

基于 GMRES 算法的弹性结构强耦合 小变形流激振动分析*

张立翔¹, 郭亚昆², 张洪明¹,

(1. 昆明理工大学 工程力学系, 昆明 650051;
2. 阿伯丁大学 工程学院, 阿伯丁 AB24 3UE, 英国)

(李继彬推荐)

摘要: 使用混合广义变分原理, 将基于 Lagrange 表述的小位移变形结构振动问题与基于 Euler 描述的不可压缩粘性流动问题, 统一在功率平衡的框架下建立流固系统的耦合控制方程. 用有限元格式做空间离散后, 再用广义梯形法将有限元控制方程转化为增量型的线性方程组, 该方程组的系数矩阵具有非对称性, 其中元素含对流效应和时间因子. 将 GMRES 算法与振动分析的 Newmark 法和流动分析的 Hughes 预测多修正法结合, 发展成一种基于 GMRES-Hughes-Newmark 的稳定算法, 用于计算具有复杂几何边界的强耦合流激振动问题. 以混流式水轮机叶道为数值算例的计算表明, 模拟结果与试验实测结果吻合较好.

关键词: 流激振动; 流固耦合; 广义变分原理; 数值方法; GMRES

中图分类号: O332 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.01.009

引 言

流体-结构相互作用诱发的结构流激振动问题, 诸如土木、能源、机械、航空航天、生物力学等众多的工业领域中普遍存在, 是影响力学系统稳定、安全、高效运行的重要因素, 然而却是一个迄今没有解决好的问题^[1].

流动诱发结构振动, 振动又反馈信息影响流动, 这是流体-结构相互作用(FSI)的一般机理^[2], 也是多年来一直受到人们的广泛重视, 并做了大量工作的研究课题. 近 10 年来, 在以流动为主题的研究方面, 诸如直接数值模拟(DNS)和大涡模拟(LES)^[3-10]等已随着计算技术的发展逐渐成为流动模拟的主流方法; 任意 Lagrange-Euler(ALE)^[11-13]或浸移边界法(IBM)^[14-17]是处理动边界流动问题的有效技术. 有限单元法(FEM)作为一种成熟的数值技术在众多领域中得到了广泛的应用, 且在求解复杂流动以及 FSI 问题方面也取得了显著的进展^[18-30], 为 FEM 与其他方法结合处理在复杂边界条件下 FSI 的流激振动问题提供了一种途径. 然而, 由于流体动力学和结构动力学的控制方程一般是分别建立在 Euler 和 Lagrange 描述体系下的, 且

* 收稿日期: 2009-05-13; 修订日期: 2009-11-09

基金项目: 国家自然科学基金(重点)资助项目(50839003); 云南省自然科学基金资助项目(2008GA027)

作者简介: 张立翔(1959—), 男, 云南石屏人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人: Tel: +86-871-3303561; E-mail: zlxzcc@126.com).

流固两种介质物性参数差异大,耦合形成的基于 Lagrange-Euler(LE)的 FEM 控制方程均为非对称的大型非线性系统,对流特性及近壁区流体网格的变异等因素导致控制方程系数矩阵的病态,往往极大地增加数值求解的困难,甚至导致求解失败.广义最小残数法(GMRES)^[31]是解决此类大型非对称病态系统最为有效的数学工具之一.

本文首先给出基于 LE 描述的不可压缩粘性流体和小变形弹性结构动力学的广义变分原理(LE/GVP)在有限元离散格式的基础上形成描述强耦合流激振动的 FEM 控制方程,使用广义梯形法将基于 FEM 的变量型控制方程转化为增量型的线性方程组,即形如 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的方程组,其中矩阵 \mathbf{A} 为含有对流、扩散以及时间因子的非对称矩阵.用 Ayachour 改进的 GMRES 重启算法^[32]求解这个增量控制方程,获取给定 Δt 的增量解,再结合 Hughes-Newmark 法迭代求 $t + \Delta t$ 时刻结构的流激振动响应.

1 基于 LE/GVP 的 FEM 控制方程

Lagrange 描述下结构小变形弹性振动的动力学控制方程可表示为

$$\rho^s \frac{\partial \dot{u}_i^s}{\partial t} + c_{ij} \dot{u}_j^s - \sigma_{ij,j}^s - F_j^s = 0, \quad \text{在 } \Omega^s \text{ 内}, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}^s = \lambda^s p^s \delta_{ij} + \mu^s (u_{i,j}^s + u_{j,i}^s), \quad \text{在 } \Omega^s \text{ 内}, \quad (2)$$

$$\dot{u}_i^s - g_i^s = 0, \quad \text{在边界 } S_u^s \text{ 上}, \quad (3)$$

$$\sigma_{ij}^s n_j^s - h_i^s = 0, \quad \text{在边界 } S_\sigma^s \text{ 上}. \quad (4)$$

Euler 描述下粘性不可压缩流体动力学的控制方程为

$$\rho^f \frac{\partial \dot{u}_i^f}{\partial t} + \rho^f \dot{u}_j^f \dot{u}_{i,j}^f - \sigma_{ij,j}^f - F_i^f = 0, \quad \text{在 } \Omega^f \text{ 内}, \quad (5)$$

$$\dot{u}_{k,k}^f = 0, \quad \text{在 } \Omega^f \text{ 内}, \quad (6)$$

$$\sigma_{ij}^f = -p^f \delta_{ij} + \mu^f (\dot{u}_{i,j}^f + \dot{u}_{j,i}^f), \quad \text{在 } \Omega^f \text{ 内}, \quad (7)$$

$$\dot{u}_i^f - g_i^f = 0, \quad \text{在边界 } S_u^f \text{ 上}, \quad (8)$$

$$\sigma_{ij}^f n_j^f - h_i^f = 0, \quad \text{在边界 } S_\sigma^f \text{ 上}, \quad (9)$$

式中, Ω^f 和 Ω^s 分别为由流体边界 $S^f = S_u^f + S_\sigma^f + S^{fs}$ 和固体边界 $S^s = S_u^s + S_\sigma^s + S^{fs}$ 围成的流体域和固体结构域;上标 f 代表流体, s 代表固体, fs 代表流-固界面; σ_{ij}^f 和 σ_{ij}^s 为流体和固体结构应力张量; p^f 和 $p^s = u_{k,k}^s$ 为流体压力和固体结构体积应变, ρ^f 和 ρ^s 为流体和固体质量密度, μ^f 为流体动力粘性系数; $\lambda^s = E\nu/(1+\nu)(1-2\nu)\rho^s$ 和 $\mu^s = E/(2(1+\nu)\rho^s)$ 为固体材料常数, E 为弹性模量, ν 为泊松比; \dot{u}_i^f 和 \dot{u}_i^s 分别为流速和固体结构振动速度, u_i^s 为振动位移; g_i^f, g_i^s 和 h_i^f, h_i^s 分别为已知的速度和力边界值; n_j^f 和 n_j^s 为流体和固体结构边界的单位外法线方向; δ_{ij} 为 Kronecker 符号. 则可得流-固系统的广义变分原理为^[33]

$$\begin{aligned} \delta \Pi_i^{fsi} = & \iiint_{\Omega^f} \left[\left(\rho^f \frac{\partial \dot{u}_i^f}{\partial t} + \rho^f \dot{u}_j^f \dot{u}_{i,j}^f - F_i^f \right) \delta \dot{u}_i^f + \sigma_{ij}^f \delta \varepsilon_{ij}^f \right] d\Omega + \\ & \iiint_{\Omega^s} \left[\left(\rho^s \frac{\partial \dot{u}_i^s}{\partial t} + c_{ij} \dot{u}_j^s - F_i^s \right) \delta \dot{u}_i^s + \sigma_{ij}^s \delta \dot{\varepsilon}_{ij}^s \right] d\Omega - \\ & \iiint_{\Omega^f} \delta p^f \dot{u}_{k,k}^f d\Omega - \iiint_{\Omega^f} p^f \delta \dot{u}_{k,k}^f d\Omega - \\ & \iint_{S_\sigma^f} h_i^f \delta \dot{u}_i^f dA - \iint_{S_\sigma^s} h_i^s \delta \dot{u}_i^s dA - \iint_{S_u^s} \delta \sigma_{ij}^s n_j^s (\dot{u}_i^s - g_i^s) dA - \\ & \iint_{S_u^f} \delta \sigma_{ij}^f n_j^f (\dot{u}_i^f - g_i^f) dA - \iint_{S_u^s} \sigma_{ij}^s n_j^s \delta \dot{u}_i^s dA - \end{aligned}$$

$$\iint_{S_u^f} \sigma_{ij}^f n_j^f \delta u_i^f dA + \iint_{S_{fs}^s} (\sigma_{ij}^f n_j^f + \sigma_{ij}^s n_j^s) \delta u_i^{fs} dA, \quad (10)$$

式中, ε_{ij}^f 为流体的变形率张量, ε_{ij}^s 为固体结构的应变率张量. 采用有限单元多线性插值函数对 LE/GVP 进行空间离散, 并以流速、压力和振动位移 (u_i^f, p^f, u_i^s) 为基本变量, 则系统的增量形 FEM 控制方程为

$$\tilde{\mathbf{M}}^f \Delta \mathbf{V}^f + \mathbf{B}^p \Delta \mathbf{P}^f + \tilde{\mathbf{K}}_{S_{fs}^s}^s \Delta \mathbf{V}^s = \Delta \mathbf{R}^f, \quad (11)$$

$$\mathbf{C}^{\text{div}} \Delta \mathbf{V}^f = \Delta \mathbf{R}^d, \quad (12)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^s \Delta \mathbf{V}^s + \mathbf{B}_{S_{fs}^s}^p \Delta \mathbf{P}^f + \mathbf{C}_{S_{fs}^s}^{\text{diff}} \Delta \mathbf{V}^f = \Delta \mathbf{R}^s, \quad (13)$$

其中, 用广义梯形法表示的变量增量为

$$\Delta \mathbf{V}^f = \lambda \Delta t \Delta \dot{\mathbf{V}}^f, \quad (14)$$

$$\Delta \mathbf{U}^s = \beta \Delta t \Delta \dot{\mathbf{U}}^s = \beta \Delta t \Delta \mathbf{V}^s, \quad (15)$$

$$\Delta \mathbf{V}^s = \Delta \dot{\mathbf{U}}^s = \theta \Delta t \Delta \ddot{\mathbf{U}}^s = \theta \Delta t \Delta \dot{\mathbf{V}}^s, \quad (16)$$

λ, β 和 θ 为稳定和精度控制参数. 可用更为紧凑的矩阵形式表示上述方程为

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (17)$$

式(17)中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}^f & \mathbf{B}^p & \tilde{\mathbf{K}}_{S_{fs}^s}^s \\ \mathbf{C}^{\text{div}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{S_{fs}^s}^{\text{diff}} & \mathbf{B}_{S_{fs}^s}^p & \tilde{\mathbf{M}}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^f \\ \mathbf{x}^p \\ \mathbf{x}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{V}^f \\ \Delta \mathbf{P}^f \\ \Delta \mathbf{V}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{R}^f \\ \Delta \mathbf{R}^d \\ \Delta \mathbf{R}^s \end{bmatrix}.$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^f = \frac{\mathbf{M}^f}{\lambda \Delta t} + \mathbf{C}^{\text{con}}(\Delta \mathbf{V}^f) + \mathbf{C}^{\text{diff}}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^s = \frac{\mathbf{M}^s}{\theta \Delta t} + \mathbf{C}^s + \mathbf{K}^s \beta \Delta t, \quad \tilde{\mathbf{K}}_{S_{fs}^s}^s = \mathbf{K}_{S_{fs}^s}^s \beta \Delta t,$$

$$\Delta \mathbf{R}^f = \mathbf{B}_{S_u^f}^h \Delta \mathbf{h}^f - \mathbf{C}_{S_u^f}^g \Delta \mathbf{g}^f, \quad \Delta \mathbf{R}^d = \mathbf{C}_{S_u^f}^{\text{div}} \Delta \mathbf{g}^f, \quad \Delta \mathbf{R}^s = \mathbf{B}_{S_\sigma}^h \Delta \mathbf{h}^s - \mathbf{C}_{S_u}^g \Delta \mathbf{g}^s.$$

上述相关矩阵和公式推导过程较为复杂, 具体过程和解释可参看文献[33]. 由式(17)显然可见, 引入广义梯形法处理后, 耦合系统可以线性方程组的形式出现. 但由于其系数矩阵 \mathbf{A} 中含有对流项 $\mathbf{C}^{\text{con}}(\Delta \mathbf{V}^f)$ 因子的存在, 系统仍然是非线性的, 相应的方程实际上表达了一种隐式的非线性离散系统, 本文用 GMRES 联合 Hughes 和 Newmark 法实现迭代求解.

2 GMRES-Aya 算法

GMRES 法是求解具有非对称奇异/非奇异系数矩阵的大型线性方程组十分有效的工具. 文献[32]将 GMRES 发展成求解更为高效的 GMRES-Aya 方法. 下面给出在第 s 个时间步 ($s\Delta t$) 用 GMRES-Aya 求解式(17)的具体过程.

2.1 构造 Krylov 子空间中的 k 维正交基

选择控制方程的初始解 $^{(s)}\mathbf{x}_0$, 并计算基于 $^{(s)}\mathbf{x}_0$ 的残数向量:

$$^{(s)}\mathbf{r}_0 = ^{(s)}\mathbf{b} - ^{(s)}\mathbf{A} ^{(s)}\mathbf{x}_0, \quad (18)$$

式中, 左上标 (s) 表示第 s 个时间步. 由残数向量 $^{(s)}\mathbf{r}_0$ 和控制方程的系数矩阵 $^{(s)}\mathbf{A}$, 构造由 k 个向量组成的 Krylov 子空间:

$$\mathbf{K}_k(^{(s)}\mathbf{A}, ^{(s)}\mathbf{r}_0) = \text{span} [^{(s)}\mathbf{r}_0 \quad ^{(s)}\mathbf{A} ^{(s)}\mathbf{r}_0 \quad \cdots \quad ^{(s)}\mathbf{A}^{k-1} ^{(s)}\mathbf{r}_0], \quad (19)$$

则可在子空间 $\mathbf{K}_k(^{(s)}\mathbf{A}, ^{(s)}\mathbf{r}_0)$ 中按如下规则构造一组正交标准基

$$^{(s)}\mathbf{V}_k = [^{(s)}\mathbf{v}_1 \quad ^{(s)}\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad ^{(s)}\mathbf{v}_k]:$$

1) 启动: 选择向量 $^{(s)}\mathbf{v}_1 = ^{(s)}\mathbf{r}_0 / \| ^{(s)}\mathbf{r}_0 \|$;

2) 迭代: 取 $j = 1, \dots, k$ 执行

$$^{(s)}\mathbf{v}_{j+1} = ^{(s)}\mathbf{A} ^{(s)}\mathbf{v}_j,$$

取 $i = 1, \dots, j$ 执行

$$\begin{aligned} {}^{(s)}h_{i,j} &= \langle {}^{(s)}\mathbf{v}_{j+1}, {}^{(s)}\mathbf{v}_i \rangle, \\ {}^{(s)}\mathbf{v}_{j+1} &\leftarrow {}^{(s)}\mathbf{v}_{j+1} - {}^{(s)}h_{i,j} {}^{(s)}\mathbf{v}_i, \end{aligned}$$

结束;

$$\begin{aligned} {}^{(s)}h_{j+1,j} &= \| {}^{(s)}\mathbf{v}_{j+1,j} \|, \\ {}^{(s)}\mathbf{v}_{j+1} &\leftarrow {}^{(s)}\mathbf{v}_{j+1} / {}^{(s)}h_{j+1,j}, \end{aligned}$$

结束;

其中, $\langle *, * \rangle$ 表示两向量的 Hermite 内积, 定义为 $\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \mathbf{y}^T \mathbf{z} = \sum_{i=1}^n z_i y_i$, $\| * \|$ 表示向量 * 的 Frobenius 范数, 即 $\| * \| = \sqrt{\langle *, * \rangle}$. 利用 $h_{j+1,j}$ 构造 $(k+1) \times k$ 阶的上三角 Hessenberg 矩阵:

$${}^{(s)}\tilde{\mathbf{H}}_k = \begin{bmatrix} {}^{(s)}\mathbf{w} \\ {}^{(s)}\mathbf{H}_k \end{bmatrix}, \quad (20)$$

其中

$${}^{(s)}\mathbf{w} = [{}^{(s)}h_{1,1} \quad {}^{(s)}h_{1,2} \quad \cdots \quad {}^{(s)}h_{1,k-1} \quad {}^{(s)}h_{1,k}], \quad (21)$$

$${}^{(s)}\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} {}^{(s)}h_{2,1} & {}^{(s)}h_{2,2} & \cdots & {}^{(s)}h_{2,k-1} & {}^{(s)}h_{2,k} \\ & {}^{(s)}h_{3,2} & \cdots & {}^{(s)}h_{3,k-1} & {}^{(s)}h_{3,k} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & {}^{(s)}h_{k,k-1} & {}^{(s)}h_{k,k} \\ & & & & {}^{(s)}h_{k+1,k} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

2.2 求解最小二乘法问题

在子空间 $\mathbf{K}_k({}^{(s)}\mathbf{A}, {}^{(s)}\mathbf{r}_0)$ 中寻找一个向量 $\mathbf{y}_k \in \mathbf{C}^k$, 使其满足

$$\begin{aligned} \| {}^{(s)}\mathbf{r}_0 - {}^{(s)}\mathbf{A} {}^{(s)}\mathbf{V}_k \mathbf{y}_k \| &= \min_{\mathbf{z} \in \mathbf{C}^k} \| {}^{(s)}\mathbf{r}_0 - {}^{(s)}\mathbf{A} {}^{(s)}\mathbf{V}_k \mathbf{z} \| = \\ \| {}^{(s)}\mathbf{r}_0 \| \min_{\mathbf{z} \in \mathbf{C}^k} \| {}^{(s)}\mathbf{v}_1 - {}^{(s)}\mathbf{A} {}^{(s)}\mathbf{V}_k \mathbf{z} \|, \end{aligned} \quad (23)$$

则, ${}^{(s)}\mathbf{x}_k = {}^{(s)}\mathbf{x}_0 + {}^{(s)}\mathbf{V}_k \mathbf{y}_k$ 即为所求方程基于 Krylov- k 阶模态的近似解. 由 Arnoldi 分解定理可知

$${}^{(s)}\mathbf{A} {}^{(s)}\mathbf{V}_k = {}^{(s)}\mathbf{V}_{k+1} {}^{(s)}\tilde{\mathbf{H}}_k, \quad (24)$$

且

$${}^{(s)}\mathbf{v}_1 = {}^{(s)}\mathbf{V}_{k+1} \mathbf{e}_1^{k+1}, \quad (25)$$

其中, $\mathbf{e}_1^{k+1} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T$. 将式(24)和(25)代入式(23)得基于 Krylov- k 阶模态近似的残数范数:

$$\| {}^{(s)}\mathbf{r}_k \| = \| {}^{(s)}\mathbf{r}_0 \| \min_{\mathbf{z} \in \mathbf{C}^k} \| \mathbf{e}_1^{k+1} - {}^{(s)}\tilde{\mathbf{H}}_k \mathbf{z} \|. \quad (26)$$

如果有 \mathbf{z}_k 使 $\| \mathbf{e}_1^{k+1} - {}^{(s)}\tilde{\mathbf{H}}_k \mathbf{z}_k \|$ 为最小, 则 $\mathbf{y}_k = \| {}^{(s)}\mathbf{r}_0 \| \mathbf{z}_k$, 所求方程基于 Krylov- k 阶模态的解为

$${}^{(s)}\mathbf{x}_k = {}^{(s)}\mathbf{x}_0 + {}^{(s)}\mathbf{V}_k \| {}^{(s)}\mathbf{r}_0 \| \mathbf{z}_k. \quad (27)$$

文献[32]提供了一个高效求解 \mathbf{z}_k 及其对应解 ${}^{(s)}\mathbf{x}_k$ 的残数范数的算法, 即 GMRES-Aya 算法. 由此可得

$$\mathbf{z}_k = {}^{(s)}\mathbf{H}'_k{}^{-1} \mathbf{c}_k, \quad (28)$$

$$\frac{\| {}^{(s)}\mathbf{r}_k \|}{\| {}^{(s)}\mathbf{r}_0 \|} = \min_{\mathbf{z} \in \mathbf{C}^k} \| \mathbf{e}_1^{k+1} - {}^{(s)}\tilde{\mathbf{H}}_k \mathbf{z} \| = \alpha_k, \quad (29)$$

其中, 向量 $\mathbf{c}_k = [\sin^2 \theta_k q_1 \quad \cdots \quad \sin^2 \theta_k q_{k-1} \quad \gamma_k^2 q_k]^T$, q_k 是向量 $\mathbf{q} = {}^{(s)}\hat{\mathbf{H}}_k{}^{-1} {}^{(s)}\hat{\mathbf{w}}$ 的元素, 矩阵/向

量头上的符号“ \wedge ”代表相应矩阵/向量的转置,

$$\sin\theta_k = h_{k+1,k}\gamma_k, \gamma_k = 1/\sqrt{h_{k+1,k}^2 + (|q_k| \alpha_{k-1})^2}, \alpha_k = \alpha_{k-1}\sin\theta_k, \alpha_0 = 1.$$

当 ${}^{(s)}h_{k+1,k} \neq 0$ 时, 矩阵 ${}^{(s)}\mathbf{H}_k$ 非奇异, 这时取 ${}^{(s)}\mathbf{H}'_k = {}^{(s)}\mathbf{H}_k$; 当 ${}^{(s)}h_{k+1,k} = 0$ 时, 矩阵 ${}^{(s)}\mathbf{H}_k$ 奇异, 这时取 ${}^{(s)}\mathbf{H}'_k = {}^{(s)}\mathbf{H}_k + \mathbf{e}_k^k(\mathbf{e}_k^k)^T$, 即用 1 替换相应位置处的 ${}^{(s)}h_{k+1,k} = 0$ 的元素.

2.3 求增量解

子空间 $\mathbf{K}_k({}^{(s)}\mathbf{A}, {}^{(s)}\mathbf{r}_0)$ 的维数 k 将随迭代次数的增加而逐渐增大, 对于大规模计算问题, 由此带来的计算量和对存储空间的需求将十分巨大, 有效解决这个问题的办法就是算法的不断重启。设 m 是每次启动后执行的迭代次数, 形成的子空间为 Krylov- m , 相应的重启的算法 GMRES-Aya(m) 为:

- 1) 选择初始解 ${}^{(s)}\mathbf{x}_0$, 迭代次数 m 及收敛准则 ε , 启动次数控制参数 $r = 1$;
- 2) 计算初始残数向量 ${}^{(s)}\mathbf{r}_0 = {}^{(s)}\mathbf{b} - {}^{(s)}\mathbf{A}({}^{(s)}\mathbf{x}_0)$ 及向量 ${}^{(s)}\mathbf{v}_1 = {}^{(s)}\mathbf{r}_0 / \|{}^{(s)}\mathbf{r}_0\|$;
- 3) 生成正交基 ${}^{(s)}\mathbf{V}_m = [{}^{(s)}\mathbf{v}_1 \quad {}^{(s)}\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad {}^{(s)}\mathbf{v}_m]$;
- 4) 求解最小二乘法问题 $\|{}^{(s)}\mathbf{r}_m\| = \|{}^{(s)}\mathbf{r}_0\| \min_{z \in \mathbf{C}^m} \|e_1^{m+1} - {}^{(s)}\tilde{\mathbf{H}}_m z\|$

如果 ${}^{(s)}h_{m+1,m} = 0$, 则 ${}^{(s)}\mathbf{H}'_m = {}^{(s)}\mathbf{H}_m$, 转向①,

否则 ${}^{(s)}\mathbf{H}'_m = {}^{(s)}\mathbf{H}_m + \mathbf{e}_m^m(\mathbf{e}_m^m)^T$,

① $\alpha_0 = 1$,

$$\mathbf{q} = {}^{(s)}\hat{\mathbf{H}}_m'^{-1}({}^{(s)}\hat{\mathbf{w}}),$$

$$\gamma_m = 1/\sqrt{h_{m+1,m}^2 + (|q_m| \alpha_{m-1})^2},$$

$$\sin\theta_m = h_{m+1,m}\gamma_m,$$

$$\alpha_m = \alpha_{m-1}\sin\theta_m,$$

$$\mathbf{c}_m = [\sin^2\theta_m q_1 \quad \cdots \quad \sin^2\theta_m q_{m-1} \quad \gamma_m^2 q_m]^T,$$

$$\mathbf{z}_m = {}^{(s)}\mathbf{H}'_m{}^{-1} \mathbf{c}_m,$$

$$\|{}^{(s)}\mathbf{r}_m\| = \|{}^{(s)}\mathbf{r}_0\| \alpha_m;$$

5) 求基于 Krylov- m 阶模态近似解及相应的残数向量

$${}^{(s)}\mathbf{x}_m = {}^{(s)}\mathbf{x}_0 + {}^{(s)}\mathbf{V}_m \|{}^{(s)}\mathbf{r}_0\| \mathbf{z}_m,$$

$${}^{(s)}\mathbf{r}_m = {}^{(s)}\mathbf{b} - {}^{(s)}\mathbf{A}({}^{(s)}\mathbf{x}_m);$$

6) 精度检验及重启

如果 $\|{}^{(s)}\mathbf{r}_m\| = \|{}^{(s)}\mathbf{r}_0\| \alpha_m < \varepsilon$ 或 $\|{}^{(s)}\mathbf{r}_m\| \alpha_m = \|{}^{(s)}\mathbf{r}_0\| \alpha_m^2 < \varepsilon$, 则

$$s \leftarrow s + 1, \quad {}^{(s+1)}\mathbf{x}_0 \leftarrow {}^{(s)}\mathbf{x}_m, \text{ 停止 GMRES-Aya}(m),$$

否则 ${}^{(s)}\mathbf{x}_0 \leftarrow {}^{(s)}\mathbf{x}_m, r \leftarrow r + 1$, 返回 2) 重启。

2.4 基于 GMRES-Aya(m)-Hughes-Newmark 的算法

1) 启动 Hughes 法预测流场

$${}^{(s)}\mathbf{V}_k^{f(j+1)} = {}^{(s)}\mathbf{V}_k^{f(j)} + (1 - \lambda) \Delta t {}^{(s)}\dot{\mathbf{V}}_k^{f(j)}, \quad (30)$$

$${}^{(s)}\mathbf{P}_k^{f(j+1)} = {}^{(s)}\mathbf{P}_k^{f(j)}, \quad (31)$$

当 $j = 0$ 时, ${}^{(s)}\mathbf{V}_k^{f(0)}$, ${}^{(s)}\dot{\mathbf{V}}_k^{f(0)}$ 和 ${}^{(s)}\mathbf{P}_k^{f(0)}$ 为流场启动初值;

2) 启动 Newmark 法预测振动

$${}^{(s)}\dot{\mathbf{V}}_k^{s(j+1)} = \frac{1}{\Delta t} \Delta({}^{(s)}\mathbf{V}_k^{s(j)}) - \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left[\Delta t {}^{(s)}\mathbf{V}_k^{s(j)} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 {}^{(s)}\dot{\mathbf{V}}_k^{s(j)} \right], \quad (32)$$

$${}^{(s)}\mathbf{V}_k^{s(j+1)} = \theta \Delta({}^{(s)}\mathbf{V}_k^{s(j)}) + \left(1 - \frac{\theta}{\beta} \right) {}^{(s)}\mathbf{V}_k^{s(j)} + \left(1 - \frac{\theta}{2\beta} \right) \Delta t {}^{(s)}\dot{\mathbf{V}}_k^{s(j)}, \quad (33)$$

当 $j = 0$ 时, ${}^{(s)}\mathbf{V}_k^{s(0)}$ 和 ${}^{(s)}\dot{\mathbf{V}}_k^{s(0)}$ 为结构计算的启动初值;

3) 启动 GMRES-Aya(m) 求增量

取初值

$${}^{(s)}\mathbf{x}_0^{(j)} = \begin{bmatrix} {}^{(s)}\mathbf{x}_0^{f(j)} \\ {}^{(s)}\mathbf{x}_0^{p(j)} \\ {}^{(s)}\mathbf{x}_0^{s(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \lambda) \Delta t {}^{(s)}\dot{\mathbf{V}}_0^{f(j)} \\ 0 \\ ((\tilde{\mathbf{M}}^s)^{-1} [\Delta \mathbf{R}_0^s - (1 - \lambda) \Delta t \mathbf{C}_{sfs}^{diff(s)} \dot{\mathbf{V}}_0^{f(j)}]) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

进入 GMRES-Aya(m) 迭代, 求出;

4) 流场及振动修正:

$${}^{(s)}\mathbf{V}_k^{f(j+1)} = {}^{(s)}\mathbf{V}_k^{f(j)} + {}^{(s)}\mathbf{x}_k^{f(j)}, \quad (35)$$

$${}^{(s)}\mathbf{P}_k^{f(j+1)} = {}^{(s)}\mathbf{P}_k^{f(j)} + {}^{(s)}\mathbf{x}_k^{p(j)}, \quad (36)$$

$${}^{(s)}\dot{\mathbf{V}}_k^{s(j+1)} = \frac{1}{\Delta t} {}^{(s)}\mathbf{x}_k^{s(j)} - \frac{1}{\beta \Delta t^2} [\Delta t {}^{(s)}\mathbf{V}_k^{s(j)} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 {}^{(s)}\dot{\mathbf{V}}_k^{s(j)}], \quad (37)$$

$${}^{(s)}\mathbf{V}_k^{s(j+1)} = \theta {}^{(s)}\mathbf{x}_k^{s(j)} + \left(1 - \frac{\theta}{\beta}\right) {}^{(s)}\mathbf{V}_k^{s(j)} + \left(1 - \frac{\theta}{2\beta}\right) \Delta t {}^{(s)}\dot{\mathbf{V}}_k^{s(j)}, \quad (38)$$

迭代直至满足精度要求。

3 数值算例

以某水轮机模型转轮叶道为分析对象。该模型转轮直径 0.45 m, 10 个叶片, 导水机构分别由 23 个固定和活动导叶组成。在其中 1 个叶片的正面和负面上分别装有 5 只 Kulite 公司生产的 LL-072-25A 型微压力传感器和 2 只 DH201 型加速度传感器。模型材料为有机玻璃, 静弹性模量 2 500 MPa, Poisson 比 0.384, 质量密度 1 280 kg/m³。

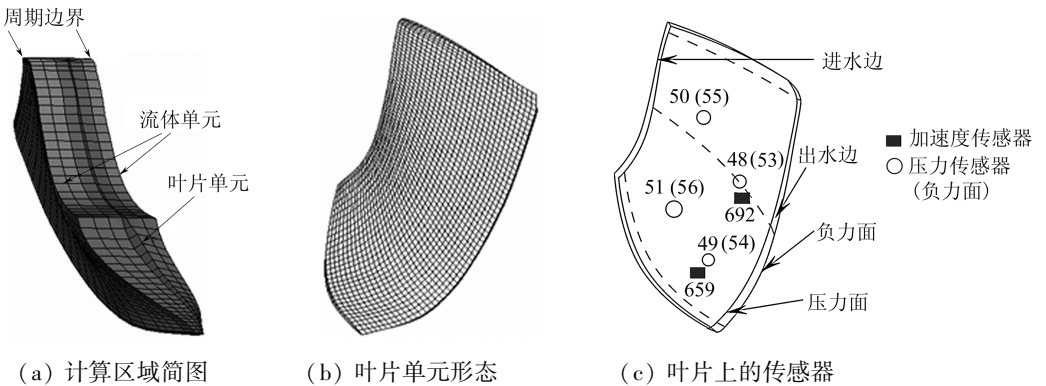


图1 水轮机叶道计算域

叶片进水边长度 $L_1 = 166$ mm, 出水边长度 $L_2 = 281$ mm, 与上冠和下环的交线长度分别为 $L_3 = 130$ mm 和 $L_4 = 197$ mm, 进口处叶片间距分别为 $S_1 = 69$ mm(上冠处) 和 $S_2 = 102$ mm(下环处), 叶片计算域如图 1 所示, 其中流体采用 6 面体 8 结点单元剖分, 单元尺度控制为 $L_2 \times L_4 \times S_2 = 200 \times 140 \times 52$, 共计 1.456 M 个单元; 叶片按弹性结构处理, 共划分 84 000 个单元, 其余固体边界按刚性体处理。

速度边界 S_u^f 为: 进口速度边界 S_{u0}^f 及刚性壁面的非滑移边界 S_{ur}^f , 即在 S_{u0}^f 上, $\mathbf{g}_0^f = \mathbf{V}_0^f$; 在 S_{ur}^f 上, $\mathbf{g}_r^f = \mathbf{0}$ 。力边界 S_σ^f 为: 出口压力边界 $S_{\sigma 0}^f$ 及周期压力边界 $S_{\sigma 1}^f$, 即在 $S_{\sigma 0}^f$ 上, $\mathbf{h}_0^f = \mathbf{0}$; 在 $S_{\sigma 1}^f$ 上, $\mathbf{h}_1^f = \mathbf{P}_1^f$, 其中 \mathbf{P}_1^f 按文献[24]的计算取值。结构刚性壁面取 $\mathbf{g}_0^s = \mathbf{0}$, 在 S_σ^s 上取 $\mathbf{h}_0^s = \mathbf{0}$ 。导叶开度 22 mm, 进口来流平均流速 $V_0^f = 1$ m/s, 湍流强度 5%, 攻角 39°。叶道流通时间 $T = L/V_0^f =$

0.157 3 s, 流动 Reynolds 数 $Re = V_0^l L / \nu = 148\ 400$, L 定义为叶片中弦长. 算法控制参数 $\lambda = \theta = 0.5$, $\beta = 1/6$, 时间步长 $\Delta t = 0.000\ 4$ s, 计算时间长度取为 $10T$, 即 1.573 s. GMRES-Aya(m) 算法重启控制参数 $m = 20$, 收敛精度 $\varepsilon = 10^{-6}$. 计算机为具有 40 个并行计算单元的曙光 HPC100, 建模前处理由 ANSYS[®] 完成, 流场后处理使用 TECPLOT[®].

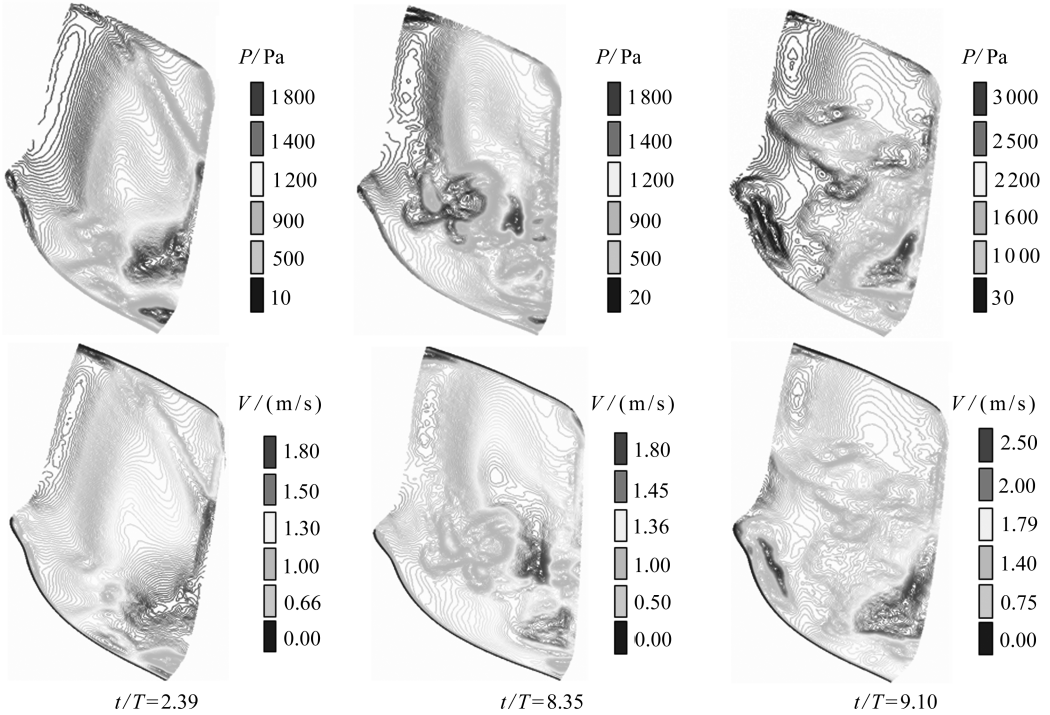


图 2 叶道内靠近叶片压力面的压力及流速分布

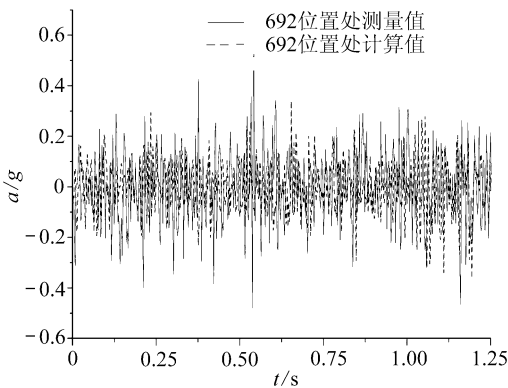


图 3 692 号位置计算和试验加速度时程比较

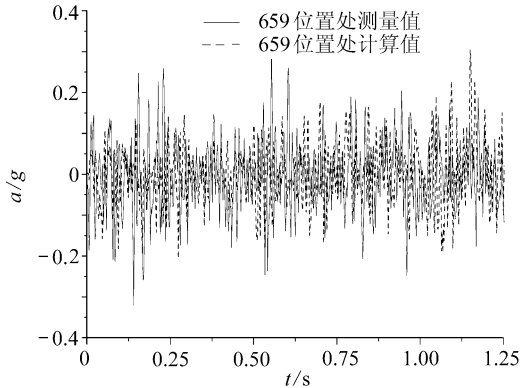


图 4 659 号位置计算和试验加速度时程比较

在 $t/T = 2.39, 8.35$ 和 9.10 时刻靠近叶片负力面壁面区域的压力、速度分布如图 2 所示, 叶道内的流场分布是合理的, 且能较好地反映主要流动结构的分布及其演化的规律. 叶片上编号为 692 和 659 位置处振动加速度的计算值和试验值的比较如图 3 和图 4 所示; 48 和 53 号位置处的计算和试验压力比较如图 5 和图 6 所示. 由图可见, 这些指定点处的振动加速度与压力时程与试验实测时程的趋势是基本吻合的.

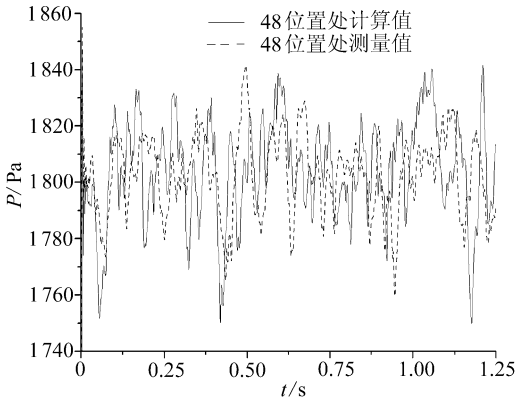


图5 48号位置计算和试验压力时程比较

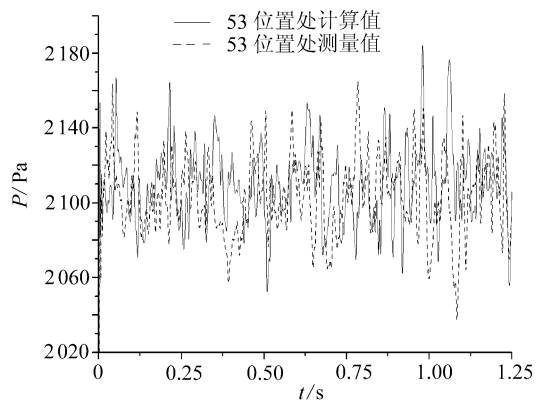


图6 53号位置计算和试验压力时程比较

4 结 论

本文将 GMRES-Aya 与 Hughes 法(对于流动)和 Newmark 法(对于振动)相结合,构造出基于 FEM 的分析强耦合流激振动的 GMRES-Hughes-Newmark 方法.该方法由于结合了不同算法的特点,对奇异/非奇异的非对称大型控制方程的求解、流动预测以及振动分析分别采用不同的求解策略,对处理复杂流道流固耦合流激振动问题很有效,具有稳定、高效且数值精度可控的特点.

参考文献:

- [1] Weaver D S, Ziada S, Au-Yang M K, *et al.* Flow-induced vibration in power and process plants components- progress and prospects[J]. *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, 2000, **122**(3): 339-348.
- [2] 张立翔,杨柯. 流体结构互动理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,2004.
- [3] Wu X H, Durbin P A. Evidence of longitudinal vortices evolved from distorted wakes in a turbine passage[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2001, **446**:199-228.
- [4] Wissink J G. DNS of separating, low Reynolds number flow in a turbine cascade with incoming wakes[J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2003,**24**(4): 626-635.
- [5] Rodi W. DNS and LES of some engineering flows[J]. *Fluid Dynamics Research*, 2006,**38**(2/3):145-173.
- [6] Moin P, Mahesh K. Direct numerical simulation: a tool in turbulence research[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1998, **30**: 539-578.
- [7] Wissink J G, Rodi W. Direct numerical simulation of flow and heat transfer in a turbine cascade with incoming wakes[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2006,**569**: 209-247.
- [8] Moin P. Advances in large eddy simulation methodology for complex flows[J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2002, **24**(5): 710-720.
- [9] Manna M, Benocci C, Simons E. Large eddy simulation of turbulent flows via domain decomposition techniques—part 1: theory[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2005, **48**(4): 367-395.
- [10] Benocci C, Giammanco R, Manna M, *et al.* Large eddy simulation of turbulent flows via domain decomposition techniques—part 2: applications[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2005, **48**(4): 397-422.
- [11] Kjellgren P, Hyvärinen J. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method[J]. *Com-*

- putational Mechanics*, 1998, **21**(1):81-90.
- [12] Sarrate J, Huerta A, Donea J. Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation for fluid-rigid body interaction[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, **190**(24/25): 3171-3188.
- [13] Souli M, Ouahsine A, Lewin L. ALE formulation for fluid structure interaction problems[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, **190**(5/7): 659-675.
- [14] Peskin C S. Numerical analysis of blood flow in the heart[J]. *Journal of Computational Physics*, 1977, **25**(3): 220-252.
- [15] Kim J, Kim D, Choi H. An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries[J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, **171**(1): 132-150.
- [16] Iaccarino G, Verzicco R. Immersed boundary technique for turbulent flow simulations[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2003, **56**(30): 331-347.
- [17] Shin S, Bae S Y, Kim I C, *et al.* Computation of flow over a flexible plate using the hybrid Cartesian/immersed boundary method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2007, **55**(3):263-282.
- [18] Tezduyar T E. Computation of moving boundaries and interfaces and stabilization parameters[J]. *International of Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2003, **43**(5):555-575.
- [19] Bayoumi H N, Gadala M S. A complete finite element treatment for the fully coupled implicit ALE formulation[J]. *Computational Mechanics*, 2004, **33**(6): 435-452.
- [20] Dettmer W, Perić D. A computational framework for fluid-structure interaction: finite element formulation and applications[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, **195**(41/43):5757-5779.
- [21] Tezduyar T E. Finite elements in fluids: stabilized formulations and moving boundaries and interfaces[J]. *Computers and Fluids*, 2007, **36**(2):191-206.
- [22] Tezduyar T E. Finite elements in fluids: special methods and enhanced solution techniques [J]. *Computers and Fluids*, 2007, **36**(2):207-223.
- [23] Tezduyar T E, Sathe S. Modelling of fluid-structure interactions with the space-time finite elements: solution techniques[J]. *International of Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2007, **54**(6/8):855-900.
- [24] Zhang L X, Guo Y, Wang W Q. Large eddy simulation of turbulent flow in a true 3D Francis hydro turbine passage with dynamical fluid-structure interaction[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2007, **54**(5): 517-541.
- [25] Zhang L X, Wang W Q, Guo Y. Numerical simulation of flow features and energy exchanging physics in near-wall region with fluid-structure interaction[J]. *International Journal of Modern Physics B*, 2008, **22**(6): 651-669.
- [26] Liew K M, Wang W Q, Zhang L X, *et al.* A computational approach for predicting the hydro-elasticity of flexible structures based on the pressure Poisson equation [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, **72**(13):1560-1583.
- [27] Ishihara D, Yoshimura S. A monolithic approach for interaction of incompressible viscous fluid and an elastic body based on fluid pressure Poisson equation[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, **64**(2):167-203.
- [28] Wang W Q, He X Q, Zhang L X, *et al.* Strongly coupled simulation of fluid-structure interaction in a Francis hydroturbine[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2009, **60**(5):515-538.
- [29] Teixeira P R F, Awruch A M. Numerical simulation of fluid-structure interaction using the finite element method[J]. *Computers & Fluids*, 2005, **34**(2):249-273.

- [30] Heil M. An efficient solver for the fully coupled solution of large-displacement fluid-structure interaction problems[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, **193**(1/2): 1-23.
- [31] Saad Y, Schultz M H. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems[J]. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1986, **7**(3):856-869.
- [32] Ayachour E H. A fast implementation for GMRES method[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2003, **15**(2):269-283.
- [33] Zhang L X, Guo Y K, Wang W Q. FEM simulation of turbulent flow in a turbine blade passage with dynamical fluid-structure interaction[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2009, **61**(12):1299-1330.

Analysis of Fully Coupled Flow-Induced Vibration of Structure Under Small Deformation With GMRES

ZHANG Li-xiang¹, GUO Ya-kun², ZHANG Hong-ming¹

(1. *Department of Engineering Mechanics, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650051, P. R. China;*

2. *School of Engineering, University of Aberdeen, Aberdeen AB24 3UE, UK*)

Abstract: Lagrangian-Eulerian formulations, based on a generalized variational principle of coupling fluid and solid dynamics, was established to describe flow-induced vibration of a structure under small deformation in incompressible viscous fluid flow. The spatial discretization of the formulations was on multi-linear interpolating functions using the finite element method for both the fluid and solid structure. The generalized trapezoidal rule was used to obtain apparently nonsymmetric linear equations in incremental form for the variables of the flow and vibration. The nonlinear convective term and time factors were contained in nonsymmetric coefficient matrix of the equations. Generalized minimum residual method (GMRES) was used to solve the incremental equations. A new stable algorithm of GMRES-Hughes-Newmark was developed to deal with flow-induced vibration with dynamical fluid-structure interaction in complex geometry. Good agreement between the simulations and laboratory measurements of the pressure and blade vibration accelerations in a hydro turbine passage was obtained, indicating that the GMRES-Hughes-Newmark algorithm presented was suitable for dealing with the flow-induced vibration of structures under small deformation.

Key words: flow-induced vibration; fluid-structure interaction; generalized variational principle; numerical methods; GMRES