文章编号:1000-0887(2010)03-0351-09

带有参数的某四阶边值问题解的存在性*

杨 阳[1,2], 张吉慧[1]

(1. 南京师范大学 数学科学学院 数学系,南京 210097;
2. 江南大学 理学院,江苏 无锡 214122)

(陈立群推荐)

摘要: 延续 Yang 和 Zhang[Nonlinear Anal, 2008, **69**: 1364-1375]的工作,研究了带有参数的某四阶边值问题非平凡解的存在性. 对于此边值问题的非线性项,不改变其在无穷远处的条件,只是改变了在零点处的条件,综合利用临界点理论,收缩性质及流不变集理论,得到了正解、负解及变号解的存在性.

关 键 词: 边值问题; 临界点; 不变集; 收缩性质

中图分类号: O29 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.03.010

引 言

考虑半线性四阶方程

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = \lambda f(t, u(t)), & 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性,其中 $f: [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是连续的, $\lambda \in \mathbf{R}^+$ 是一个参数.

由于高阶微分方程在物理学中的重要应用,许多作者都研究了此类问题的解的情况. 通过锥拉伸锥压缩不动点定理[1-6]、上下解方法[7-9]、临界点定理[10-14]及 Morse 理论[15-17]得到了解的存在性结果. 特别地,在文献[14]及[18]中,作者考虑了多个正解、负解及变号解的存在性. 受其思想及文献[19]的启发,本文继续[16]中的工作. 边值问题的非线性项在无穷远处的条件不变,只是改变了在零点处的条件,通过结合临界点理论、收缩性质及不变集理论得到了边值问题(1)正解、负解及变号解的存在性. 现在我们给出存在性结果并作出以下假设:

(f_1) $f(t, u)$ 关于 u 是局部 Lipschitz 连续的;

(f_2) $f(t, 0) = 0$; $f(t, u)u \geqslant 0$, $\forall t \in [0,1]$;

(f_3) 存在 $a > 0$ 使得 $\limsup_{|u| \to \infty} F(t, u)/u^2 < a$, 关于 $t \in [0,1]$ 一致,其中

* **收稿日期:** 2009-04-07; **修订日期:** 2009-01-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871096); 教育部科学技术研究重点资助项目(205056); 江苏省研究生创新工程资助项目(CX09B-284Z)

作者简介: 杨阳(1980—),女,江苏常州人,讲师,博士(Tel: +86-510-85328565, E-mail: yynjnu@126.com);
张吉慧(1958—),男,甘肃人,教授,博士,博士生导师(联系人. Tel: +86-25-86272816; E-mail: zhangjihui@njnu.edu.cn).

$$F(t,u)=\int_0^u f(t,s)\,\mathrm{d}s;$$

(f_4) 存在 $a>0$ 使得 $\lim_{|u|\to\infty}F(t,u)/u^2=a$,关于 $t\in[0,1]$ 一致;

(f_5) $\limsup_{|u|\to\infty}(F(t,u)-au^2)=-\infty$,关于 $t\in[0,1]$ 一致;

(f_6) $\lim_{|u|\to\infty}(f(t,u)u-2F(t,u))=+\infty$,关于 $t\in[0,1]$ 一致;

(f_7) 存在 $b>0$ 使得 $\limsup_{|u|\to 0}F(t,u)/u^2>b$,关于 $t\in[0,1]$ 一致;

(f_8) 存在 $b>0$ 使得 $\limsup_{|u|\to 0}F(t,u)/u^2=b$,关于 $t\in[0,1]$ 一致.

我们有以下结果:

定理1 令 f 满足 (f_1)、(f_2)、(f_3)及(f_7),则对于任何 $\lambda\in[\pi^4/(2b),\pi^4/(2a))$,边值问题(1)至少有3个解,1个为正,1个为负,第3个为变号的.

定理2 令 f 满足 (f_1)、(f_2)、(f_3)及(f_8),则对于任何 $\lambda\in(\pi^4/(2b),\pi^4/(2a))$,边值问题(1)至少有3个解,1个为正,1个为负,第3个为变号的.

定理3 令 f 满足(f_1)、(f_2)、(f_4)、(f_5)及(f_7),则对于任何 $\lambda\in[\pi^4/(2b),\pi^4/(2a)]$,边值问题(1)至少有3个解,1个为正,1个为负,第3个为变号.

定理4 令 f 满足(f_1)、(f_2)、(f_4)、(f_5)及(f_8),则对于任何 $\lambda\in(\pi^4/(2b),\pi^4/(2a)]$,边值问题(1)至少有3个解,1个为正,1个为负,第3个为变号的.

定理5 令 f 满足(f_1)、(f_2)、(f_4)、(f_6)及(f_7),则对于任何 $\lambda\in[\pi^4/(2b),\pi^4/(2a)]$,边值问题(1)至少有3个解,1个为正,1个为负,第3个为变号的.

定理6 令 f 满足(f_1)、(f_2)、(f_4)、(f_6)及(f_8),则对于任何 $\lambda\in(\pi^4/(2b),\pi^4/(2a)]$,边值问题(1)至少有3个解,1个为正,1个为负,第3个为变号的.

注1 (i) 若 $a=k^4\pi^4$,(f_3)是一个非共振条件,(f_4) 表明此问题在无穷处是共振的,所以我们使用在共振时经常使用的条件 (f_5) 或 (f_6)以得到紧性条件;

(ii) 对于条件 (f_7) 和(f_8),若 $b=l^4\pi^4$,在零点处(f_7) 是一个非共振条件,但是 (f_8) 是一个共振条件;

(iii) 若(f_4) 或 (f_8) 成立,表明共振在无穷远或零点处发生,但是若 (f_4) 和 (f_8)同时成立(其中 $k<l$),则共振不仅在无穷远处也在零点处发生.

1 预备知识

令 $C[0,1]$ 是实 Banach 空间具有范数 $\|u\|_C=\max_{t\in[0,1]}|u(t)|$ $\forall u\in C[0,1]$. 很容易验证

$$C_0[0,1]=\{u\in C[0,1]:u(0)=u(1)=0\},$$

同样关于范数 $\|\cdot\|_C$ 成一 Banach 空间. $L^2[0,1]$ 是一个实 Hilbert 空间具有范数

$$(u,v)=\int_0^1 u(t)v(t)\,\mathrm{d}t,\qquad \forall u,v\in L^2[0,1].$$

众所周知,边值问题(1)在 $C^4[0,1]$ 中的解等价于以下的积分方程在 $C[0,1]$ 中的解[10]:

$$u(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)\int_0^1 G(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,1],\tag{2}$$

其中 $G(t,s)$ 是线性边值问题 $-u''(t)=0,\forall t\in[0,1],u(0)=u(1)=0$ 的 Green 函数,即

$$G(t,s)=\begin{cases}s(1-t), & 0\le s\le t\le 1;\\ t(1-s), & 0\le t\le s\le 1.\end{cases}$$

定义算子 $T,A_f:C[0,1]\to C[0,1]$ 分别为

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)u(s)\mathrm{d}s,$$

$$A_f u(t)=f(t,u(t)).$$

由于 $T:C[0,1]\to C_0[0,1]$, 积分方程(2)等价于以下的算子方程:

$$u=\lambda T^2A_f u \tag{3}$$

在 $C_0[0,1]$ 中的解.

引理 1[14] $T:L^2[0,1]\to C_0[0,1]$ 是一个线性全连续算子,同样也是 $L^2[0,1]$ 到 $L^2[0,1]$ 的线性全连续算子. 并且 $T:C_0[0,1]\to C_0[0,1]$ 是强保序的.

由 T 的定义可得, $\forall u\in L^2[0,1]$ 满足 $u\neq 0$ 有 $Tu\neq 0$. 因此, $\forall u_1,u_2\in L^2[0,1]$ 满足 $u_1\neq u_2$, 有 $Tu_1\neq Tu_2$. 易知 T 的所有特征值为

$$\{\lambda_k\}_{k\in\mathbf{N}}=\frac{1}{k^2\pi^2},$$

其相应的正交特征函数为

$$\{e_k\}_{k\in\mathbf{N}}=\{\sqrt{2}\sin k\pi t\}_{k\in\mathbf{N}},$$

且有 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_k>\cdots>0,\ \forall k\in\mathbf{N}$.

引理 2[10] (i) 算子方程

$$u=\lambda T^2A_f u$$

在 $C[0,1]$ 中有一个解当且仅当算子方程

$$v=\lambda TA_f Tv \tag{4}$$

在 $L^2[0,1]$ 中有一个解;

(ii) 对于以上两个方程解的唯一性是等价的.

注 2 由引理 2 的证明[10]可知,若 $u\in C_0[0,1]$ 是方程(4)的解,则 $Tu\in C_0[0,1]$ 是方程(3)的解,由引理 1 可知,两者具有相同的符号.

分别选取 $E=L^2[0,1]$, $X=C_0[0,1]$ 为我们的 Hilbert 及 Banach 空间. 定义泛函 $J:E\to\mathbf{R}$

$$J(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\lambda\Psi(Tu),\qquad u\in E.$$

则由文献[10],有

$$J'(u)=u-\lambda TA_f Tu,\qquad u\in E.$$

因此引理 2 表明算子方程 $u=\lambda T^2A_f u$ 在 X 中有一个解当且仅当泛函 J 在 E 中有一个临界点. 这样边值问题(1)就转化为一个变分问题. 令 $K=TA_f T$, 则由引理 1,

$$M=M(J)=\{u\in E:J'(u)=0\}=\{u\in E,u=\lambda Ku\}\subset X.$$

现在定义 J 的负梯度流. 由条件(f_1),在 E 上, K 是 Fréchet 可微的,局部 Lipschitz 连续的,同样在 X 上是局部 Lipschitz 连续的. 对每个 $u_0\in E$, 定义 $u(t,u_0)$, $t\in[0,\tau(u_0))$ 是以下初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-J'(u),\\ u(0)=u_0\end{cases} \tag{5}$$

的唯一解. 其中 $\tau(u_0)$ 是 $u(\cdot,u_0)$ 在 E 中的最右存在区间端点. 并有

$$u(t,u_0)=\mathrm{e}^{-t}u_0+\int_0^t \mathrm{e}^{-t+s}Ku(s,u_0)\mathrm{d}s. \tag{6}$$

定义 1[20] 称 $N \subset E$ 是 J 的流不变集,若 $\{u(t,u_0):0 \leqslant t < \tau(u_0), u_0 \in N\} \subset N$.

引理 3[18] 若 $u_0 \in X$,则 $u(\cdot,u_0)$ 连续的从 $[0,\tau(u_0))$ 到 X. 且 $u(t,u_0), t \in [0,\tau(u_0))$ 也是初值问题(5) 在 X 中的解.

令

$$P = \{u \in X: u(t) \geqslant 0, \forall\ t \in [0,1]\},$$

则 P 是 X 中的正规锥且有

$$\dot{P} = \{u \in X: u(t) > 0, \forall\ t \in (0,1)\}.$$

由于 $K(P) \subset P, K(-P) \subset (-P)$, 其中 P, $-P$ 是 X 中闭凸集,由 Banach 空间中的常微分方程理论[参见文献21 的引理12.1.2]可知, 在条件 $f(t,u)u \geqslant 0$ 下, P, $-P$ 都是 J 的流不变集. 注意到 $K: P \to \dot{P}$ 及式(6),可知 $\forall t > 0$,对于 $u_0 \in P$ 有 $u(t,u_0) \in \dot{P}$. $\dot{P}$, $-\dot{P}$都是 J 的流不变,且有 $M \cap (\partial P \cup \partial(-P)) = \emptyset$.

定义 2[22-23] 假设 $J \in C^1(X,R)$, $c \in \mathbf{R}$, N 是 J 的流不变集. 称 J 在 N 上对于 c 有收缩性质,若 $\forall b > c$, $J^{-1}[c,b] \cap N \cap M = \emptyset$, 则 $J_c \cap N$ 是 $J_b \cap N$ 的收缩集;即存在连续的 $\boldsymbol{\eta}: J_b \cap N \to J_c \cap N$ 使得 $\boldsymbol{\eta}(J_b \cap N) \subset J_c \cap N$, $\boldsymbol{\eta}|_{J_c \cap N} = \mathrm{id}|_{J_c \cap N}$,其中 $J_c = \{u \in X, J(u) \leqslant c\}$, $M = \{u \in E: J'(u) = 0\}$, id 是恒等映射.

引理 4[23] 假设 $J \in C^1(E,R)$ 满足 PS 条件(参见文献[24]), N是 J 在 X 中的流不变集, $c = \inf_{u \in N} J(u) > -\infty$, J 在 N 中对任何 $m \in \mathbf{R}$ 有收缩性质. 则或者有

(i) J 至少有一个临界点 $u^* \in \overline{N}$ 使得 $J(u^*) = c$

或者

(ii) J 有无穷多个临界点在 $\overline{N}$ 中,其中 $\overline{N}$ 是 N 在 X 中的拓扑的闭包.

2 主要结果的证明

引理 5[16] 假设 f 满足下列条件之一:

(a) (f_3) 及 $\lambda \in (0, \pi^4/(2a))$;

(b) (f_4)、(f_5) 及 $\lambda \in (0, \pi^4/(2a)]$;

(c) (f_4)、(f_6) 及 $\lambda \in (0, \pi^4/(2a)]$.

则有

(i) J 在 $L^2[0,1]$ 上是强制的,即 $J(u) \to +\infty$,当 $\|u\| \to \infty$;

(ii) J 满足 PS 条件.

定理证明

第 1 步 我们表明若引理 5 成立,则对于任何 $a \in \mathbf{R}$, J 在 X 上对于 a 有收缩性质.

由引理 5 可知, J 满足 PS 条件.

$\forall\ b > a$ 满足 $J^{-1}[a,b] \cap X \cap M = \emptyset$,考虑以下的强解 $\sigma(\tau,u_0)(\tau \in [0,\bar{\eta}(u_0)))$,其中 $\bar{\eta}(u_0)$ 是 X 中的最大存在区间端点:

$$\begin{cases} \sigma'(\tau,u_0) = \dfrac{-J'(\sigma(\tau,u_0))}{\|J'(\sigma(\tau,u_0))\|}, \\ \sigma(0) = u_0 \in J^{-1}[a,b] \cap X \backslash M. \end{cases} \tag{7}$$

由 PS 条件,对于 $c \in [a,b]$,存在 $\delta > 0$ 使得

$$\|J'(u)\| \geqslant \delta, \qquad 当\ u \in J^{-1}[a-\delta, b+\delta] \cap E.$$

令

$$w(\tau,u_0)=\int_0^\tau \frac{1}{\|J'(\sigma(\xi,u_0))\|}\mathrm{d}\xi,$$

$$t=w(\tau,u_0):[0,\bar{\eta}(u_0))\to[0,\eta(u_0)),u(t,u_0)=\sigma(\tau,u_0);$$

则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau}\cdot\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}=-J'(\sigma(\tau,u_0))=-J'(u(t,u_0)).$$

所以方程(7)的解 $\sigma(\tau,u_0)$ 与方程(5) 在 X 中的解 $u(t,u_0)$ 是一致的,并且是存在唯一的.

由于

$$\|\sigma'(\tau,u_0)\|=1,$$

我们有

$$\|\sigma(\tau,u_0)-u_0\|\leqslant\int_0^\tau\|\sigma'(t,u_0)\|\mathrm{d}t\leqslant\tau,$$

$$\|\sigma(\tau,u_0)\|\leqslant\|u_0\|+\tau.$$

由

$$\frac{\mathrm{d}J(\sigma(\tau,u_0))}{\mathrm{d}\tau}=-\|J'(\sigma(\tau,u_0))\|$$

及式(7),有

$$J(\sigma(\tau,u_0))-J(u_0)=\int_0^\tau\frac{\mathrm{d}J(\sigma(\tau,u_0))}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau=$$

$$-\int_0^\tau\|J'(\sigma(\tau,u_0))\|\mathrm{d}\tau\leqslant-\delta\tau\to-\infty,\qquad 当\ \tau\to+\infty.$$

则存在 $T_{u_0}<+\infty$ 使得

$$J(\sigma(\tau,u_0))=a,\qquad 在\ T=T_{u_0}.$$

而且, $\sigma(T_{u_0},u_0)=w,w\in X$. 若 $u_0\in J^a$,定义 $T_{u_0}=0$.

由于 $J(\sigma(T_{u_0},u_0))=a$,注意到 $\sigma(\tau,u_0)$ 在 X 拓扑中对于 (τ,u_0) 是连续的,

$$\frac{\partial}{\partial\tau}J(\sigma(\tau,u_0))|_{t=T_{u_0}}=-\|J'(\sigma(T_{u_0},u_0))\|\neq0,$$

由隐函数定理可知 $u_0\to T_{u_0}:J^{-1}[a,b]\cap X\to\mathbf{R}$ 在 X 中是连续的.

定义

$$\beta(t,u_0)=\begin{cases}u_0, & u_0\in J^a\cap X;\\ \sigma(T_{u_0}t,u_0), & u_0\in(J^b\cap X)\setminus(J^a\cap X),\end{cases}$$

则 $\beta:[0,1]\times(J^b\cap X)\to(J^a\cap X)$ 满足

$$\beta(0,\cdot)=\mathrm{id};\qquad\beta(1,J^b\cap X)\subset(J^a\cap X),$$

$$\beta(t,\cdot)|_{J^a\cap X}=\mathrm{id}|_{J^a\cap X},\qquad\forall t\in[0,1].$$

与文献[24]的引理5.2类似可证, β 在 X 拓扑中也是连续的. 令 $\eta(\cdot)=\beta(1,\cdot)$. 则 η 满足定义2.

第2步　若 f 满足下列条件之一:

(a) (f_7) 及 $\lambda\in[\pi^4/(2b),+\infty)$; (b) (f_8) 及 $\lambda\in(\pi^4/(2b),+\infty)$;

则存在一条道路 $\Gamma\subset X$ 连接 $\dot{P}$, $-\dot{P}$,使得 $J(u)<0\ \forall u\in\Gamma\setminus\{0\}$.

(a) 由条件(f_7), 存在 $\delta > 0$, 使得对于 $|u| < \delta$ 有 $F(t,u) > bu^2$. 令

$$\Gamma(s) = (2s-1)\sqrt{2}\sin\pi t, s \in [0,1],$$

则 $\Gamma(0) = -\sqrt{2}\sin\pi t \in -\dot{P}, \Gamma(1) = \sqrt{2}\sin\pi t \in \dot{P}$. 对于所有的 $v \in \Gamma(s)\backslash\{0\}$, 选择 r 充分小使得 $|rv| < \delta$. 当 $\lambda \geqslant \pi^4/(2b)$,

$$J(rv) = \frac{1}{2}\int_0^1 (rv)^2 \mathrm{d}t - \lambda\int_0^1 F(t,T(rv))\mathrm{d}t <$$

$$\frac{1}{2}r^2(2s-1)^2 - \lambda b\int_0^1 (T(rv))^2 \mathrm{d}t =$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda b}{\pi^4}\right) r^2(2s-1)^2 < 0.$$

(b) 由条件(f_8), 选择 ε 充分小, 使得 $0 < \varepsilon \leqslant b - \pi^4/(2\lambda)$, 且对于 $|u| < \delta$ 有 $F(t,u) > (b-\varepsilon)u^2$. 与(a)的证明类似, 当 $\lambda > \pi^4/(2b)$,

$$J(rv) = \frac{1}{2}\int_0^1 (rv)^2 \mathrm{d}t - \lambda\int_0^1 F(t,T(rv))\mathrm{d}t <$$

$$\frac{1}{2}r^2(2s-1)^2 - \lambda(b-\varepsilon)\int_0^1 (T(rv))^2 \mathrm{d}t =$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda(b-\varepsilon)}{\pi^4}\right) r^2(2s-1)^2 < 0.$$

第 3 步 找到边值问题(1)的解.

由引理 5 可知, J 满足 PS 条件, 在 E 上是下有界的. 由第 2 步, 存在一条道路 $\Gamma(s)$ 连接 $\dot{P}$ 及 $-\dot{P}$, 且 $J(u) < 0, \forall\ u \in r\Gamma(s)\backslash\{0\}$ (其中 r 充分小). 令

$$V_1 = \{h \in X: \exists t_0 \geqslant 0 \text{ 使得初始问题(5) 的解 } u(t_0,h) \in \dot{P}\}.$$

由于 $\dot{P}$, $-\dot{P}$是 J 在 X 中的流不变集, 易知 V_1 是 J 在 X 中的开不变集, 由解对初值的连续依赖性, 且 $M \cap (\partial P \cup \partial(-P)) = \emptyset$, 则 ∂V_1 是 J 在 X 上的不变集. 所以 $\partial V_1 \cap P = \emptyset, \partial V_1 \cap (-P) = \emptyset$ 因此

$$-\infty < \inf_{u\in\dot{P}} J(u) < 0,\ -\infty < \inf_{u\in(-\dot{P})} J(u) < 0,\ -\infty < \inf_{u\in\partial V_1} J(u) < 0.$$

由 PS 条件及引理 4 可得, 至少存在 $u_1 \in P, u_2 \in (-P), u_3 \in \partial V_1$ 使得

$$J'(u_i) = 0, \quad i = 1,2,3;$$

$$J(u_1) = \inf_{u\in\dot{P}} J(u),\ J(u_2) = \inf_{u\in(-\dot{P})} J(u),\ J(u_3) = \inf_{u\in\partial V_1} J(u),$$

显然 $u_1 \in \dot{P}, u_2 \in (-\dot{P}), u_3 \notin P \cup (-P)$ 是边值问题 (1)的解, 证毕.

例 1 令

$$f(t,u) = 4\arctan u + (t+1)u,$$

$$F(t,u) = 4u\arctan u - 2\ln(1+u^2) + \frac{1}{2}(t+1)u^2.$$

通过简单计算, 有

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{F(t,u)}{u^2} < \frac{3}{2},\ \liminf_{|u|\to 0} \frac{F(t,u)}{u^2} > 2,$$

则(f_1)、(f_2)、(f_3)及(f_7) 成立. 由定理 1, 当 $\lambda \in [\pi^4/4, \pi^4/3)$, 边值问题(1)至少有 3 个解, 1

个为正,1 个为负,第 3 个为变号解.

例 2 令

$$f(t,u)=\arctan(t+1)u+(3-t)u,$$

$$F(t,u)=u\arctan(t+1)u-\frac{\ln(1+(t+1)^2u^2)}{2(1+t)}+\frac{3-t}{2}u^2.$$

通过简单计算,有

$$\lim_{|u|\to\infty}\frac{F(t,u)}{u^2}<\frac{7}{4},\ \lim_{|u|\to 0}\frac{F(t,u)}{u^2}=2,$$

则(f_1)、(f_2)、(f_3)及(f_8)成立. 由定理 2,当 $\lambda\in(\pi^4/4,2\pi^4/7)$,边值问题(1)至少有 3 个解,1 个为正,1 个为负,第 3 个为变号解.

例 3 令

$$f(t,u)=\frac{u^3}{1+u^2}+\frac{2(t+1)u}{1+(t+1)^2u^4},$$

$$F(t,u)=\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)+\arctan((t+1)u^2).$$

通过简单计算,有

$$\lim_{|u|\to\infty}\frac{F(t,u)}{u^2}=\frac{1}{2}>0,\ \lim_{|u|\to\infty}(f(t,u)u-2F(t,u))=+\infty,$$

$$\liminf_{|u|\to 0}\frac{F(t,u)}{u^2}>\frac{2}{3},$$

则(f_1)、(f_2)、(f_4)、(f_6)及(f_7)成立. 由定理 5,当 $\lambda\in[3\pi^4/4,\pi^4]$,边值问题(1)至少有 3 个解,1 个为正,1 个为负,第 3 个为变号解.

例 4 令

$$f(t,u)=\frac{u^3}{1+u^2}+\frac{2u}{1+u^4},\ F(t,u)=\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)+\arctan(u^2).$$

通过简单计算,有

$$\lim_{|u|\to\infty}\frac{F(t,u)}{u^2}=\frac{1}{2}>0,\ \lim_{|u|\to\infty}(f(t,u)u-2F(t,u))=+\infty,$$

$$\lim_{|u|\to 0}\frac{F(t,u)}{u^2}=1>0,$$

则(f_1)、(f_2)、(f_4)、(f_6)及(f_8)成立. 由定理 6,当 $\lambda\in(\pi^4/2,\pi^4]$,边值问题(1)至少有 3 个解,1 个为正,1 个为负,第 3 个为变号解.

致谢 作者十分感谢审稿人提出的宝贵意见及建议. 感谢南京师范大学优秀博士论文培育计划及江南大学青年基金(2008LQN008)的资助.

参考文献:

[1] Davis J M, Eloe P W, Henderson J. Triple positive solutions and dependence on higher order derivatives[J]. *J Math Anal Appl*, 1999, **237**(2): 710-720.

[2] Davis J M, Henderson J, Wong P J Y. General Lidstone problems: multiplicity and symmetry of solutions[J]. *J Math Anal Appl*, 2000, **251**(2): 527-548.

[3] Bai Z, Wang H. On positive solutions of some nonlinear fourth-order beam equations[J]. *J Math Anal Appl*, 2002, **270**(2): 357-368.

[4] Graef J R, Qian C, Yang B. Multiple symmetric positive solution of a class of boundary value problem for higher order ordinary differential equations[J]. *Proc Amer Math Soc*, 2003, **131**(2): 577-585.

[5] Li Y. Positive solutions of fourth-order periodic boundary problems[J]. *Nonlinear Anal*, 2003, **54**(6): 1069-1078.

[6] Yao Q. Positive solutions for eigenvalue problems of fourth-order elastic beam equations[J]. *Appl Math Lett*, 2004, **17**(2): 237-243.

[7] Ma R Y, Zhang J H, Fu S M. The method of lower and upper solutions for fourth-order two-point boundary value problems[J]. *J Math Anal Appl*, 1997, **215**(2): 415-422.

[8] Bai Z B. The method of lower and upper solutions for a bending of an elastic beam equation [J]. *J Math Anal Appl*, 2000, **248**(1): 195-202.

[9] Charkrit S, Kananathai A. Existence of solutions for some higher order boundary value problems[J]. *J Math Anal Appl*, 2007, **329**(2): 830-850.

[10] Li F, Liang Z P, Zhang Q. Existence and multiplicity of solutions of a kind of fourth-order boundary value problem[J]. *Nonlinear Anal*, 2005, **62**(5): 803-816.

[11] Liu X L, Li W T. Existence and multiplicity of solutions for fourth-order boundary value problems with parameters[J]. *J Math Anal Appl*, 2007, **327**(1): 362-375.

[12] Li F Y, Li Y H, Liang Z P. Existence of solutions to nonlinear Hammerstein integral equations and applications[J]. *J Math Anal Appl*, 2006, **323**(1): 209-227.

[13] Li F Y, Li Y H, Liang Z P. Existence and multiplicity of solutions to $2m$ th-order ordinary differential equations[J]. *J Math Anal Appl*, 2007, **331**(2): 958-977.

[14] Han G D, Li F Y. Multiple solutions of some fourth-order boundary value problems[J]. *Nonlinear Anal*, 2007, **66**(11): 2591-2603.

[15] Han G D, Xu Z B. Multiple solutions of some nonlinear fourth-order beam equations[J]. *Nonlinear Anal*, 2008, **68**(12): 3646-3656.

[16] Yang Y, Zhang J H. Existence of solutions for some fourth-order boundary value problems with parameters[J]. *Nonlinear Anal*, 2008, **69**(4): 1364-1375.

[17] Yang Y, Zhang J H. Nontrivial solutions for some fourth order boundary value problems with parameters[J]. *Nonlinear Anal*, 2009, **70**(11): 3966-3977.

[18] Li F Y, Zhang Y B, Li Y H. Sign-changing solutions on a kind of fourth order Neumann boundary value problem[J]. *J Math Anal Appl*, 2008, **344**(1): 417-428.

[19] Zhang Z T, Li S J. On sign-changing and multiple solutions of the p-Laplacian[J]. *J Func Anal*, 2003, **197**(2): 447-468.

[20] Liu Z L, Sun J X. Invariant sets of descending flow in critical point theory with applications to nonlinear differential equations[J]. *J Differential Equations*, 2001, **172**(2): 257-299.

[21] 郭大钧,孙经先,抽象空间中的常微分方程[M].济南:山东科技出版社, 1989.

[22] Dancer E N, Zhang Z T. Fucik spectrum, Sigh-changing and multiple solutions for semilinear elliptic boundary value problem with resonance at infinity[J]. *J Math Anal Appl*, 2000, **250**(2): 449-464.

[23] Zhang Z T, Li X D. Sign-changing solutions and multiple solutions for semilinear elliptic boundary value problems with a retraction term nonzero at zero[J]. *J Differential Equ*, 2002, **178**(2): 298-313.

[24] Chang K C. *Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems*[M]. Boston: Birkhäuser, 1993.

Existence Results for Some Fourth Order Boundary Value Problems With a Parameter

YANG Yang[1,2], ZHANG Ji-hui[1]

(1. *Institute of Mathematics*, *School of Mathematics Science*, *Nanjing Normal University*, *Nanjing* 210097, *P. R. China*;

2. *School of Science*, *Jiangnan University*, *Wuxi*, *Jiangsu* 214122, *P. R. China*)

Abstract: A sequel to Yang, Zhang [Nonlinear Anal, 2008, **69**: 1364-1375.] in which nontrivial solutions for the fourth order boundary value problems are studied. Now under the same conditions near infinity, but different from the conditions near zero, positive, negative, and sign-changing solutions are obtained by combining critical point theory, retracting property and invariant sets.

Key words: boundary value problem; critical point; invariant sets; retracting property