

不同流条件下随温度变化的流体黏性和热泳微粒沉积对自由传热传质作用的 Lie 群分析*

R·坎达沙密, 穆海明

(敦胡先翁大学 科学艺术和人文学院,巴力拉惹 86400,马来西亚)

(陈立群推荐)

摘要: 研究二维稳定不可压缩流体在竖向延伸平面上的流动. 流体黏性假设为与温度相关的线性函数. 对控制方程进行伸缩群变换,由于变换参数之间的关系让方程解保持不变. 在找到3个绝对不变量后,推导对应动量方程的一个三阶一般微分方程和两个对应能量方程和扩散方程的二阶一般微分方程. 求出具有边界条件方程的数值解,发现随着平面延伸距离增加,随温度变化的流体黏性降低让流速变慢. 在平面的某个特定点处,随着黏性减少流速变慢但温度增加. 热泳微粒沉积在浓度边界层起着关键作用. 最后对计算结果进行讨论并给出图例.

关键词: Lie 群分析; 随温度变化的流体黏性; 热辐射; 热泳微粒沉积

中图分类号: O357.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.03.005

引言

Lie 群分析又叫作对称分析,由 Sophus Lie 在寻找映射到微分方程自身的点变换时提出. 该分析统一了几乎所有已知的一般微分方程和偏微分方程的精确积分技术^[1]. 在寻找给定微分方程的所有对称中,Lie 群分析是唯一严密的数学方法,不需要任何自组假设或方程的背景知识. 从物理学观点来看,边界层方程很特别,它允许大量的不变解即基本解析解. 在本文中不变解意味着可将方程简化为一般微分方程等简单方程. Prandtl 边界层方程有更多的不同对称群. 对称群或简单对称均为不变变换,不会改变方程的结构^[2].

在流体力学中,控制流体运动的偏微分方程都是非线性的,这对求解方程造成困难,这时很多学者试图获得方程的相似解. 众所周知,伸缩群变换中的不变群就是一种相似解^[3]. 本文使用了 Lie 群变换的特别形式即伸缩群寻找方程的完全对称集,然后研究其中那一个适合于给出不变群即相似解. Crane^[4]扩充了 Sakiadis^[5-6]的研究范围,他第一个研究边界层状流动,该运动由刚性表面在自身平面上的运动产生. Gupta 等^[7]研究了与吸入和射出相关的问题. 在以上研究中均假设流动区域的黏性不变,但在实际情况中,随着温度增加流体黏性减少而气体黏

* 收稿日期: 2009-09-01; 修订日期: 2009-11-23

作者简介: Ramasamy Kandasamy(联系人. Tel: +006-07-4537416; E-mail: future990@gmail.com).

本文原文为英文,海治译,张禄坤校.

性增加。于是 Abel 等^[8]研究了黏性变化的黏弹性流体流经可延伸平面时的热传递问题。

热泳指在非等温气体中悬浮的细小尺寸微粒在温度降低方向的运动具有一定速度的现象。较热部分微粒处的气体分子速度快于较冷部分的气体分子,从而气体分子的快速运动将导致与其微粒的冲撞力更大,这将导致微粒在温度降低的方向产生一定的速度。微粒获得的速度称为热泳速度,由于温度梯度而使悬浮微粒受到的力称为热泳力。热泳力和热泳速度的量不仅与温度梯度成正比,还和很多其他因素比如悬浮微粒热传导性、承载微粒的气体热传导性、热泳系数、气体热容和 Knudsen 数等有关。热泳现象导致微粒趋向于在较冷的面上沉积,例如球形煤油灯的玻璃罩、烟囱和熔炉壁面上的黑块就是热泳现象产生的,热交换器的腐蚀和燃气涡轮片上的污垢也和热泳有关。热泳原理通常用于通讯材料制造领域如渐变二氧化硅或二氧化锗光纤预制件。

在对黏性流体研究中,大量论文讨论了热泳微粒沉积的问题,这里仅对层状流的研究情况进行简单描述。Epstein 等^[9]分析了竖向平面上自由对流边界层中的热泳微粒沉积。Goren^[10]进一步对水平平面上的相同现象进行了分析。Garg 和 Jayaraj^[11]研究了在倾斜平面上的受迫对流的热泳微粒传递。Jayaraj 等^[12]考虑黏性流体经过较冷竖向平板时的层状流,研究不同参数下自然对流中的热泳现象。Selim 等^[13]考虑了平板表面上非均匀的质量变化,分析了表面质量变化对竖向加热可渗透平板上具有热泳的混合对流的影响。Wang^[14]考虑从驻点流到波浪形薄片上的微粒沉积,研究微粒惯性、扩散和热泳对沉积过程的综合影响。最近的文献^[15]给出扩散、对流、热泳传输机制的理论模型,描述连续运动波浪表面上的微粒沉积。Chamka 和 Pop^[16]考虑了自由对流边界层在嵌在多孔介质中的竖向平板上的热泳微粒沉积,还分析了稳定自由对流在嵌在流体饱和多空介质中的竖向等温圆柱体上的热泳微粒沉积^[17]。另外 Nield 和 Bejan^[18],Ingham 和 Pop^[19-20]对多孔介质的对流进行了开创性研究。Chen 和 Chan^[21]研究了热泳和电泳对波浪形圆盘表面上沉积微粒的作用。Wang^[22]研究了惯性和热泳对波浪形薄片上沉积微粒的作用。

Newton 黏性定律指出剪切应力与速度梯度成正比。满足 Newton 黏性定律的流体称作 Newton 流体,包括水、苯、乙醇、己烷和大多数简单分子溶液,但大量其他类型的流体不满足该定律。当浓度梯度、温度梯度高时,随温度变化的流体黏性和热泳微粒沉积显得更加重要。惯性、扩散、热辐射、吸入或射出等因素也影响多孔介质中的对流传输,这些因素的综合对传热传质率肯定也起着重要作用。以上研究均假设流体的黏性不变,但实际上流体的物理属性会随着温度发生较大改变,例如润滑液体中由内摩擦力产生的热和由此产生的温度上升会影响流体的黏度使得黏性不再是常数。温度上升导致动量边界层截面的流体黏性降低,从而导致局部传输的增加,也影响到壁面处的传热率。为了精确预测流动过程,必须考虑不可压缩流体的黏性变化。和黏性不变的假设相比,Gary 等^[23]、Mehta 和 Sood^[24]证明了考虑黏性变化时流体属性会发生实质变化。Mukhopadhyay 等^[25]研究了在加热延伸平面上黏性变化的 MHD 边界层流,Mukhopadhyay 和 Layek^[26]研究了热辐射和黏性变化对在多孔延伸表面上自由对流和传热的影响。

本文研究不同流条件下,具有热泳微粒沉积的磁流体经过竖向延伸平面时流动的伸缩群变换。通过减少独立变量数目,将控制流动的耦合非线性偏微分方程简化为耦合一般微分方程。由于变换参数之间的关系使系统保持不变,通过寻找 3 个绝对不变量推导出对应动量方程的三阶一般微分方程、对应能量方程和扩散方程的二阶一般微分方程,然后通过打靶法和 Runge-Kutta Gill 方法求出方程的解,分析热泳、随温度变化的流体黏性和热辐射对流动过程

的影响.

1 公式的建立

考虑存在热辐射时,一 Newton 黏性不可压缩流体从竖向延伸平面坐标原点 ($x = 0, y = 0$) (见图 1) 处涌现,流体以不均匀的速度 $U(x)$ 在平面上流动,研究流体在平面上的自由对流、边界层流和传热传质. 流体满足以下条件: 流动过程无化学反应,为了解平面上沉积质量的变化考虑热泳的作用,由于流体有限导电不考虑黏性耗散和 Joule 热,在动量方程 (Boussinesq 近似式) 中考虑微粒密度变化和浮力作用,流体远离壁面处的样本浓度 C_∞ 极小,能量方程的黏性耗散项忽略不计 (由于流体速度很低). 则满足以上条件的流动控制方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g\beta(T - T_\infty) + g\beta^*(C - C_\infty), \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\kappa}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial q_r}{\partial y}, \quad (3)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{\partial (V_T C)}{\partial y}, \quad (4)$$

$$\begin{cases} \text{当 } y = 0 \text{ 时, } u = U(x), v = -V(x), C = C_w, T = T_w, \\ \text{当 } y \rightarrow \infty \text{ 时, } u = 0, C = C_\infty, T = T_\infty, \end{cases} \quad (5)$$

其中 u 和 v 分别为 x 和 y 方向上的速度分量, μ 为流体黏性参数, ρ 为流体密度, T 为流体温度, κ 为流体导热系数, D 为扩散系数, β 为热扩展容积系数, β^* 浓度扩展容积系数, g 为重力常数, T_∞ 为无限远处的温度, $U(x)$ 为流向速度, $V_T (= -k(v/T)(\partial T/\partial y))$ 为热泳速度, k 为热泳系数, $V(x)$ 为流体吸入/射出速度, T_w 为壁面温度. 根据 Rosseland 近似式 (参见文献[27]) 有:

$$q_r = -\frac{4\sigma_1}{3k^*} \frac{\partial T^4}{\partial y},$$

其中 σ_1 为 Stefan-Boltzman 常量, k^* 为吸收系数.

假设流体中的温度差 T^4 可表示为 Taylor 级数, 将 T^4 关于 T_∞ 展开并忽略高阶项可得: $T^4 \approx 4T_\infty^3 T - 3T_\infty^4$. 从而方程(3)变为

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\kappa}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{16\sigma_1 T_\infty^3}{3\rho c_p k^*} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (6)$$

引入 u, v, θ 和 ϕ 的关系式:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \phi = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty}. \quad (7)$$

流向速度和吸入/射出速度为

$$U(x) = cx^m, V(x) = V_0 x^{(m-1)/2}, \quad (8)$$

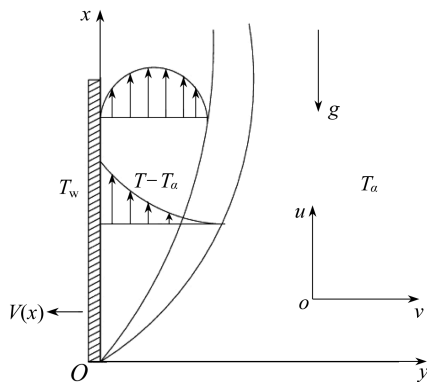


图 1 竖向延伸表面上边界层流的物理模型

这里 $c > 0$ 为常量, T_w 为壁面温度, 幂指数 m 为常量. 本文取 $c = 1$. 随温度变化的流体黏性由 Batchelor^[28] 给出:

$$\mu = \mu^* [a + b(T_w - T)],$$

其中 μ^* 为常量, 表示离平面较远处的黏度系数. a, b 为常量且 $b > 0$. 对于黏性流体 Ling 和 Dybbs^[29] 提出黏性与温度的关系为 $\mu = \mu_\infty / [1 + \gamma(T - T_\infty)]$, 其中 c 为流体的热属性, μ_∞ 为远离热平面处的流体黏性. 该关系式和本文的公式完全一致, 温度范围即 $(T_w - T_\infty)^\circ\text{C}$ 取 $(0 \sim 23)^\circ\text{C}$. 将式(7)代入方程(2) ~ (4)得

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta v^* \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + v^* [a + \zeta(1 - \theta)] \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + g \frac{\zeta}{b} (\beta \theta + \beta^* \phi), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \left(\frac{\kappa}{\rho c_p} + \frac{16\sigma_1 T_\infty^3}{3\rho c_p k^*} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \tau \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \phi \right), \quad (11)$$

其中

$$\zeta = b(T_w - T_\infty), \quad v^* = \frac{\mu^*}{\rho}, \quad \tau = -\frac{k(T_w - T_\infty)}{T_r}.$$

Mukhopadhyay 和 Layek^[26] 给出的边界条件为

$$\begin{cases} \text{当 } y = 0 \text{ 时, } \frac{\partial \psi}{\partial y} = x^m, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -V_0 x^{(m-1)/2}, \quad \theta = \phi = 1, \\ \text{当 } y \rightarrow \infty \text{ 时, } \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0, \quad \phi \rightarrow 0. \end{cases} \quad (12)$$

Lie 群变换的简化形式即缩放群变换由 Mukhopadhyay 等^[25] 给出:

$$\begin{cases} \Gamma: x^* = x e^{\varepsilon \alpha_1}, \quad y^* = y e^{\varepsilon \alpha_2}, \quad \psi^* = \psi e^{\varepsilon \alpha_3}, \quad u^* = u e^{\varepsilon \alpha_4}, \\ v^* = v e^{\varepsilon \alpha_5}, \quad \theta^* = \theta e^{\varepsilon \alpha_6}, \quad \phi^* = \phi e^{\varepsilon \alpha_7}. \end{cases} \quad (13)$$

方程(13)可看作点变换公式, 该式能将坐标 $(x, y, \psi, u, v, \theta, \phi)$ 转换为坐标 $(x^*, y^*, \psi^*, u^*, v^*, \theta^*, \phi^*)$. 将(13)式代入方程(9) ~ (11)可得

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon(\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3)} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} \right) = \\ -\zeta v^* e^{\varepsilon(3\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_6)} \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} \right) + v^* [a + \zeta] e^{\varepsilon(3\alpha_2 - \alpha_3)} \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial y^{*3}} - \\ \zeta v^* e^{\varepsilon(3\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_6)} \theta^* \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial y^{*3}} + g \frac{\zeta}{b} (\beta e^{-\varepsilon \alpha_6} \theta^* + \beta^* e^{-\varepsilon \alpha_7} \phi^*), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_6)} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right) = \\ \left(\frac{\kappa}{\rho c_p} + \frac{16\sigma_1 T_\infty^3}{3\rho c_p k^*} \right) e^{\varepsilon(3\alpha_2 - \alpha_6)} \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_7)} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial y^*} \right) = \\ D e^{\varepsilon(2\alpha_2 - \alpha_7)} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial y^{*2}} - \tau e^{\varepsilon(2\alpha_2 - \alpha_6 - \alpha_7)} \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial y^*} - \tau e^{\varepsilon(2\alpha_2 - \alpha_6 - \alpha_7)} \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}} \phi^*. \end{aligned} \quad (16)$$

由于在群变换 Γ 下方程保持不变, 可推导出以下参数关系:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 3\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_6 = 3\alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_6 = -\alpha_6 = -\alpha_7;$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_6 = 2\alpha_2 - \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_7 = 2\alpha_2 - \alpha_7 = 2\alpha_2 - \alpha_6 - \alpha_7,$$

从 $3\alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_3$ 可推导出 $\alpha_2 = 0$.

从 $\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 3\alpha_2 - \alpha_3$ 可推导出

$$\alpha_6 = \alpha_7 = 0, \alpha_2 = \alpha_1/4 = \alpha_3/3.$$

从边界条件可推导出

当 $m = 1/2$ 时,

$$\alpha_4 = m\alpha_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \alpha_5 = \frac{m-1}{2}\alpha_1 = -\frac{1}{4}\alpha_1.$$

边界条件可变为

$$\begin{cases} \text{当 } y^* = 0 \text{ 时, } \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} = x^{*1/2}, \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = -V_0 x^{*(-1/4)}, \theta^* = \phi^* = 1, \\ \text{当 } y^* \rightarrow \infty \text{ 时, } \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \rightarrow 0, \theta^* \rightarrow 0, \phi^* \rightarrow 0. \end{cases} \quad (17)$$

变换 Γ 简化为

$$\begin{aligned} x^* &= xe^{\varepsilon\alpha_1}, y^* = ye^{\varepsilon\alpha_1/4}, \psi^* = \psi e^{\varepsilon 3\alpha_1/4}, u^* = ue^{\varepsilon\alpha_1/2}, \\ v^* &= ve^{-\varepsilon\alpha_1/4}, \theta^* = \theta, \phi^* = \phi. \end{aligned}$$

将上式用 Taylor 法展开为 ε, t 幂的形式:

$$x^* - x = x\varepsilon\alpha_1, y^* - y = y\varepsilon\frac{\alpha_1}{4}, \psi^* - \psi = \psi\varepsilon\frac{3\alpha_1}{4},$$

$$u^* - u = u\varepsilon\frac{\alpha_1}{2}, v^* - v = -v\varepsilon\frac{\alpha_1}{4}, \theta^* - \theta = \phi^* - \phi = 0.$$

特征方程为

$$\frac{dx}{x\alpha_1} = \frac{dy}{y\alpha_1/4} = \frac{d\psi}{\psi 3\alpha_1/4} = \frac{du}{u\alpha_1/2} = \frac{dv}{-v\alpha_1/4} = \frac{d\theta}{0} = \frac{d\phi}{0},$$

求解以上方程并注意到

$$y^* x^{*-1/4} = \eta, \psi^* = x^{*3/4} F(\eta), \theta^* = \theta(\eta), \phi^* = \phi(\eta). \quad (18)$$

根据以上关系式方程 (14) 至 (16) 变为

$$2F'^2 - 3FF'' = -4\zeta v^* \vartheta' F'' + 4(a + \zeta)v^* F''' - 4\zeta v^* \theta F''' + 4g \frac{\zeta}{b} (\beta\theta + \beta^* \phi), \quad (19)$$

$$4\left(\frac{\kappa}{\rho c_p} + \frac{16\sigma_1 T_\infty^3}{3\rho c_p k^*}\right)\theta'' + 3F\theta' = 0, \quad (20)$$

$$4D\phi'' + 3\left(F - \frac{4}{3}\tau\theta'\right)\phi' - 4\tau\theta''\phi = 0. \quad (21)$$

边界条件采用以下形式:

$$\begin{cases} \text{当 } \eta = 0 \text{ 时, } F' = 1, F = -\frac{4V_0}{3}, \theta = \phi = 1, \\ \text{当 } \eta \rightarrow \infty \text{ 时, } F' \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0. \end{cases} \quad (22)$$

在方程 (19) 至 (21) 中引入变换

$$\begin{cases} \eta = \left(\frac{g\beta}{b}\right)^{\alpha_1} v^{*b_1} \eta^*, F = \left(\frac{g\beta}{b}\right)^{\alpha_1} v^{*b_1} F^*, \\ \theta = \left(\frac{g\beta}{b}\right)^{\alpha_1} v^{*b_1} \theta^*, \phi = \left(\frac{g\beta}{b}\right)^{\alpha_1} v^{*b_1} \phi^*, \end{cases} \quad (23)$$

取 $F^* = f, \bar{\theta} = \theta, \bar{\phi} = \phi$, 方程(19)至(21)最终变为

$$4(a + \zeta)F''' - 4\zeta\theta F''' - 4\zeta\theta' F'' - 2F'^2 + 3FF'' + 4\zeta(\theta + \phi) = 0, \quad (24)$$

$$\frac{4}{Pr}\left(1 + \frac{4}{3N}\right)\theta'' + 3F\theta' = 0, \quad (25)$$

$$\frac{4}{Sc}\phi'' + 3\left(F - \frac{4}{3}\tau\theta'\right)\phi' - 4\tau\theta''\phi = 0, \quad (26)$$

其中, $Pr = v^* \rho c_p / \kappa = \mu^* c_p / \kappa$ 为 Prandtl 数, $N = \kappa \kappa^* / (4\sigma_1 T_\infty^3)$ 为辐射系数, $\tau = -k(T_w - T_\infty) / T_\infty$ 为热泳系数, $Sc = v^* / D$ 为 Schmidt 数.

边界条件取以下形式

$$\begin{cases} \eta^* = 0, f' = 1, f = S, \theta = \phi = 1, \\ \eta^* \rightarrow \infty, f' \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0, \end{cases} \quad (27)$$

其中, $S = -(4V_0/3)(g\beta_1/b)^{-1/4} v^{-1/2}$, $S > 0$ 表示吸入, $S < 0$ 表示射出.

2 数值解

非线性一般微分方程(24)至(26)以(27)式为边界条件,可通过打靶法和以 ζ, τ 和 N 为参数的 Runge-Kutta Gill 算法(参见文献[30])求解,本文采用 Matlab 软件计算出方程的数值解.在多数情况下,为满足误差小于 10^{-7} 的收敛要求,选取迭代增值 $\Delta\eta = 0.001$,在每次迭代中 $\eta_\infty = \eta_\infty + \Delta\eta$.对每一组参数 ζ, τ 和 $N, \eta = 0$ 时,在误差小于 10^{-7} 的迭代中,边界条件的值不变时 η_∞ 的值取最大.下文给出在吸入/射出时,不同热泳微粒沉积、热辐射和随温度变化的流体黏性条件下的传热传质并对结果进行讨论.

3 结果和讨论

为了分析结果,使用上文给出的方法对不同参数情况进行数值求解,这些参数有:随着温度变化的流体黏性 ζ ,吸入/射出参数 S , Prandtl 数 Pr ,热泳参数 τ , Schmidt 数 Sc 和热辐射参数 N 等.图 2 至图 6 给出了计算结果(所有情况中 $a = 1.0$).

表 1 本文结果与文献结果的比较

N	文献[31]结果		本文结果	
	$f''(0)$	$\theta'(0)$	$f''(0)$	$\theta'(0)$
0.0	0.505 0	0.546 9	0.504 874	0.546 651
0.5	0.599 4	0.310 7	0.599 663	0.310 587
1.0	0.642 3	0.246 6	0.642 271	0.246 579
2.0	0.688 6	0.190 0	0.688 591	0.189 882
3.0	0.715 0	0.161 5	0.714 878	0.161 489

注 $\zeta = 0.8, Pr = 1.0$.

在无散布方程的情况下,为了验证本文算法是否正确,将本文得到的结果与 Hossain 等^[31]给出的稳态流的结果进行比较(见表 1),对比 N 取不同的值时的表面摩擦 $f''(0)$ 和热传递率

$\theta'(0)$, 发现两者吻合得很好。

在无散布方程的情况下,为了验证数值解是否正确,将本文的结果与文献中的结果进行比较。图 2a 给出本文不同 Prandtl 数的流体温度,图 2b 给出了 Mukhopadhyay 和 Layek^[26]的结果并进行对比,发现两者吻合得很好。对于给定的 N 随着 Prandtl 数增加而流体温度降低,这是由于热边界层厚度变薄造成的。通过比较图 2a 和图 2b 中 $Pr = 0.3$ 和 $Pr = 1.0$ 时的曲线可以发现这个事实。该特性表明较小 Prandtl 数的流体对热辐射的反应要比较大 Prandtl 数的敏感。

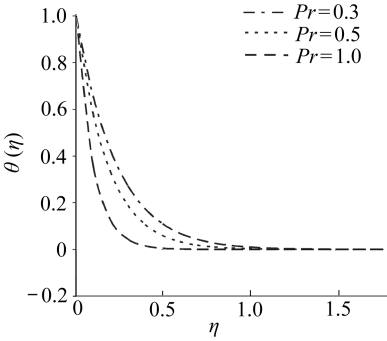


图 2a 本文中不同 Prandtl 数的流体温度

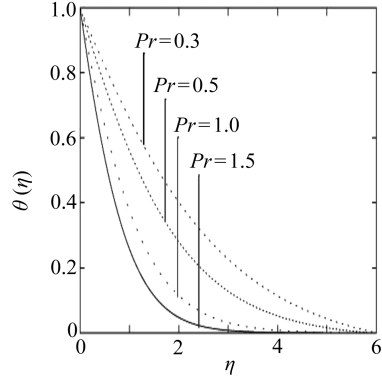
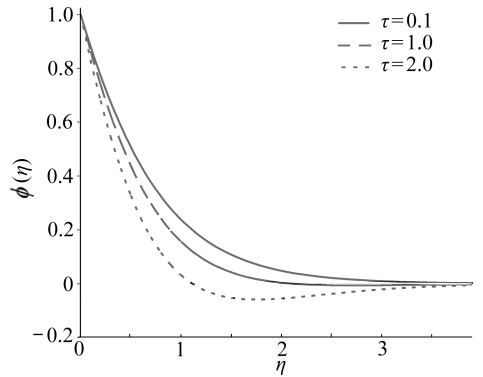


图 2b Mukhopadhyay 和 Layek^[26] 给出的不同 Prandtl 数的流体温度

图 3 给出不同热泳系数下的浓度,在流体黏性不变时,可以看到随着热泳系数的增加,流体浓度减少的同时流速和温度变化不明显。特别地,随着热泳系数 τ 增加对浓度曲线影响很小,坡度仅轻微增加,但却影响到流体浓度降低,这仅在 Schmidt 数较小时成立,这时和对流效应相比 Brown 扩散效应更明显。当 Schmidt 数较大时,和对流效应相比 Brown 扩散效应较小,热泳系数 τ 将显著地改变浓度边界层。特别地,仅当热泳微粒沉积强度大于依赖温度的流体黏性时,流体浓度逐渐降低。有趣的是在 $\tau = 2.0$ 时,对较大微粒沉积浓度曲线出现较大的偏移。当 $\tau = 2.0, \xi = 0.5$ 时外部边界区域的浓度值为负。所有这些都是由于壁面处热泳微粒沉积和依赖温度的黏性的作用造成的。

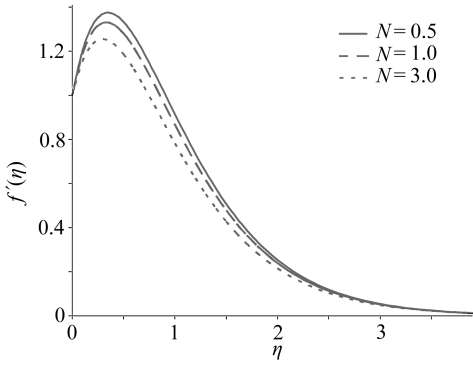


$Sc = 0.67, N = 0.1, a = 1.0,$
 $S = 0.5, Pr = 0.71, \zeta = 0.5$

图 3 不同热泳系数的流体浓度

图 4a 和图 4b 分别给出边界层中热辐射系数 N 对流速和温度的影响。在热泳微粒沉积均匀的条件下,可以看到随着热辐射系数的增加,流速降低温度减少的同时流体浓度变化不明显。该现象可解释为在给定 k^* 和 T_∞ 的情况下,随着 $N(\kappa k^*/(4\sigma_1 T_\infty^3))$ 减少, Rosseland 辐射吸收性 κ 减少。由方程(2)和(3)可知:当 κ 增加,辐射热变化 $\partial q_r/\partial y$ 的散度增加,这使得传递到流体的热辐射率增加,因而流速降低且温度减少。流动区域中辐射效应在 $N \rightarrow 0 (N \neq 0)$ 时变得更明显,在 $N \rightarrow \infty$ 时可以忽略。辐射系数 N 能明显地影响流速和温度,辐射系数 N 增加表明从流动区域释放的热量增加,当流体动量和热边界层厚度变薄时流体速度和温度均降低。

图 5a 给出不同流体黏性 ζ 的速度。在吸入均匀的条件下,除了十分靠近或远离壁面处(η



$Sc = 0.67, a = 1.0, S = 0.5, Pr = 0.71, \zeta = 0.5, \tau = 1.0$

图 4a 不同热辐射系数的流速

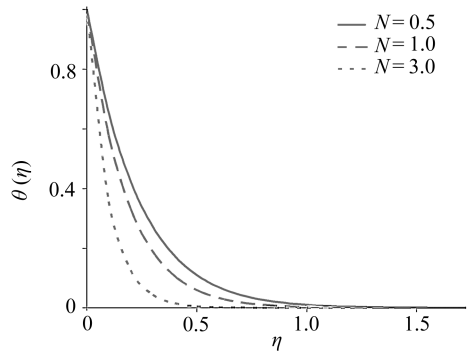
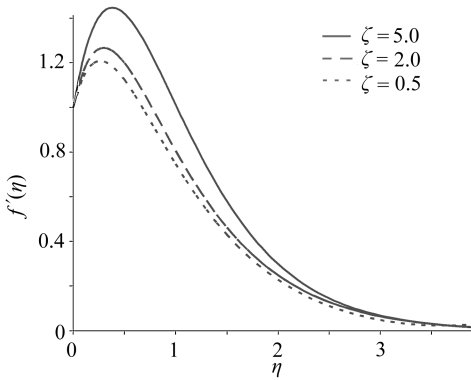
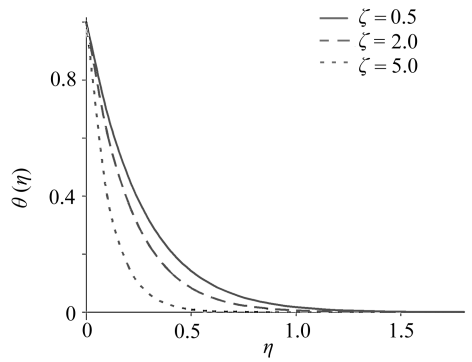


图 4b 不同热辐射系数的温度



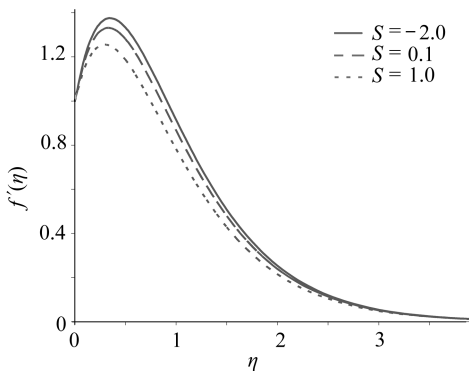
$S = 1.0, a = 1.0, Sc = 0.67,$
 $Pr = 0.71, N = 0.1, \tau = 1.0$

图 5a 不同流体黏性的速度



$S = 0.5, a = 1.0, Sc = 0.67,$
 $Pr = 0.71, N = 0.1, \tau = 1.0$

图 5b 不同流体黏性的温度



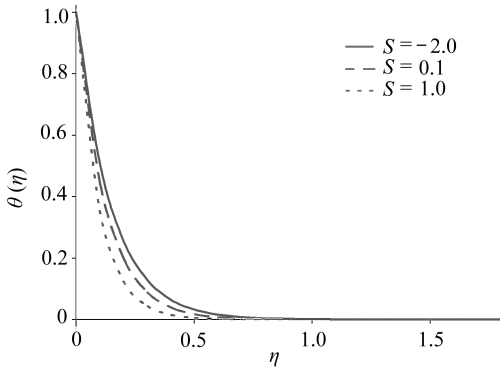
$a = 1.0, Sc = 0.67, Pr = 0.71,$
 $N = 0.1, \tau = 1.0, \zeta = 0.5$

图 6a 吸入或射出对流速的作用

= 5), 对特定的 η 值随着参数 ζ 增加流速变大, 而在十分靠近或远离壁面处, 随着参数 ζ 的增加流速变慢 (随着 η 值的增加), 这是因为随着参数 ζ 的增加, 流体黏性降低了边界层的厚度。

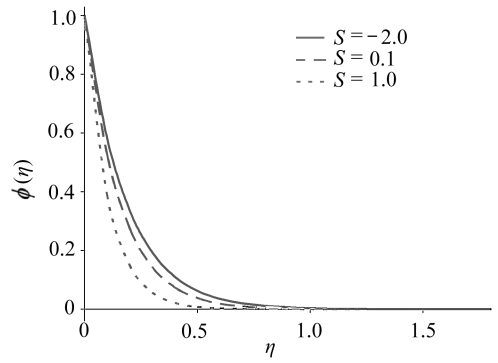
图 5b 给出在吸入条件 ($S = 0.5$) 下, 不同参数 ζ ($Pr = 0.71, N = 0.1$) 温度场 $\theta(\eta)$ 的变化。从图中可以明显看出: 尽管流体浓度没有随着 ζ 增大有明显改变, 流体的温度还是降低了。依赖温度的流体黏性参数 ζ 增加让热边界层厚度变薄导致温度 $\theta(\eta)$ 降低, 而 $\theta(\eta)$ 降低意味着流体中微粒运动变慢。这时流体中微粒受到两种相反的作用: 一种是由于流体黏性降低 (ζ 增加) 让流速变快; 一种是由于温度 $\theta(\eta)$ (因为随着 ζ 增加 θ 减少)

降低让流速变慢。在表面附近, 温度 θ 较高使得前一种作用占主要地位; 离表面较远处, 温度 θ 较低使得后一种作用占主要地位。从图 5b 中可以很明显的看出在远离平面的地方 ($\eta = 1.5$) 温度变为 0。



$$a = 1.0, Sc = 0.67, Pr = 0.71, \\ N = 0.1, \tau = 1.0, \zeta = 0.5$$

图 6b 吸入或射出对温度的作用



$$a = 1.0, Sc = 0.67, Pr = 0.71, \\ N = 0.1, \tau = 1.0, \zeta = 0.5$$

图 6c 吸入或射出对浓度的作用

图 6a 至图 6c 给出当流体黏性不变时 ($\zeta = 0.5$), 吸入/射出参数 S 对边界层中的流速、温度和浓度的影响。随着吸入参数增加 ($S < 0$), 流速变慢 (见图 6a) 即吸入导致边界层区域的流速变慢, 该现象的物理解释是: 在吸入的情况中, 加热后的流体被推向壁面, 而由于黏性的影响, 壁面处的浮力阻挡了流体, 这让壁面剪应力降低。图 6b 和图 6c 表明边界层中的温度 $\theta(\eta)$ 和浓度 $\phi(\eta)$ 也随着吸入参数 S 的增加 ($S > 0$) 而减少 (流体黏性不变, 即 $\zeta = 0.5, Pr = 0.71, N = 0.1$), 该现象的物理解释是: 在吸入的情况中, 流体被推到表面附近, 热边界层和浓度边界层的厚度减少, 壁面吸气不仅使得速度边界层变薄, 而且还使得热边界层和溶质边界层的厚度变薄, 即热边界层和溶质边界层被稀释了。从图 6a 至图 6c 可以明显看到, 壁面流体喷射时的情况恰好相反。

4 结 论

本文考虑稳定层状边界流经过嵌在多孔介质中的竖向平板时, 随温度变化的黏性和热泳-热辐射对传热传质作用的数值分析。分析结果表明在流体远离壁面的过程中, 依赖温度变化的流体黏性起着重要作用。在热辐射下随着温度变化的黏性和热泳微粒沉积对流动场有实质作用并影响了从平面到流体的传热传质。值得注意的是, 随着经济发展, 城市污染、酸雨和局部的空气污染问题日益严重, 随着温度变化的流体黏性和热泳微粒沉积在其中扮演了重要的角色。这在熔体纺丝过程中也有体现, 熔体从模具中挤出的同时被拉长成细丝或者薄片, 然后通过与水接触快速淬火或在冷却滚筒上逐渐冷却让其凝固。热泳在微粒沉积机制中占主要地位, 在光纤制造业中, 热泳对化学蒸汽沉积过程中的传质也起到重要作用。

参考文献:

- [1] Oberlack M. Similarity in non-rotating and rotating turbulent pipe flows[J]. *J Fluid Mechanics*, 1999, **379**(1): 1-22.
- [2] Bluman G W, Kumei S. *Symmetries and Differential Equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [3] Pakdemirli M, Yurusoy M. Similarity transformations for partial differential equations[J]. *SI-AM Rev*, 1998, **40**(1): 96-101.
- [4] Crane L J. Flow past a stretching plate[J]. *Z Angew Math Phys*, 1970, **21**(4): 645-647.

- [5] Sakiadis B C. Boundary-layer behavior on continuous solid surface— I :the boundary-layer equations for two-dimensional and asymmetric flow[J]. *AIChE J*, 1961, **7**(2): 26-28.
- [6] Sakiadis B C. Boundary-layer behavior on continuous solid surface— II :the boundary-layer on a continuous flat surface[J]. *AIChE J*, 1961, **7**(2): 221-225.
- [7] Gupta P S, Gupta A S. Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction and blowing [J]. *Can J Chem Eng*, 1977, **55**(6): 744-746.
- [8] Abel M S, Khan S K, Prasad K V. Study of visco-elastic fluid flow and heat transfer over a stretching sheet with variable viscosity[J]. *Int J Non-Linear Mech*, 2002, **37**(1): 81-88.
- [9] Epstein M, Hauser G M, Henry R E. Thermophoretic deposition of particles in natural convection flow from vertical plate[J]. *ASME J Heat Trans*, 1985, **107**(2): 272-276.
- [10] Goren S L. Thermophoresis of aerosol particles in laminar boundary layer on a flat plate[J]. *J Colloid Interface Sci*, 1977, **61**(1): 77-85.
- [11] Garg V K, Jayaraj S. Thermophoresis of aerosol particles in laminar flow over inclined plates [J]. *Int J Heat Mass Transf*, 1988, **31**(4): 875-890.
- [12] Jayaraj S, Dinesh K K, Pillai K L. Thermophoresis in natural convection with variable properties[J]. *Int J Heat Mass Transf*, 1999, **34**(3): 469-475.
- [13] Selim A, Hossain M A, Rees D A S. The effect of surface mass transfer on mixed convection flow past a heated vertical flat permeable plate with thermophoresis[J]. *International Journal of Thermal Science*, 2003, **42**(6): 973-981.
- [14] Wang C C. Combined effects of inertia and thermophoresis on particle deposition onto a wafer with wavy surface[J]. *Int J Heat Mass Transf*, 2006, **49**(8): 1395-1402.
- [15] Wang C C, Chen C K. Thermophoresis deposition of particles from a boundary layer flow onto a continuously moving wavy surface[J]. *Acta Mech*, 2006, **181**(1): 139-151.
- [16] Chamka A, Pop I. Effect of thermophoresis particle deposition in free convection boundary layer from a vertical flat plate embedded in a porous medium [J]. *Int Comm Heat Mass Trans*, 2004, **31**(3): 421-430.
- [17] Chamka A, Jaradat M, Pop I. Thermophoresis free convection from a vertical cylinder embedded in a porous medium[J]. *Int J Appl Mech Eng*, 2004, **9**(4): 471-481.
- [18] Nield D A, Bejan A. *Convection in Porous Media* [M]. 2nd ed. New York: Springer, 1999.
- [19] Ingham D, Pop I. *Transport Phenomena in Porous Media I* [M]. Pergamon: Oxford, 1998.
- [20] Ingham D, Pop I. *Transport Phenomena in Porous Media II* [M]. Pergamon: Oxford, 2002.
- [21] CHEN Chieh-li, CHAN Kun-chieh. Combined effects of thermophoresis and electrophoresis on particle deposition onto a wavy surface disk[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 2008, **51**(7): 2657-2664.
- [22] WANG Chi-chang. Combined effects of inertia and thermophoresis on particle deposition onto a wafer with wavy surface[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 2008, **51**(7): 1395-1402.
- [23] Gary J, Kassoy D R, Tadjeran H, et al. The effects of significant viscosity variation on convective heat transport in water saturated porous medium[J]. *J Fluid Mech*, 1982, **117**(2): 233-241.
- [24] Mehta K N. Sood S. Transient free convection flow with temperature-dependent viscosity in a fluid saturated porous medium[J]. *Int J Engg Sci*, 1992, **30**(5): 1083-1087.
- [25] Mukhopadhyay S, Layek G C, Samad S A. Study of MHD boundary layer flow over a heated stretching sheet with variable viscosity[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 2005, **48**(7): 4460-4466.

- [26] Mukhopadhyay S, Layek G C. Effects of thermal radiation and variable fluid viscosity on free convective flow and heat transfer past a porous stretching surface [J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 2008, **51**(6): 2167-2178.
- [27] Brewster M Q. *Thermal Radiative Transfer Properties* [M]. New York: John Wiley and Sons, 1992.
- [28] Batchelor G K. *An Introduction to Fluid Dynamics* [M]. London: Cambridge University Press, 1987.
- [29] Ling J X, Dybbs A. Forced convection over a flat plate submersed in a porous medium: variable viscosity case [R]. Paper 87-WA/HT-23, American Society of Mechanical Engineers, N Y, 1987.
- [30] Gill S. A process for the step-by-step integration of differential equations in an automatic digital computing machine [J]. *Proceedings of the Cambridge Phil Society*, 1951, **47**(1): 96-108.
- [31] Hossain M A, Khanafer K, Vafai K. The effect of radiation on free convection flow of fluid with variable viscosity from a porous vertical plate [J]. *Int J Thermal Sci*, 2001, **40**(2): 115-124.

Lie Group Analysis for the Effect of Temperature-Dependent Fluid Viscosity and Thermophoresis Particle Deposition on Free Convective Heat and Mass Transfer in the Presence of Variable Stream Conditions

Ramasamy Kandasamy, Muhaimin

(Faculty of Science, Arts and Heritage, Universiti Tun Hussein Onn Malaysia, Malaysia)

Abstract: A steady two-dimensional flow of incompressible fluid over a vertical stretching sheet was studied. The fluid viscosity was assumed to vary as a linear function of temperature. A scaling group of transformations was applied to the governing equations. The system remained invariant due to some relations among the parameters of the transformations. After finding three absolute invariants, a third-order ordinary differential equation corresponding to the momentum equation and two second-order ordinary differential equations corresponding to energy and diffusion equations were derived. The equations along with the boundary conditions were solved numerically. It is found that the decrease in the temperature-dependent fluid viscosity makes the velocity decrease with the increasing distance of the stretching sheet. At a particular point of the sheet, the fluid velocity decreases with the decreasing viscosity while the temperature increases in this case. The impact of thermophoresis particle deposition plays an important role on the concentration boundary layer. The results thus obtained are presented graphically and discussed.

Key words: Lie group analysis; temperature-dependent fluid viscosity; thermal radiation; thermophoresis particle deposition