone friction problems by hemivariational inequalities[J]. *Appl Math*, 2005, **50**(1): 1-25.

[9] Miettinen M, Haslinger J. Approximation of nonmonotone multivalued differential inclusions[J]. *IMA J Numer Anal*, 1995, **15**(4): 475-503.

[10] Miettinen M, Mkel M M, Haslinger J. On numerical solution of hemivariational inequalities by nonsmooth optimization methods[J]. *J Global Optimization*, 1995, **6**(4): 401-425.

[11] Miettinen M, Haslinger J. Finite element approximation of vector-valued hemivariational problems[J]. *J Global Optimization*, 1997, **10**(1): 17-35.

[12] Lukšan L, Vlček J. A bundle-Newton method for nonsmooth unconstrained minimization[J]. *Math Prog*, 1998, **83**(1/3): 373-391.

[13] Baniotopoulos C C, Haslinger J, Morávková Z. Contact problems with nonmonotone friction: discretization and numerical realization[J]. *Comput Mech*, 2007, **40**(1): 157-165.

[14] Adams R S. Sobolev Spaces. *Pure and Applied Mathematics*[M]. Vol **65**. New York, London: Academic Press, 1975.

[15] Kufner A, John O, Fučik S. *Function Spaces*[M]. Leyden: Noordhoff International Publishing and Prague: Academia, 1977.

[16] Nečas J. *Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques*[M]. Paris: Masson, 1967.

[17] Clarke F H. *Optimization and Nonsmooth Analysis*[M]. New York, Chichester, Brisbane, Toronto and Singapore: Wiley, 1983.

[18] Ciarlet P G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*[M]. Amsterdam: North-Holland, 1978.

[19] Glowinski R, Lions J L. Trémoliéres R. *Numerical Analysis of Variational Inequalities. Series in Mathematics and Applications*[M]. Vol **8**. Amsterdam: North-Holland, 1981.

Approximation of Thermoelasticity Contact Problem With Nonmonotone Friction

Ivan Šestak[1], Boško S. Jovanović[2]

(1. *University of Belgrade*, *Faculty of Mining and Geology*, *Đušina* 7, 11000 *Belgrade*, *Serbia*;

2. *University of Belgrade*, *Faculty of Mathematics*, *Studentski trg* 16, 11000 *Belgrade*, *Serbia*)

Abstract: The formulation and approximation of a static thermoelasticity problem that described bilateral frictional contact between a deformable body and a rigid foundation was presented. The friction was in the form of nonmonotone and multivalued law. The coupling effect of the problem was neglected, therefore the thermic part of the problem was considered independently of the elasticity problem. For the displacement vector, a substationary problem for non-convex, locally Lipschitz continuous functional representing the total potential energy of the body was formulated. All problems formulated were approximated by the finite element method.

Key words: static thermoelastic contact; nonmonotone multivalued friction; hemivariational inequality; substationary problem; finite element approximation