

# 正交各向异性圆柱体在轴压作用下的应力场\*

钟卫洲<sup>1,2</sup>, 宋顺成<sup>1</sup>, 陈刚<sup>2</sup>, 黄西成<sup>2</sup>, 黄鹏<sup>2</sup>

(1. 西南交通大学 力学与工程学院, 成都 610031;

2. 中国工程物理研究院 总体工程研究所, 四川 绵阳 621900)

(我刊编委宋顺成来稿)

**摘要:** 基于材料体积不可压假设,对轴向压缩作用下圆柱试件在加载面内的环向和径向应力分布进行理论分析,计算结果表明:当试件材料本构为正交各向异性时,环向和径向应力分布为半径的幂函数形式;试件材料为横观各向同性时,环向和径向应力为半径的二次函数.在圆柱试件轴线上环向和径向应力相等,且均具有最大值;试件圆周边界上径向应力为0,环向应力具有极小值.通过最大拉伸应变破坏理论对试件环向应变进行分析,获得了产生环向拉伸破坏时的临界轴向载荷;并采用 Hill-蔡强度理论对试件圆周边界上计算得到的应力参量进行描述,得到了轴压作用下圆柱试件的 Hill-蔡强度理论表达式,其不仅取决于轴向应力和试件材料的基本力学性能,还与试件轴向变形的应变率及应变率随时间的变化率相关.

**关键词:** 正交各向异性; 轴向压缩; 轴对称; 应力分布; 应变率

**中图分类号:** O344.3      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.03.004

## 引 言

随着现代材料技术的发展,越来越多的各向异性材料被广泛应用于工业、民用和武器领域.由于各向异性材料通常表现为不同方向弹性模量、Poisson 比、拉压强度等基本力学参量不等,因此各向异性结构体分析是一个较为复杂的力学问题.为了在结构设计中合理运用这些材料以及对结构进行安全评估,需认识各向异性材料本构参数和不同力学状态下的破坏准则.近年来,国内外研究人员在正交各向异性材料弹塑性本构强度理论和结构数值分析方面开展了大量研究.在弹塑性本构强度理论方面,Oana 等<sup>[1]</sup>针对各向异性和拉压不对称材料提出了宏观正交各向异性屈服准则,其屈服准则为应力偏量主值函数.Plunkett 等<sup>[2]</sup>对薄板金属提出了各向异性屈服准则,该准则能对拉压各向异性金属屈服行为进行很好的描述.曾纪杰等<sup>[3]</sup>应用能量原理和正交各向异性材料的混合硬化本构关系,推导出在两端简支条件下轴向压缩圆柱壳的弹塑性临界应力表达式.Abd-Alla 等<sup>[4]</sup>研究了非均质正交各向异性弹性圆柱体的平面应变问题,获得了应力和位移的解析表达式.田燕萍等<sup>[5]</sup>基于弹塑性力学和损伤理论,建立了与应力球张量有关的正交各向异性材料的混合硬化屈服准则,研究了具有损伤正交各向异性

\* 收稿日期: 2009-11-05; 修订日期: 2010-01-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50874095); 国防 973 项目专题基金资助项目

作者简介: 钟卫洲(1978—),男,四川仁寿人,博士生(联系人. E-mail: wz\_zhong@sina.com)

材料薄板的弹塑性屈曲问题. 在结构计算分析方面, Jeffrey 等<sup>[6]</sup>采用正交各向异性超弹性本构模型对生物体内组织进行了模拟. Romashchenko 等<sup>[7]</sup>对不同空间螺旋状增强的正交各向异性多层厚壁圆筒动力学行为进行了数值分析. Redekop 等<sup>[8]</sup>运用微分求积方法分析了轴压作用下回转正交各向异性薄壳结构的屈曲行为. Grigorenko 等<sup>[9]</sup>基于离散 Fourier 级数对正交各向异性 and 横观各向同性椭圆空心圆筒应力状态进行了计算, 同时还有很多研究者<sup>[10-14]</sup>对正交各向异性材料结构的计算方法开展了大量工作.

在正交各向异性和拉压强度差异较大材料的准静态压缩和 Hopkinson 杆动态压缩实验中, 其破坏形式并不表现为沿加载方向压缩或斜剪切失效, 而是试件边缘被拉伸破坏. 如对正交各向异性材料木材沿其顺纹方向压缩时, 一般在试件表面产生环向拉伸破坏, 已有文献<sup>[15-19]</sup>对木材横向压缩作用下应力、应变分布, 单轴应力状态下的失效及层合结构多轴加载行为进行了研究. 对于拉伸强度远小于压缩强度的混凝土、岩石类圆柱材料, 在压缩作用下破坏通常由拉伸应力引起(如背面层裂、射线状环向撕裂), 徐卫亚等<sup>[20]</sup>以损伤变量作为加权系数, 将岩块和结构面抗剪强度参数的加权平均值作为岩体等效强度参数, 根据岩体在各空间截面上的等效抗剪强度, 计算了岩体正交各向异性等效强度参数. 虽然目前对于正交各向异性材料结构实验和数值模拟方面的研究文献比较多, 但对于正交各向异性材料在冲击载荷作用下的力学行为理论分析的文献较少, 因此针对正交各向异性及拉压强度差异较大的材料, 分析其在静态载荷作用下沿加载面内的应力分布是很有必要的, 有助于认识材料的破坏机理, 对结构进行合理的安全设计.

本文在材料变形体积不可压假设条件下, 对圆柱试件在轴向载荷作用下沿圆面内的环向和径向应力分布进行分析计算, 给出了材料本构分别为正交各向异性和横观各向同性时的环向应力和径向应力分布函数; 基于最大拉伸应变破坏准则, 获得了试件圆环面产生拉伸破坏时的临界轴向载荷; 运用 Hill-蔡强度理论对试件圆环面上失效行为进行了描述, 得到了含应变率参数的失效准则表达式, 并对木材在轴压载荷作用下的失效行为及弹丸侵彻混凝土、岩石类材料靶体问题进行了分析讨论.

## 1 轴向载荷与环向应变关系

假设材料在压缩过程中体积不可压, 加载面无摩擦(试件在载荷作用下由长柱体变为短柱体, 不发生鼓状变形), 压缩过程中试件不发生失稳, 对圆柱形试件轴向稳态压缩行为进行理论分析, 其简化分析模型如图 1 所示. 图 1 中  $h_0$  和  $h_{end}$  分别为试件初始轴向长度和压缩后轴向长度,  $R_0$  和  $R_{end}$  为试件变形前、后半径. 在载荷  $P$  作用下试件轴向应变  $\varepsilon_z$  和环向应变  $\varepsilon_\theta$  表示为

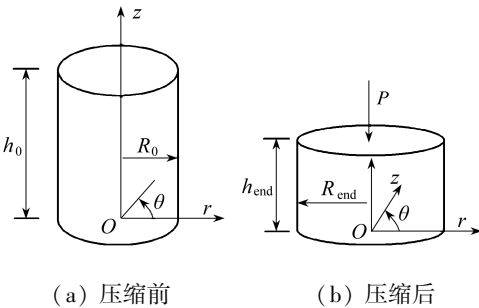


图 1 轴向压缩模型简图

$$\varepsilon_z = \ln \frac{h_{end}}{h_0}, \tag{1}$$

$$\varepsilon_\theta = \ln \frac{2\pi R_{end}}{2\pi R_0} = \ln \frac{R_{end}}{R_0}. \tag{2}$$

由体积不可压假设有

$$\pi R_0^2 h_0 = \pi R_{end}^2 h_{end}, \tag{3}$$

即 
$$\left(\frac{R_{end}}{R_0}\right)^2 = \frac{h_0}{h_{end}}.$$

结合式(1) ~ (3), 轴向应变  $\varepsilon_z$  与环向应变  $\varepsilon_\theta$

之间关系为

$$2\varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0. \quad (4)$$

式(4)中可以看出圆柱试件在体积不可压的条件下,其产生的轴向压缩应变绝对值为环向拉伸应变的2倍.

若作用载荷  $P$  小于试件轴向压缩弹性极限载荷,则试件轴向应变可表示为

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma}{E_a} = \frac{P}{E_a \pi R_{\text{end}}^2}, \quad (5)$$

式(5)中  $E_a$  为试件轴向方向的弹性模量,将式(5)代入式(4)进行化简,有

$$P = -2E_a \pi R_{\text{end}}^2 \ln \frac{R_{\text{end}}}{R_0} = -2E_a \pi R_{\text{end}}^2 \varepsilon_\theta, \quad (6)$$

式(6)即为在试件体积不可压假设和轴向载荷小于弹性极限载荷下得到的轴向载荷与试件环向应变间的关系.若试件沿环向拉伸失效应变较低,在轴向压缩载荷下发生环向拉伸破坏,则可由式(2)和式(6)得到轴压作用下试件产生环向拉伸失效的临界轴向载荷  $P^*$ :

$$P^* = -2E_a \pi R_0^2 e^{2\varepsilon_{\theta y}} \varepsilon_{\theta y}, \quad (7)$$

式(7)中  $\varepsilon_{\theta y}$  为试件材料沿环向方向的拉伸失效应变.

## 2 试件轴向作用下的响应和应力分布

### 2.1 尺寸变形和径向加速度

对于图1模型,假设试件在塑性变形某时刻半径为  $r$ ,轴向长度为  $h$ ,由体积不可压有  $dV = 0$ ,其表达式为

$$dV = d(\pi r^2 h) = 2\pi r h dr + \pi r^2 dh = 0, \quad (8)$$

$$\text{即} \quad 2h dr = -r dh.$$

由于试件为轴对称结构,在轴对称载荷  $P$  作用下其力学响应也应呈现轴对称性,因此,在试件圆截面内,沿环向方向速度和加速度为0.结合式(8)可得到径向方向速度:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -\frac{r dh}{2h dt}, \quad (9)$$

径向加速度为

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = -\frac{dh}{2h dt} \left( \frac{dr}{dt} \right) - \frac{r dh}{2 dt} \left( \frac{-1}{h^2} \frac{dh}{dt} \right) - \frac{r}{2h} \frac{d^2 h}{dt^2}. \quad (10)$$

将式(9)代入式(10),化简有

$$a_r = \frac{r}{4h^2} \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 - \frac{r}{2h} \frac{d^2 h}{dt^2}, \quad (11)$$

$$\text{由于} \quad \varepsilon_z = \frac{dh}{h}, \quad \dot{\varepsilon}_z = \frac{dh}{h dt},$$

因此式(11)可化为

$$a_r = \frac{r \dot{\varepsilon}_z^2}{4} - \frac{r}{2} \frac{d\dot{\varepsilon}_z}{dt}. \quad (12)$$

从式(1)可知轴向应变  $\varepsilon_z$  可由轴向压缩前后高度来表达,可推导出轴向变形前后高度关系:

$$h_{\text{end}} = h_0 e^{\varepsilon_z}. \quad (13)$$

将式(13)代入体积不可压公式(3),有

$$\pi R_0^2 h_0 = \pi R_{\text{end}}^2 h_0 e^{\varepsilon_z}, \tag{14}$$

即  $R_{\text{end}} = R_0 e^{-\varepsilon_z/2}$ . (15)

式(15)为试件最终变形后半径与初始半径之间的关系,试件最终半径改变取决于  $e^{-\varepsilon_z/2}$ .

### 2.2 试件径向、环向应力分析

由于圆柱试件为轴对称结构,且受轴对称载荷,因此试件在压缩过程中应力分布亦应呈轴对称分布,即应力分量  $\sigma_r$  和  $\sigma_\theta$  应只是半径  $r$  的函数,  $\tau_{r,\theta} = \tau_{\theta,r} = 0$ , 分析简图如图 2 所示.

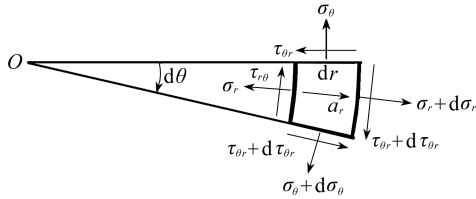


图 2 平面微元分析示意图

根据弹性力学平面问题的极坐标解<sup>[21]</sup>, 可得其变形协调方程:

$$\frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) - \varepsilon_r = 0. \tag{16}$$

引入应力函数  $\varphi = r\sigma_r$ , 令微元密度为  $\rho$ , 则应力分量满足

$$\sigma_r = \frac{\varphi}{r}, \quad \sigma_\theta = \frac{d\varphi}{dr} + \rho a_r r. \tag{17}$$

圆柱坐标下,轴对称问题的物理方程为

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_r} - \frac{\nu_{\theta r}\sigma_\theta}{E_\theta} - \frac{\nu_{zr}\sigma_z}{E_z}, \tag{18}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \frac{\nu_{r\theta}\sigma_r}{E_r} - \frac{\nu_{z\theta}\sigma_z}{E_z}, \tag{19}$$

上式中,  $E_r, E_\theta, E_z$  分别为圆柱体径向弹性模量、环向弹性模量和轴向弹性模量, 将式(12)和(17)~(19)代入式(16), 有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{E_\theta} \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left( \frac{1}{E_\theta} - \frac{\nu_{r\theta}}{E_r} + \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} \right) \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{E_r} \frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{E_\theta} (3 + \nu_{\theta r}) \times \\ &\left( \frac{\dot{\varepsilon}_z^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varepsilon}_z}{dt} \right) \rho r - \frac{(\nu_{z\theta} - \nu_{zr})\sigma_z}{E_z} \frac{1}{r} = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

对于正交各向异性材料,工程弹性常数间有以下关系:

$$\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} = \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}. \tag{21}$$

结合式(21)和(20)可简化为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{E_\theta} \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{E_\theta} \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{E_r} \frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{E_\theta} (3 + \nu_{\theta r}) \times \\ &\left( \frac{\dot{\varepsilon}_z^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varepsilon}_z}{dt} \right) \rho r - \frac{(\nu_{z\theta} - \nu_{zr})\sigma_z}{E_z} \frac{1}{r} = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

式(22)通解为

$$\begin{aligned} \varphi = &r^{-\sqrt{E_\theta/E_r}} A + r^{\sqrt{E_\theta/E_r}} B + \frac{E_\theta E_r (\nu_{z\theta} - \nu_{zr}) \sigma_z}{(E_r - E_\theta) E_z} r - \\ &\frac{E_r (3 + \nu_{\theta r})}{9E_r - E_\theta} \left( \frac{\dot{\varepsilon}_z^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varepsilon}_z}{dt} \right) \rho r^3, \end{aligned} \tag{23}$$

式(23)中  $A$  和  $B$  为积分常数,由式(17)和式(23),可得

$$\sigma_r = r^{-(1 + \sqrt{E_\theta/E_r})} A + r^{\sqrt{E_\theta/E_r} - 1} B + \frac{E_\theta E_r (\nu_{z\theta} - \nu_{zr}) \sigma_z}{(E_r - E_\theta) E_z} -$$

$$\frac{E_r(3 + \nu_{\theta r})}{9E_r - E_\theta} \left( \frac{\dot{\varepsilon}_z^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varepsilon}_z}{dt} \right) \rho r^2, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = & -\sqrt{E_\theta/E_r} r^{-(1+\sqrt{E_\theta/E_r})} A + \sqrt{E_\theta/E_r} r^{\sqrt{E_\theta/E_r}-1} B + \\ & \frac{E_\theta E_r(\nu_{z\theta} - \nu_{zr})\sigma_z}{(E_r - E_\theta)E_z} - \frac{(E_\theta + 3E_r\nu_{\theta r})}{9E_r - E_\theta} \left( \frac{\dot{\varepsilon}_z^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varepsilon}_z}{dt} \right) \rho r^2. \end{aligned} \quad (25)$$

对于圆柱形试件,在  $r=0$  圆心处的应力为有限值,且  $1 + \sqrt{E_\theta/E_r} > 1$ ,因此积分常数  $A=0$ ;同时在圆柱试件圆周边  $r=R_0 e^{-\varepsilon_z/2}$  有  $\sigma_r=0$ ,则积分常数  $B$  为

$$\begin{aligned} B = & -\frac{E_\theta E_r(\nu_{z\theta} - \nu_{zr})\sigma_z}{(E_r - E_\theta)E_z} (R_0 e^{-\varepsilon_z/2})^{1-\sqrt{E_\theta/E_r}} + \\ & \frac{E_r(3 + \nu_{\theta r})}{9E_r - E_\theta} \rho \left( \frac{\dot{\varepsilon}_z^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varepsilon}_z}{dt} \right) (R_0 e^{-\varepsilon_z/2})^{3-\sqrt{E_\theta/E_r}}. \end{aligned} \quad (26)$$

将  $A$  和  $B$  常数代入式(24)和(25),有

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \frac{E_\theta E_r(\nu_{z\theta} - \nu_{zr})\sigma_z}{(E_r - E_\theta)E_z} [1 - (R_0 e^{-\varepsilon_z/2})^{1-\sqrt{E_\theta/E_r}} r^{\sqrt{E_\theta/E_r}-1}] + \\ & \rho \frac{E_r(3 + \nu_{\theta r})}{9E_r - E_\theta} \left( \frac{\dot{\varepsilon}_z^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varepsilon}_z}{dt} \right) [(R_0 e^{-\varepsilon_z/2})^{3-\sqrt{E_\theta/E_r}} r^{\sqrt{E_\theta/E_r}-1} - r^2], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = & \frac{E_\theta E_r(\nu_{z\theta} - \nu_{zr})\sigma_z}{(E_r - E_\theta)E_z} [1 - \sqrt{E_\theta/E_r} (R_0 e^{-\varepsilon_z/2})^{1-\sqrt{E_\theta/E_r}} r^{\sqrt{E_\theta/E_r}-1}] + \\ & \rho \left( \frac{\dot{\varepsilon}_z^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varepsilon}_z}{dt} \right) \left[ \sqrt{E_\theta/E_r} \frac{E_r(3 + \nu_{\theta r})}{9E_r - E_\theta} (R_0 e^{-\varepsilon_z/2})^{3-\sqrt{E_\theta/E_r}} r^{\sqrt{E_\theta/E_r}-1} - \right. \\ & \left. \frac{(E_\theta + 3E_r\nu_{\theta r})}{9E_r - E_\theta} r^2 \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

从式(27)和式(28)可以看出,对于轴向压缩正交各向异性圆柱试件,试件圆截面内的环向和径向应力分布为半径  $r$  的幂函数形式,在稳态压缩过程中其应力分布与材料3个方向弹性模量、Poisson比、密度、轴向应变等参量相关,而与试件轴向长度无关。 $\sigma_r$  和  $\sigma_\theta$  应力值随半径  $r$  增大而减小,其中  $\sigma_r$  在试件圆周面上( $r=R_0 e^{-\varepsilon_z/2}$ )下降为0。在准静态压缩情况下,轴向应变率及其变化率  $\dot{\varepsilon}_z, d\dot{\varepsilon}_z/dt$  等于0,因此计算中可忽略惯性项;而对于非恒应变率动态压缩情况,轴向应变率  $\dot{\varepsilon}_z$  不为0,且  $d\dot{\varepsilon}_z/dt$  为非零,因此  $\sigma_r, \sigma_\theta$  应力与试件惯性效应相关。

若试件为横观各向同性材料,则试件在圆面内各方向上的弹性模量和 Poisson 比相等,则有  $E_r = E_\theta = E; \nu_{z\theta} = \nu_{zr} = \nu$ ,将式(27)和式(28)中各弹性模量和 Poisson 比分别用  $E$  和  $\nu$  进行替代化简,有

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8} \left( \frac{\dot{\varepsilon}_z^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varepsilon}_z}{dt} \right) \rho (R_0^2 e^{-\varepsilon_z} - r^2), \quad (29)$$

$$\sigma_\theta = \rho \left( \frac{\dot{\varepsilon}_z^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varepsilon}_z}{dt} \right) \left( \frac{3 + \nu}{8} R_0^2 e^{-\varepsilon_z} - \frac{1 + 3\nu}{8} r^2 \right). \quad (30)$$

式(29)和式(30)则为横观各向同性圆柱试件在轴向载荷作用下沿径向和环向方向的应力分布,其为半径  $r$  的二次函数,该表达式与文献[21]中圆盘匀速转动中应力分布函数相似,文献[21]中应力分量表达式为

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 (a^2 - r^2), \quad (31)$$

$$\sigma_\theta = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 \left( a^2 - \frac{1 + 3\nu r^2}{3 + \nu} \right), \quad (32)$$

式(31)和式(32)中  $a$  为旋转圆盘的半径,  $\omega$  为圆盘的旋转角速度, 将式(29)和(30)与式(31)和(32)进行比较可以看出, 圆柱试件在轴向载荷作用下沿半径产生的径向加速度

$$\frac{r \dot{\varepsilon}_z^2}{4} - \frac{r}{2} \frac{d\dot{\varepsilon}_z}{dt},$$

等同于文献[21]中圆盘匀速转动过程中的向心加速度  $\omega^2 r$ ; 圆柱试件在轴向载荷作用下变形后的半径  $R_0 e^{-\varepsilon_z/2}$  与旋转圆盘半径  $a$  对应. 在文献[21]中假定圆盘在匀速转动中不产生变形, 即圆盘半径  $a$  在运动过程中为恒值, 本计算分析则视载荷作用下试件体积不可压, 试件半径在轴向载荷作用下将发生变化, 在产生轴向应变  $\varepsilon_z$  时的试件半径尺寸由初始  $R_0$  变为  $R_0 e^{-\varepsilon_z/2}$ .

从式(29)和(30)可知, 对于横观各向同性材料, 试件径向应力和环向应力在相同应变率  $\dot{\varepsilon}_z$  下,  $r$  值越小,  $\sigma_r$  和  $\sigma_\theta$  应力值就越大; 由于 Poisson 比  $\nu \leq 0.5$ , 因此  $\sigma_r \leq \sigma_\theta$ ;  $\sigma_r$  和  $\sigma_\theta$  在圆柱体中心线 ( $r = 0$ ) 上具有最大值:

$$(\sigma_r)_{\max} = (\sigma_\theta)_{\max} = \frac{3 + \nu}{8} \left( \frac{\dot{\varepsilon}_z^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varepsilon}_z}{dt} \right) \rho R_0^2 e^{-\varepsilon_z}. \quad (33)$$

由式(33)可知轴向载荷作用下径向应力最大值由试件轴向应变、轴向方向的应变率和应变率随时间的变化率相关. 对于恒应变率实验,  $d\dot{\varepsilon}_z/dt = 0$ , 则式(33)可化简为

$$(\sigma_r)_{\max} = (\sigma_\theta)_{\max} = \frac{3 + \nu}{32} \rho \dot{\varepsilon}_z^2 R_0^2 e^{-\varepsilon_z}. \quad (34)$$

式(34)即为横观各向同性圆柱试件在恒应变率加载作用下的最大径向和环向应力值, 最大值出现在圆柱中心线上, 且最大径向应力值与最大环向应力值相等.

### 3 Hill-蔡强度理论分析

对于轴压作用下各向异性材料试件破坏(分层、径向开裂)通常从试件表面最先发生, 因此可将圆柱试件圆周外层视为单层复合材料, 采用 Hill-蔡强度理论对其进行分析, 利用 Hill-蔡强度理论对圆柱试件圆周层材料描述为

$$\frac{\sigma_z^2}{X^2} - \frac{\sigma_z \sigma_\theta}{X^2} + \frac{\sigma_\theta^2}{Y^2} + \frac{\tau_{z\theta}^2}{S^2} = 1, \quad (35)$$

式(35)中,  $X$  为轴向材料强度,  $Y$  为环向材料强度,  $S$  为圆周面内材料的剪切破坏强度参数. 轴向载荷作用下圆柱试件表面上径向应力  $\sigma_r$  为 0, 圆周表面剪应力也为 0, 对于试件圆周表面微元层只有  $\sigma_z$  和  $\sigma_\theta$  不为 0, 试件圆周表面  $r = R_0 e^{-\varepsilon_z/2}$  处的  $(\sigma_\theta)_{\text{edge}}$  应力值可由式(28)得

$$(\sigma_\theta)_{\text{edge}} = \frac{E_\theta E_r (\nu_{z\theta} - \nu_{zr}) (1 - \sqrt{E_\theta/E_r}) \sigma_z}{(E_r - E_\theta) E_z} + \rho R_0^2 e^{-\varepsilon_z} \left( \frac{\dot{\varepsilon}_z^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varepsilon}_z}{dt} \right) \left[ \sqrt{E_\theta/E_r} \frac{E_r (3 + \nu_{\theta r})}{9E_r - E_\theta} - \frac{(E_\theta + 3E_r \nu_{\theta r})}{9E_r - E_\theta} \right]. \quad (36)$$

对于纤维复合材料, 若纤维方向与试件轴向方向一致, 则可将  $\sigma_z$  和式(36)中  $(\sigma_\theta)_{\text{edge}}$  表达式直接代入式(35) Hill-蔡强度理论表达式:

$$\frac{\sigma_z^2}{X^2} - \frac{1}{X^2} \left\{ \frac{E_\theta E_r (\nu_{z\theta} - \nu_{zr}) (1 - \sqrt{E_\theta/E_r}) \sigma_z}{(E_r - E_\theta) E_z} + \rho R_0^2 e^{-\varepsilon_z} \left( \frac{\dot{\varepsilon}_z^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varepsilon}_z}{dt} \right) \left[ \sqrt{E_\theta/E_r} \frac{E_r (3 + \nu_{\theta r})}{9E_r - E_\theta} - \frac{(E_\theta + 3E_r \nu_{\theta r})}{9E_r - E_\theta} \right] \right\} \sigma_z +$$

$$\frac{1}{Y^2} \left\{ \frac{E_\theta E_r (\nu_{z\theta} - \nu_{rz}) (1 - \sqrt{E_\theta/E_r}) \sigma_z}{(E_r - E_\theta) E_z} + \rho R_0^2 e^{-\varepsilon_z} \left( \frac{\dot{\varepsilon}_z^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varepsilon}_z}{dt} \right) \left[ \sqrt{E_\theta/E_r} \frac{E_r (3 + \nu_{\theta r})}{9E_r - E_\theta} - \frac{(E_\theta + 3E_r \nu_{\theta r})}{9E_r - E_\theta} \right] \right\}^2 = 1. \quad (37)$$

若圆柱试件为横观各向同性材料,  $E_r = E_\theta$ , 则式(37) Hill-蔡强度理论表达式可简化为

$$\frac{\sigma_z^2}{X^2} - \frac{1}{X^2} \left[ \frac{1 - \nu_{\theta r}}{4} \rho R_0^2 e^{-\varepsilon_z} \left( \frac{\dot{\varepsilon}_z^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varepsilon}_z}{dt} \right) \right] \sigma_z + \frac{1}{Y^2} \left[ \frac{1 - \nu_{\theta r}}{4} \rho R_0^2 e^{-\varepsilon_z} \left( \frac{\dot{\varepsilon}_z^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varepsilon}_z}{dt} \right) \right]^2 = 1. \quad (38)$$

从式(37)可以看出, 根据 Hill-蔡强度理论对试件圆周层材料进行分析, 正交各向异性圆柱试件在轴向载荷作用下其失效行为取决于轴压应力和材料的弹性模量、Poisson 比等基本力学参数外, 还与试件变形的应变率和应变率随时间的变化率相关. 而对于横观各向同性材料试件, 从式(38)可知试件圆周层材料失效主要取决于材料 Poisson 比、密度和应变率, 而与试件材料弹性模量无关.

上述分析是针对纤维方向与试件轴向一致情况下进行的, 对于纤维复合材料试件, 若纤维方向与试件轴向存在图 3 所示夹角情况, 则需先通过转轴公式计算轴向应力  $\sigma_z$  和环向应力  $\sigma_\theta$  在纤维铺层  $z'$  和垂直纤维  $\theta'$  方向上应力  $\sigma_{z'}, \sigma_{\theta'}$  及剪应力  $\tau_{z'\theta'}$ , 再进行 Hill-蔡强度理论分析, 对图 3 情况利用转轴公式计算  $\sigma_{z'}, \sigma_{\theta'}$  和  $\tau_{z'\theta'}$  表达式为

$$\begin{cases} \sigma_{z'} = \cos^2 \beta \sigma_z + \sin^2 \beta \sigma_\theta, \\ \sigma_{\theta'} = \sin^2 \beta \sigma_z + \cos^2 \beta \sigma_\theta, \\ \tau_{z'\theta'} = \frac{1}{2} \sin 2\beta (\sigma_\theta - \sigma_z). \end{cases} \quad (39)$$

将按式(39)计算得到的应力代入式(35)就可得到纤维与试件轴向存在夹角情况时的 Hill-蔡强度理论表达式.

### 4 讨 论

前面基于体积不可压假设对正交各向异性圆柱试件在轴向稳态压缩过程中的应力场进行了分析, 从分析结果可知最大径向应力和环向应力均出现在圆柱体中心线上, 圆周边界上径向应力为 0. 由于轴压下圆柱体由于试件中心附近变形位移受到约束, 其宏观破坏通常从圆柱边界上开始, 对于抗拉强度较低的材料试件, 通常表现为圆周位置材料首先发生拉伸破坏, 再逐渐向圆柱中心扩展, 如图 4(a). 以正交各向异性圆柱木材块沿顺纹受压产生环向拉伸破坏为例, 受木材纤维分布影响, 其径向和环向强度远低于生长方向强度, 因此沿木材生长方向截取圆柱试件, 其环向抗拉强度相对较低, 在压缩作用下将会在试件圆周边界产生拉伸破坏, 如云杉木材圆柱试件在轴压作用下产生图 4(b) 所示射线状破坏.

从上述分析可知, 在整个圆柱面上作用载荷, 试件圆周边界将产生辐射状裂纹, 而对于圆柱面局部受压作用时, 通常会在压缩位置产生凹坑, 并伴随裂纹. 例如弹丸侵入混凝土、岩石类靶体时, 由于混凝土、岩石类材料压缩强度远大于其拉伸强度, 因此通常在靶体撞击部位产生

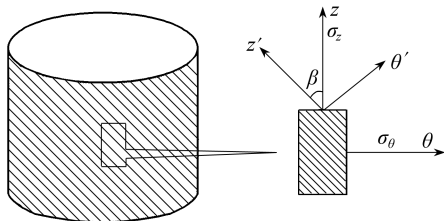
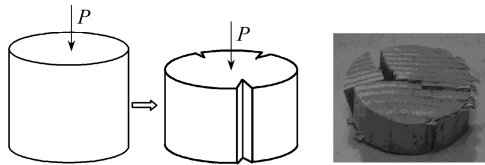


图 3 纤维方向与轴向夹角示意图



(a) 圆周拉伸破坏示意图 (b) 木材轴压破坏图  
图4 轴压下圆柱试件环向拉伸破坏图

凹坑的同时还伴随数道以凹坑为中心的射线裂纹,如图5所示。从弹靶相互作用原理可知,弹体在侵彻过程中除对靶体产生轴向冲击作用外,随着弹体的侵入还对靶体产生径向挤压作用。忽略靶体破碎区物质,可将弹体对靶产生的径向作用等效为均布压力  $q$ , 利用图6所示内压圆盘模型对靶面内的应力分布进行计算,分析裂纹形成的

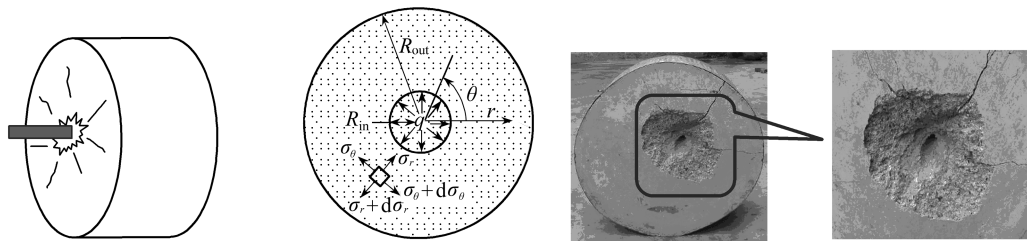


图5 弹侵彻混凝土靶示意图 图6 内压圆盘示意图 图7 混凝土靶辐射型裂纹图片

机制。图6中圆盘内半径(靶体开孔尺寸)定义为  $R_{in}$ ,  $R_{out}$  为圆盘外半径,即靶体变形后的外半径。在轴对称条件下的平衡方程可写为

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \tag{40}$$

参照圆筒受均布压力解析方法<sup>[21]</sup>,可知式(40)的应力解:

$$\sigma_r = \frac{qR_{in}^2}{R_{out}^2 - R_{in}^2} \left( 1 - \frac{R_{out}^2}{r^2} \right), \tag{41}$$

$$\sigma_\theta = \frac{qR_{in}^2}{R_{out}^2 - R_{in}^2} \left( 1 + \frac{R_{out}^2}{r^2} \right). \tag{42}$$

从式(41)和式(42)可知,径向应力  $\sigma_r$  小于0,为压应力,随着半径的增大其绝对值逐渐变小;环向应力  $\sigma_\theta$  为拉应力,随着半径增大逐渐减小,因此圆盘内边界上环向拉应力具有极大值:

$$(\sigma_\theta)_{max} = \frac{q(R_{in}^2 + R_{out}^2)}{R_{out}^2 - R_{in}^2}. \tag{43}$$

由此可知在忽略靶体破碎区域时,弹丸侵彻混凝土、岩石靶体时在其开孔圆形边界上环向拉伸应力具有式(43)最大值,由于混凝土、岩石类材料抗拉强度较低,因此在环向拉伸应力作用下,靶体开孔附近将形成以着靶点为中心的射线状裂纹,如图7所示。

## 5 结 语

本文基于材料体积不可压假设和最大拉伸应变破坏准则对轴向压缩作用下圆柱试件进行了分析,得到了试件圆周产生拉伸破坏时的临界轴向载荷。并对轴向载荷作用下试件截面内的径向和环向应力进行了计算,结果表明对于正交各向异性材料,试件环向和径向应力分布为半径的幂函数形式;对于横观各向同性材料,试件环向和径向应力分布为半径的二次函数,其应力分布表达式与文献[21]圆盘匀速转动应力分布函数相似。在圆柱试件中心线上环向和径向应力相等,且均具有最大值;试件圆周边界上径向应力为0,环向应力具有极小值。



运用 Hill-蔡强度理论对试件圆环面上失效行为进行了描述,轴向载荷作用下试件圆环面失效准则不仅取决于轴向应力大小和材料的基本力学性能,还与试件轴向变形的应变率和应变率随时间的变化率相关;木材顺纹轴压产生环向破坏和混凝土、岩石类拉压强度差异较大材料在弹丸侵彻作用下产生射线状裂纹现象主要由环向拉伸作用引起。

### 参考文献:

- [1] Cazacu O, Plunkett B, Barlat F. Orthotropic yield criterion for hexagonal closed packed metals[J]. *International Journal of Plasticity*, 2006, **22**(7): 1171-1194.
- [2] Plunkett B, Cazacu O, Barlat F. Orthotropic yield criteria for description of the anisotropy in tension and compression of sheet metals[J]. *International Journal of Plasticity*, 2008, **24**(5): 847-866.
- [3] 曾纪杰, 傅衣铭. 正交各向异性圆柱壳的弹塑性屈曲分析[J]. *工程力学*, 2006, **23**(10): 25-29.
- [4] Abd-Alla A M, Farhan A M. Effect of the non-homogeneity on the composite infinite cylinder of orthotropic material[J]. *Physics Letters A*, 2008, **372**(6): 756-760.
- [5] 田燕萍, 傅衣铭. 考虑损伤效应的正交各向异性板的弹塑性后屈曲分析[J]. *应用数学和力学*, 2008, **29**(7): 764-774.
- [6] Jeffrey E B, Ellen M A, Karl G. Finite element simulations of orthotropic hyperelasticity[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2002, **38**(10): 983-998.
- [7] Romashchenko V A, Tarasovskaya S A. Numerical studies on the dynamic behavior of multi-layer thick-walled cylinders with helical orthotropy[J]. *Strength of Materials*, 2004, **36**(6): 621-629.
- [8] Redekop D. Buckling analysis of an orthotropic thin shell of revolution using differential quadrature[J]. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2005, **82**(8): 618-624.
- [9] Grigorenko Y M, Rozhok L S. Influence of orthotropy parameters on the stress state of hollow cylinders with elliptic cross-section[J]. *International Applied Mechanics*, 2007, **43**(12): 1372-1379.
- [10] Xu H M, Yao X F, Feng X Q, et al. Fundamental solution of a power-law orthotropic and half-space functionally graded material under line loads[J]. *Composites Science and Technology*, 2008, **68**(1): 27-34.
- [11] Emery T R, Dulieu-Barton J M, Earl J S, et al. A generalised approach to the calibration of orthotropic materials for thermoelastic stress analysis[J]. *Composites Science and Technology*, 2008, **68**(3/4): 743-752.
- [12] Caponi A, Corradi L, Vena P. Limit analysis of orthotropic structures based on Hill's yield condition[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38**(22/23): 3945-3963.
- [13] Valot E, Vannucci P. Some exact solutions for fully orthotropic laminates[J]. *Composite Structures*, 2005, **69**(2): 157-166.
- [14] Ma G W, Gama B A, Gillespie J W, Jr. Plastic limit analysis of cylindrically orthotropic circular plates[J]. *Composite Structures*, 2002, **55**(4): 455-466.
- [15] Shipsha A, Berglund L A. Shear coupling effects on stress and strain distributions in wood subjected to transverse compression[J]. *Composites Science and Technology*, 2007, **67**(7/8): 1362-1369.
- [16] Mackenzie-Helnwein P, Mullner H W, Eberhardsteiner J, et al. Analysis of layered wooden

- shells using an orthotropic elasto-plastic model for multi-axial loading of clear spruce wood [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, **194**(21/24): 2661-2685.
- [17] Lyons C K. Stress functions for a heterogeneous section of a tree[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**(18): 4615-4625.
- [18] Lyons C K, Guenther R B, Pyles M R. Elastic equations for a cylindrical section of a tree[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**(18): 4773-4786.
- [19] Galicki J, Czech M. Tensile strength of softwood in LR orthotropy plane[J]. *Mechanics of Materials*, 2005, **37**(6): 677-686.
- [20] 徐卫亚, 张贵科. 节理岩体正交各向异性等效强度参数研究[J]. *岩土工程学报*, 2007, **29**(6): 806-810.
- [21] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990, 93-97.

## Stress Field of Orthotropic Cylinder Subjected to Axial Compression

ZHONG Wei-zhou<sup>1,2</sup>, SONG Shun-cheng<sup>1</sup>, CHEN Gang<sup>2</sup>,  
HUANG Xi-cheng<sup>2</sup>, HUANG Peng<sup>2</sup>

(1. *School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P. R. China;*

2. *Institute of Systems Engineering, China Academy of Engineering Physics, Mianyang, Sichuan 621900, P. R. China)*

**Abstract:** Based on the material volume constancy hypothesis, circumference and radial stresses of cylinder specimen were analyzed when the cylinder is loaded along the axial direction. Circumference and radial stress distribution is radius parameter power function when specimen material constitutive relation is orthotropic. The stress distribution is radius parameter quadratic function for transverse isotropy material. Along the cylinder axial line, circumference and radial stresses were maximum and equal to each other. In the circumference boundary surface, radial stress is zero and circumference stress value is the minimum. The max tensile circumference strain failure theory is applied to calculate critical axial loading. Circumference boundary layer failure criterion of orthotropic material cylinder is described by Hill-Tsai strength theory. The obtained strength theory is not only related to axial stress and specimen material mechanical properties, but also to specimen axial deformation strain rate and change rate of strain rate.

**Key words:** orthotropic; axial compression; axial symmetry; stress distribution; strain rate