

# 关于 Darcy 方程和 Stokes 方程耦合问题的非协调稳定化方法\*

冯民富<sup>1</sup>, 祁瑞生<sup>1</sup>, 朱 瑞<sup>1</sup>, 鞠炳焄<sup>2</sup>

(1. 四川大学 数学学院, 成都 610064;

2. 海油发展北京分公司 信息技术开发公司, 北京 100027)

(周哲玮推荐)

**摘要:** 对于 Darcy-Stokes 耦合问题, 基于非协调的 Crouzeix-Raviart 元, 提出了一种新的稳定化有限元方法. 并对该方法导出了最优的误差估计. 最后, 用数值计算验证了所提出理论的有效性.

**关键词:** 耦合问题; 质量守恒; 稳定化有限元方法

**中图分类号:** O242.21      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.03.012

## 引 言

本文所研究的物理模型为 Darcy-Stokes 的耦合问题. 这个模型是由流体域中的 Stokes 方程和多孔介质中的渗透流 Darcy 方程通过界面耦合而成的. 在工业当中有着广泛的应用价值, 如可以利用这个模型模拟工业污水流入溪水、湖泊、江河, 再进入供水系统的过程; 可以利用它通过大坝渗透水的量, 判断河堤上的大坝是否结实.

最近以来, 从理论和数值角度<sup>[1-6]</sup>上, 耦合问题已经变成了一个热点问题, 但是到目前为止, 耦合问题的有限元的数值解法仍存在几大问题: 1) 耦合问题数值解法与 Stokes 方程和 Darcy 方程有一个共同问题, 即速度和压力的有限元空间必须满足 Babuška-Brezzi<sup>[7-8]</sup> 稳定条件; 2) 在许多方法<sup>[5, 9-10]</sup>中, 两个区域上速度的有限元空间的选取是不同的, 但是这种选取会在理论和数值分析上产生很多困难. 而另一方面, 在文献[1, 4]中作者讨论了在整个区域上速度取统一的有限元空间很容易进行理论、计算分析, 但其有限元空间的构造非常的复杂, 不利于工程的计算; 3) 在耦合界面的处理上存在着技术困难, 特别是质量守恒条件. 因此, 我们所感兴趣的是找到一个简单的, 能很容易计算耦合问题数值解的有限元.

这种有限元最有可能的是 Crouzeix-Raviart (CR) 元, 它有以下优点: 与分片常数元结合满足 inf-sup 条件, 并且是分片守恒的. 因此, 在许多问题中 CR 元有着广泛的应用, 如 Darcy-Stokes 问题<sup>[11]</sup>, Stokes 问题<sup>[12]</sup> 及弹性问题<sup>[13-14]</sup> 等. 在文献[11]中, 为了保证当方程趋向 Darcy 方程时解的收敛性和 Korn 不等式的成立, 引入了与文献[13]相类似的稳定项. Stokes 方程和

\* 收稿日期: 2009-06-12; 修订日期: 2010-01-25

基金项目: 四川省科技攻关课题资助项目(05GG006-006-2)

作者简介: 冯民富(1964—), 男, 四川南充人, 教授, 博士(联系人. E-mail: fmf@wtjs.cn);

祁瑞生(1982—), 男, 山东莱阳人(E-mail: qiruisheng123@sohu.com).

Darcy 方程的耦合问题比 Darcy-Stokes 问题复杂得多,因此除了 Darcy-Stokes 问题的困难外,在处理耦合界面条件上,特别是质量守恒条件上存在许多困难.在本文中,我们将 CR 元应用到了耦合问题中,也引入了与文献[13]相类似的稳定项.为了能很好的处理耦合界面的质量守恒条件,我们引入了新的插值算子,该算子在整个区域上不是 CR 元,但在每个区域上是 CR 元.我们证明该方法的稳定性,及误差估计,最后给出的数值算例很好地证明理论的有效性.

## 1 模型及初步知识

设  $\Omega$  为二维多边形区域,被分成许多子区域  $\Omega^{1,i}$  和  $\Omega^{2,j}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, m_1$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots, m_2$ . 假定  $\Omega^{1,\bullet}$  和  $\Omega^{2,\bullet}$  为有界的连通的子区域,并满足:当  $i \neq j$ ,  $\Omega^{1,i} \cap \Omega^{1,j} = \emptyset$ ,  $\Omega^{2,i} \cap \Omega^{2,j} = \emptyset$ ,  $\Omega^{1,\bullet} \cap \Omega^{2,\bullet} = \emptyset$  及  $\Omega_1 = \cup_{i=1}^{m_1} \Omega^{1,i}$ ,  $\Omega_2 = \cup_{j=1}^{m_2} \Omega^{2,j}$ .  $\Gamma_{i,j}$  为子区域  $\Omega^{1,i}$  和  $\Omega^{2,j}$  的界面,  $\Gamma = \cup \Gamma_{i,j}$  及  $\Gamma_i = \partial\Omega/\Gamma$ . 设流体的速度变量为  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ , 压力变量为  $p = (p_1, p_2)$ , 其中  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}|_{\Omega_i}$ ,  $p_i = p|_{\Omega_i}$ . 则在区域  $\Omega_1$  上的 Stokes 方程满足下列条件:

$$\begin{cases} -2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) + \nabla p_1 = \mathbf{f}_1, & \text{在 } \Omega_1 \text{ 上,} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = g_1, & \text{在 } \Omega_1 \text{ 上,} \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}, & \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上,} \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1)$  为应力张量,表达形式为  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) = (\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_1^T)/2$ .

在区域  $\Omega_2$  上 Darcy 方程满足下列条件:

$$\begin{cases} \mu \mathbf{u}_2 + \mathbf{k} \nabla p_2 = \mathbf{f}_2, & \text{在 } \Omega_2 \text{ 上,} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_2 = g_2, & \text{在 } \Omega_2 \text{ 上,} \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上,} \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{k}$  为对称的,正定的,上下一直有界的张量,  $\mathbf{f}_i$  表示外力,  $\mu > 0$  为流体粘性系数,  $\mathbf{n}$  为边界  $\Gamma_2$  的外单位法向量.

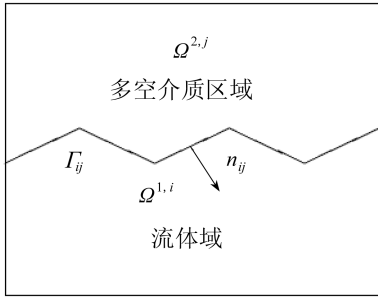


图1 耦合问题示意图

为了唯一确定压力的解  $p$ , 假设  $p$  满足条件

$$\int_{\Omega} p dx = 0. \quad (3)$$

设  $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$  分别为耦合界面  $\Gamma$  的单位外法向量和单位切向量, 则上述两方程的耦合问题在界面  $\Gamma$  上满足下列条件:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上,} \quad (4)$$

$$2\mu \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} = p_1 - p_2, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上,} \quad (5)$$

$$2\mu \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{k}^{-1/2} \alpha \mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上,} \quad (6)$$

(4)式表示质量守恒条件, (5)式表示外力平衡条件, (6)式为 Beaver-Joseph-Saffman 条件已被文献[15-17]所接受, 常

系数  $\mathbf{k} > 0$  可以通过试验确定.

我们引入下列 Hilbert 空间:

$$W := \{ \mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega) : \mathbf{v}|_{\Omega_1} \in [H^1(\Omega_1)]^2, \mathbf{v}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0} \},$$

$$V := \{ \mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega) : \mathbf{v}|_{\Omega_i} \in [H^1(\Omega_i)]^2, \mathbf{v}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0} \}$$

和

$$Q := L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q dx = 0 \right\}.$$

设  $\xi_h^i$  为区域  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2$ ), 拟一致非退化三角剖分,  $\Gamma_h^i$  表示  $\xi_h^i$  中三角单元边界的集合(耦合界面上的边界除外),  $h_i$  表示  $\xi_h^i$  中所有三角形单元直径上确界. 假定网格在耦合边界上满足

条件:对于任何边界  $e \in \partial K^1 \cap \Gamma, K^1 \in \xi_h^1$  仅仅且必须为  $K^2 \in \xi_h^2$  单元的边界. 则我们引入下列非协调有限元空间:

$$V_h := \begin{cases} \mathbf{v}: \mathbf{v}|_K \in [P_1(K)]^2, & \forall K \in \xi_h^1 \cup \xi_h^2, \\ \int_e \mathbf{v} ds = 0, & e \in (\Gamma_h^1 \cup \Gamma_h^2) / \partial\Omega_2, \\ \int_e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = 0, & e \in \partial\Omega_2, \end{cases}$$

其中在边界  $e$  上的  $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  跳量定义如下:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0^+} (\mathbf{v}(\mathbf{x} + s\mathbf{n}) - \mathbf{v}(\mathbf{x} - s\mathbf{n})), & \text{若 } e \in (\Gamma_h^1 \cup \Gamma_h^2) / \partial\Omega, \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} (\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x} - s\mathbf{n})), & \text{若 } e \in \partial\Omega \end{cases}$$

和

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) := \begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0^+} (\mathbf{v}(\mathbf{x} + s\mathbf{n}) - \mathbf{v}(\mathbf{x} - s\mathbf{n})) \cdot \mathbf{n}, & \text{若 } e \in \Gamma_h^2 \cup \Gamma, \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} (\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x} - s\mathbf{n})) \cdot \mathbf{n}, & \text{若 } e \in \partial\Omega_2 / \Gamma, \end{cases}$$

这里  $\mathbf{n}$  为  $\Gamma$  单位法向量,  $\mathbf{x} \in e$ . 如果  $e \in \partial\Omega$ , 则  $\mathbf{n}$  为  $\partial\Omega$  外法向量; 其它情况下,  $\mathbf{n}$  可以为  $e$  的任意固定方向的法向量. 进一步, 介绍下列空间:

$$Q_h := \left\{ q: q|_K \in P_0(K), \int_{\Omega} q dx = 0 \right\},$$

$$W_h^i := \left\{ \mathbf{v}: \mathbf{v}|_K \in [P_1(K)]^2, \forall K \in \xi_h^i, \int_e \mathbf{v} ds = 0, e \in \Gamma_h^i / \partial\Omega_i \right\}, \quad i = 1, 2$$

及

$$X^i = X|_{\Omega_i}, \quad i = 1, 2,$$

其中  $X$  可以为空间  $V_h$ , 也可以为  $V$ .

**引理 1.1** 假设  $\Gamma_{i,j} (i = 1, 2, 3, \dots, m_1; j = 1, 2, 3, \dots, m_2)$  为折线耦合边界, 那么空间  $V$  到  $V_h$  存在一个插值算子  $R_h$ .

**证明** 假设  $r_h^i$  为定义如下的 CR 元插值:

$$r_h^i: [H^1(\Omega_i)]^2 \rightarrow W_h^i, \quad i = 1, 2$$

和

$$R_h|_{V^i} = r_h^i|_{V^i}, \quad i = 1, 2.$$

很明显, 所定义的  $R_h$  为空间  $V$  到  $V_h$  一个插值的充分必要条件为

$$\int_e [R_h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] ds = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in W, \forall e \in \Gamma,$$

其中  $\mathbf{n}$  为  $e$  上的单位法向量.

实际上

$$\int_e [R_h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] ds = \int_e [R_h \mathbf{v}] ds \cdot \mathbf{n} = \int_e \mathbf{v} ds \cdot \mathbf{n} = \int_e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = 0, \quad \forall e \in \Gamma.$$

**注 1**  $R_h$  在每个区域  $\Omega_i$  为 CR 元插值, 但是从空间  $V_h$  的定义, 可以看出在整个区域上  $R_h$  不是 CR 元插值.

设散度自由空间  $Z_h$  为

$$Z_h := \{ \mathbf{v}_h \in W_h : (\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h) = 0, \forall q_h \in Q_h \},$$

很容易可以证明空间  $V_h$  和  $Q_h$  满足 inf-sup 条件, 因此  $Z_h$  非空.

## 2 离散格式

为了更好地引入离散格式,首先,我们先介绍耦合问题(1)至(6)的弱变分形式. 设

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\mu \int_{\Omega_1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1) dx + \mu \int_{\Omega_2} \mathbf{k}^{-1} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 dx + \mu \alpha \int_{\Gamma} \mathbf{k}^{-1/2} (\mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}) (\mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}) ds,$$

其中  $\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i,j} \boldsymbol{\varepsilon}_{i,j} \boldsymbol{\varepsilon}_{i,j}$ . 我们考虑下列双线性泛函

$$B[(\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)] = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v})_{\Omega} + (q, \nabla \cdot \mathbf{u}), \quad (7)$$

则耦合问题(1)至(6)的弱变分形式为:求  $(\mathbf{u}, p) \in W \otimes Q$ , 使得下列式子成立:

$$B[(\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)] = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (g, q), \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in W \otimes Q, \quad (8)$$

其中  $\mathbf{f}|_{\Omega_i} = \mathbf{f}_i, g|_{\Omega_i} = g_i$ . 在公式中,耦合条件(4)至(6)都是以弱形式表达的.

在上述所列出的有限元空间上,引入双线性泛函

$$B_h[(\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)] = a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) - b(\mathbf{u}, q) + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (9)$$

其中

$$a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{K \in \xi_h^1} \int_K \mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1) dx + \int_{\Omega_2} \mu \mathbf{k}^{-1} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 dx + \int_{\Gamma} \mu \mathbf{k}^{-1/2} \alpha (\mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}) (\mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}) ds,$$

$$b(\mathbf{v}, p) = -(\nabla \cdot \mathbf{v}, p)_h = - \sum_{K \in \xi_h^1 \cup \xi_h^2} \int_K p \nabla \cdot \mathbf{v} dx$$

及

$$j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{e \in \Gamma_h^1} \gamma_s \int_e \frac{\mu}{h_e} \mathbf{u} \mathbf{v} ds + \sum_{e \in \Gamma_h^2 \cup \Gamma} \gamma_d \int_e \frac{\mu}{h_e} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds,$$

这里  $\gamma_s > 0, \gamma_d > 0$  为稳定项系数,  $h_e = |e|$ .

那么耦合问题的离散格式为:求  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \otimes Q_h$ , 使得下列式子成立:

$$B_h[(\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)] = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) + (g, q_h), \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h \otimes Q_h. \quad (10)$$

注2 Stokes 方程的大多数稳定化方法<sup>[18-20]</sup>所加的稳定项的目的是克服 inf-sup 条件,而本文方程中所加的稳定项  $j(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  是为了使离散的 Korn 不等式成立.

引理 2.1 对于  $\forall \mathbf{v} \in Z_h$ , 有  $\nabla \cdot \mathbf{v}|_K = 0, \forall K \in \xi_h^1 \cup \xi_h^2$ .

证明  $\forall \mathbf{v} \in Z_h$ , 我们有

$$\sum_{K \in \xi_h^1 \cup \xi_h^2} \int_K \nabla \cdot \mathbf{v} dx = \sum_{e \in \Gamma_h^1 \cup \Gamma_h^2 \cup \Gamma} \int_e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = 0.$$

因此,  $\nabla \cdot \mathbf{v} \in Q_h$ . 取  $q = \nabla \cdot \mathbf{v}$ , 可得

$$0 = \sum_{K \in \xi_h^1 \cup \xi_h^2} \int_K |\nabla \cdot \mathbf{v}|^2 dx = \sum_{K \in \xi_h^1 \cup \xi_h^2} \text{meas}(K) |\nabla \cdot \mathbf{v}|_K^2,$$

因此引理得证.

## 3 稳定性

本节,将证明离散格式的 inf-sup 条件.

首先,我们定义如下范数:

$$\|(\mathbf{u}, p)\|_B^2 := a_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mu \|\nabla \cdot \mathbf{u}_2\|_{\Omega_2}^2 + \frac{1}{\mu} \|p\|_0^2.$$

定理 3.1 对  $\|(\mathbf{v}_h, q_h)\|_B \neq 0$ , 下列不等式成立:

$$\sup_{(\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h \otimes Q_h} \frac{B_h[(\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)]}{\|(\mathbf{v}_h, q_h)\|_B} \geq \beta \|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_B, \quad (11)$$

其中  $\beta$  为与网格直径大小无关的常数.

**证明** 我们将分两步证明本定理: 首先, 存在  $(\mathbf{w}_h, q_h) \in V_h \otimes Q_h$ , 使得下列不等式成立:

$$c \|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_B^2 \leq B_h[(\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{w}_h, q_h)]. \quad (12)$$

其次, 我们将证明

$$\|(\mathbf{w}_h, q_h)\|_B \geq c \|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_B. \quad (13)$$

第 1 步: 我们有

$$B_h[(\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{u}_h, p_h)] = a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h).$$

对于  $\forall p_h \in Q_h \subset L_0^2(\Omega)$ , 存在  $\mathbf{v}_p \in [H_0^1(\Omega)]^2$ , 使下列不等式成立:

$$-\nabla \cdot \mathbf{v}_p = p_h, \quad (14)$$

$$\|\mathbf{v}_p\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|p_h\|_0. \quad (15)$$

因为

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}_p, 1)_h = (\nabla \cdot R_h \mathbf{v}_p, 1)_h,$$

所以

$$B_h[(\mathbf{u}_h, p_h), \left(-\frac{R_h \mathbf{v}_p}{\mu}, 0\right)] = -\frac{1}{\mu} a_h(\mathbf{u}_h, R_h \mathbf{v}_p) - \frac{1}{\mu} j(\mathbf{u}_h, R_h \mathbf{v}_p) + \frac{1}{\mu} \|p_h\|_0^2.$$

进一步

$$-\frac{1}{\mu} j(\mathbf{u}_h, R_h \mathbf{v}_p) \leq \frac{\varepsilon_1}{2} j(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + \frac{1}{2\varepsilon_1 \mu^2} j(R_h \mathbf{v}_p, R_h \mathbf{v}_p). \quad (16)$$

由迹不等式

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(\partial K)}^2 \leq c(h_K^{-1} \|\mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2 + h_K \|\mathbf{v}\|_{[H^1(K)]^2}^2), \quad \forall \mathbf{v} \in [H^1(K)]^2, \quad (17)$$

(详细见参考文献[21]), 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu^2} j(R_h \mathbf{v}_p, R_h \mathbf{v}_p) &= \frac{1}{\mu^2} j(R_h \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_p, R_h \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_p) \leq \\ &\frac{c}{\mu} \sum_{K \in \xi_h^1 \cup \xi_h^2} \left( \frac{1}{h_K^2} \|R_h \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_p\|_{L^2(K)}^2 + \|R_h \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_p\|_{[H^1(K)]^2}^2 \right) \leq \\ &\frac{c}{\mu} \|\mathbf{v}_p\|_1^2 \leq \frac{C_p}{\mu} \|p_h\|_0^2. \end{aligned}$$

另有

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu} a_h(\mathbf{u}_h, R_h \mathbf{v}_p) &\leq \frac{\varepsilon_2}{2} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + \frac{1}{2\varepsilon_2 \mu^2} a_h(R_h \mathbf{v}_p, R_h \mathbf{v}_p) \leq \\ &\frac{\varepsilon_2}{2} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + \frac{C_\mu}{2\varepsilon_2 \mu} \|p_h\|_0^2. \end{aligned} \quad (18)$$

因此, 综上所述可得

$$\begin{aligned} \gamma B_h[(\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{u}_h, p_h)] + B_h[(\mathbf{u}_h, p_h), \left(-\frac{1}{\mu} R_h \mathbf{v}_p, 0\right)] &\geq \\ \left(\gamma - \frac{\varepsilon_2}{2}\right) a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + \left(\gamma - \frac{\varepsilon_1}{2}\right) j(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{C_p}{2\varepsilon_1} - \frac{C_u}{2\varepsilon_2}\right) \|p_h\|_0^2. \end{aligned}$$

如果取  $\varepsilon_1 = 2C_p$ ,  $\varepsilon_2 = 2C_\mu$ ,  $\gamma = \sum \varepsilon_i$ . 取  $\mathbf{w}_h = \gamma \mathbf{u}_h - R_h \mathbf{v}_p / \mu$ ,  $q_h = \gamma p_h + \mu \nabla \cdot \mathbf{u}_h^h$ , 很容易得到不等式(12).

第2步:同理,可立即得到

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{w}_h, q_h)\|_B &= \left\| \left( \gamma \mathbf{u}_h - \frac{1}{\mu} R_h \mathbf{v}_p, \gamma p_h + \mu \nabla \cdot \mathbf{u}_h \right) \right\|_B \leq \\ &\| \gamma(\mathbf{u}_h, p_h) \|_B + \left\| \left( \frac{1}{\mu} R_h \mathbf{v}_p, \mu \nabla \cdot \mathbf{u}_h \right) \right\|_B \leq c \|(\mathbf{u}_h, p_h)\|_B. \end{aligned}$$

## 4 收敛性

实际上,问题(10)等价于下列问题:求  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \otimes Q_h$ , 使得下列等式成立:

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + j(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b(\mathbf{v}_h, p_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad (19)$$

$$b(\mathbf{u}_h, q_h) = (g, q_h), \quad \forall q_h \in Q_h, \quad (20)$$

设  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_e$  为空间  $L^2(e)$  上的内积,则对  $\forall \mathbf{v}_h \in Z_h$ , 我们有

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) &= \sum_{K \in \xi_h^1} \int_K 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1^h) dx + \int_{\Omega_2} \mu \mathbf{k}^{-1} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2^h dx + \\ &\int_{\Gamma} \mu \mathbf{k}^{-1/2} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot (\mathbf{v}_1^h \cdot \boldsymbol{\tau}) ds = \\ &(\mathbf{f}_1, \mathbf{v}_1^h)_{\Omega_1} + \sum_{e \in \Gamma_h^1} \langle 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} - p_1 \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v}_h \rangle_e - \\ &\sum_{e \in \Gamma_h^2 \cup \Gamma} \langle p_2, \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rangle_e. \end{aligned}$$

由上式可得下列 Galerkin 正交关系式

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + j(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \\ &\sum_{e \in \Gamma_h^1} \langle 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} - p_1 \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v}_h \rangle_e - \sum_{e \in \Gamma_h^2 \cup \Gamma} \langle p_2, \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rangle_e, \end{aligned} \quad (21)$$

定义范数

$$\| \mathbf{u}_h \| := (a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + j(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h))^{1/2}, \quad (22)$$

下面我们的目的是估计  $\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|$ . 设  $\mathbf{e}_h := R_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ . 由(20)式,可得到

$$0 = b(\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}, q_h) = b(\mathbf{u}_h - R_h \mathbf{u}, q_h), \quad \forall q_h \in Q_h.$$

所以  $\mathbf{e}_h \in Z_h, \nabla \cdot \mathbf{e}_h|_K = 0, \forall K \in \xi_h^1 \cup \xi_h^2$ .

假定  $\mathbf{u}|_{\Omega_i} \in [H^2(\Omega_i)]^2, p|_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$  ( $i = 1, 2$ ), 则有下列两个结论.

**定理 4.1** 对速度误差我们有如下误差:

$$\begin{aligned} \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \| &\leq c(\mu^{1/2} h_1 \| \mathbf{u}_1 \|_{[H^2(\Omega_1)]^2} + \mu^{1/2} h_2 \| \mathbf{u}_2 \|_{[H^2(\Omega_2)]^2} + \\ &\mu^{-1/2} h_1 \| p_1 \|_{H^1(\Omega_1)} + \mu^{-1/2} h_2 \| p_2 \|_{H^1(\Omega_2)}). \end{aligned} \quad (23)$$

**证明** 设  $\pi_1$  是投影到分片常数空间的投影算子. 根据 Korn 不等式,有

$$\sum_{K \in \xi_h^1} \| \mathbf{v}_1^h \|_{1,K}^2 \leq c \left( \sum_{K \in \xi_h^1} \| \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1^h) \|_{0,K}^2 + j(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \right),$$

(详细见参考文献[22]), 根据 Galerkin 正交关系式(21), 我们有

$$\begin{aligned} c \| \mathbf{e}_h \|^2 &\leq a_h(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_h) + j(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_h) \leq |a_h(R_h \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{e}_h)| + |j(R_h \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{e}_h)| + \\ &\left| \sum_{e \in \Gamma_h^1} \langle 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} - p_1 \cdot \mathbf{n}, [\mathbf{e}_h] \rangle_e \right| + \left| \sum_{e \in \Gamma_h^2 \cup \Gamma} \langle p_2, [\mathbf{e}_h \cdot \mathbf{n}] \rangle_e \right| \leq \\ &\| \mathbf{u} - R_h \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{e}_h \| + \left| \sum_{e \in \Gamma_h^1} \langle 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \pi_1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1)) \cdot \mathbf{n}, [\mathbf{e}_h] \rangle_e \right| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{e \in \Gamma_h^1} \langle (p_1 - \pi_1 p_1) \cdot \mathbf{n}, [\mathbf{e}_h] \rangle_e \right| + \left| \sum_{e \in \Gamma_h^2 \cup \Gamma} \langle p_2 - \pi_1 p_2, [\mathbf{e}_h \cdot \mathbf{n}] \rangle_e \right| \leq \\
& \|\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{e}_h\| + \sum_{e \in \Gamma_h^1} \|2\mu^{1/2} h_e^{1/2} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \pi_1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1)) \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(e)} \|\mathbf{e}_h\| + \\
& \sum_{e \in \Gamma_h^1} \|\mu^{-1/2} h_e^{1/2} (p_1 - \pi_1 p_1)\|_{L^2(e)} \|\mathbf{e}_h\| + \\
& \sum_{e \in \Gamma_h^2 \cup \Gamma} \|\mu^{-1/2} h_e^{1/2} (p_2 - \pi_1 p_2)\|_{L^2(e)} \|\mathbf{e}_h\|, \tag{24}
\end{aligned}$$

由迹不等式(17)和(24)得

$$\begin{aligned}
& \sum_{e \in \Gamma_h^1} \|h_e^{1/2} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \pi_1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1)) \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(e)}^2 \leq c \sum_{K \in \xi_h^1} h_K^2 \|\mathbf{u}_1\|_{[H^2(K)]^2}^2, \\
& \sum_e \|h_e^{1/2} (p - \pi_1 p)\|_{L^2(e)}^2 \leq c \sum_K h_K^2 \|p\|_{H^1(K)}^2.
\end{aligned}$$

由上述两个不等式及(24)式很容易得到

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{e}_h\| & \leq c(\|\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}\| + \mu^{1/2} h_1 \|\mathbf{u}_1\|_{[H^2(\Omega_1)]^2} + \\
& \mu^{-1/2} h_1 \|p_1\|_{H^1(\Omega_1)} + \mu^{-1/2} h_2 \|p_2\|_{H^1(\Omega_2)}).
\end{aligned}$$

最后,由上式、三角不等式、迹不等式及  $R_h$  的插值理论<sup>[12]</sup>很容易得到式(23).

**定理 4.2** 对压力,我们有如下误差估计:

$$\begin{aligned}
\|p - p_h\| & \leq c(\mu h_1 \|\mathbf{u}_1\|_{[H^2(\Omega_1)]^2} + \mu h_2 \|\mathbf{u}_2\|_{[H^2(\Omega_2)]^2} + \\
& h_1 \|p_1\|_{H^1(\Omega_1)} + h_2 \|p_2\|_{H^1(\Omega_2)}).
\end{aligned}$$

**证明** 我们将误差分解成

$$\|p - p_h\|_0 \leq \|p - \pi_2 p\|_0 + \|\pi_2 p - p_h\|_0,$$

其中  $\pi_2 p$  是  $p$  在  $Q_h$  中的  $L^2$ -投影. 对于上式右端第 1 部分,有下列估计:

$$\|p - \pi_2 p\|_{0, \Omega_i} \leq ch_i \|p\|_{H^1(\Omega_i)}.$$

我们将估计第 2 部. 对于散度算子(详细见参考文献[23]),存在  $\mathbf{v}_p \in [H_0^1(\Omega)]^2$ , 使得  $\nabla \cdot \mathbf{v}_p = \pi_2 p - p_h$  且  $\|\mathbf{v}_p\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\pi_2 p - p_h\|_0$ . 由  $L^2$ -投影的正交性,得

$$\begin{aligned}
\|\pi_2 p - p_h\|_0^2 & = (\pi_2 p - p_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_p)_h = \\
& (\pi_2 p - p_h, \nabla \cdot R_h \mathbf{v}_p)_h = (p - p_h, \nabla \cdot R_h \mathbf{v}_p)_h = \\
& a_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, R_h \mathbf{v}_p) + j(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, R_h \mathbf{v}_p) - \\
& \sum_{e \in \Gamma_h^1} \langle 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} - p_1 \cdot \mathbf{n}, [R_h \mathbf{v}_p] \rangle_e - \sum_{e \in \Gamma_h^2 \cup \Gamma} \langle p_2, [R_h \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}] \rangle_e.
\end{aligned}$$

利用不等式(17)和(24),我们可得到

$$\begin{aligned}
& a_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, R_h \mathbf{v}_p) + j(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, R_h \mathbf{v}_p) - \\
& \sum_{e \in \Gamma_h^1} \langle 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} - p_1 \cdot \mathbf{n}, [R_h \mathbf{v}_p] \rangle_e + \sum_{e \in \Gamma_h^2 \cup \Gamma} \langle p_2, [R_h \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}] \rangle_e \leq \\
& c \left( \|\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}\|^2 + \sum_{e \in \Gamma_h^1} \mu \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \pi_1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1)\|_{L^2(e)}^2 + \right. \\
& \left. \sum_{e \in \Gamma_h^1} \mu^{-1} \|(p_1 - \pi_1 p_1) \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e \in \Gamma_h^2 \cup \Gamma} \mu^{-1} \|p_2 - \pi_1 p_2\|_{L^2(e)}^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}_p\| \leq \\
& c \left( \mu^{1/2} \|\mathbf{u} - R_h \mathbf{u}\|^2 + \sum_{e \in \Gamma_h^1} \mu \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \pi_1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1)\|_{L^2(e)}^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\sum_{e \in \Gamma_h^1 \cup \Gamma_h^2 \cup \Gamma} \|p - \pi_1 p\|_{L^2(e)}^2)^{1/2} \|\pi_2 p - p_h\|_0,$$

两边同时除以  $\|\pi_2 p - p_h\|_0$ , 很容易得到压力的误差估计.

### 5 数值算例

本节中,为了计算简便,选取  $\mu = \alpha = 1$ , 张量  $k$  为单位矩阵. 在下列数值算例中选取稳定项系数  $\gamma_s = 3, \gamma_d = 1$ .

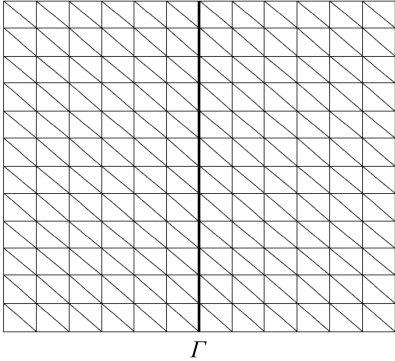


图2 计算网格剖分图

所举的算例为:整个区域为  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ , 在子区域  $\Omega_1 = [0,1/2] \times [0,1]$  上,为 Stokes 方程其解析解为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (\pi \sin^2 \pi x \sin 2\pi y, -\pi \sin^2 \pi y \sin 2\pi x), \\ p_1 &= -\sin \pi x + 1/\pi; \end{aligned}$$

在子区域  $\Omega_2 = [1/2,1] \times [0,1]$  上,为 Darcy 方程其解析解为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= (\pi \sin^2 \pi x \sin 2\pi y, \pi \sin \pi y), \\ p_2 &= -\sin \pi x + 1/\pi. \end{aligned}$$

这个例子不满足 Beavers-Joseph-Samman 条件,但是合理的,其满足下列形式:

$$2\mu \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{k}^{-1/2} \alpha \mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\tau} + g.$$

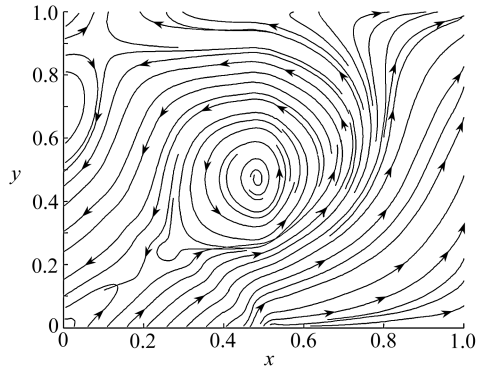
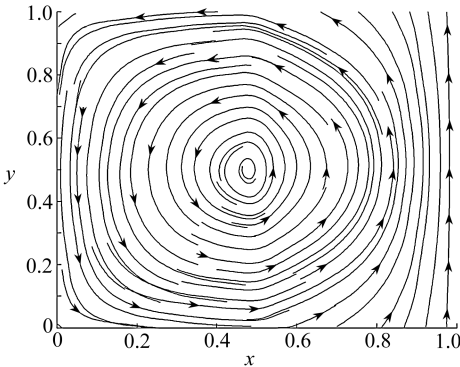


图3 有稳定项和没有稳定项所计算的速度流场图

表1 速度和压力在  $L^2$  范数下的误差估计

	$h$	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _0$	误差阶数 $\gamma_1$	$\ p - p_2\ _0$	误差阶数 $\gamma_2$
稳定性方法	1/4	0.448 4		1.108 5	
	1/8	0.130 5	1.780 7	0.456 5	1.279 9
	1/16	0.037 1	1.814 6	0.186 4	1.292 2
	1/32	0.009 8	1.920 6	0.085 6	1.122 7
Glerkin 有限元法	1/4	1.817 8		6.006 2	
	1/8	1.773 4	0.035 7	4.174 6	0.660 9
	1/16	1.780 5	-0.005 8	3.718 8	0.166 8
	1/32	1.783 0	-0.002 0	3.601 7	0.046 2



图 2 为数值算例的网格剖分图,从表 1 中可以看出,在  $L^2$  范数下,我们方法所计算的速度误差阶数为 2,压力的误差阶数为 1;而随着网格尺度趋向于 0,没有加稳定项的方法所计算的速度和压力的误差阶数也趋向于 0.

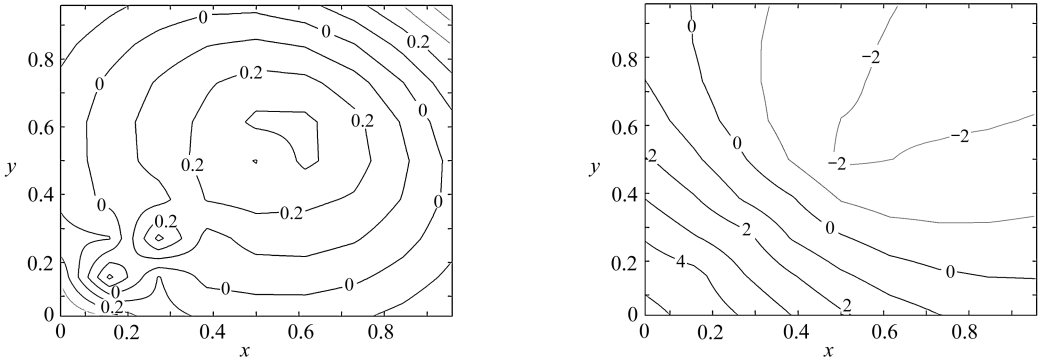


图 4 有稳定项和没有稳定项所计算的的压力流场图

### 参考文献:

- [1] Karper T, Mardal K A, Winther R. Unified finite element discretizations of coupled Darcy-Stokes flow[J]. *Numer Methods Partial Differential Equation*, 2008, **25**(2): 311-326.
- [2] Discacciati M, Quarteroni A. Analysis of a domain decomposition method for the coupling of Stokes and Darcy equations[C]//Brezzi F. *Numerical Analysis and Advanced Applications-Enumath 2001*, Milan: Springer, 2003: 3-20.
- [3] Discacciati M. *Domain Decomposition Method for the Coupling of Surface and Groundwater Flows*[D]. PhD thesis. École polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland, 2004.
- [4] Arbogast T, Brunson D S. A computational method for approximating a Darcy-Stokes system governing a vuggy porous medium[J]. *Computational Geosciences*, 2007, **11**(3): 207-218.
- [5] Layton W, Schieweck F, Yotov I. Coupling fluid flow with porous media flow[J]. *SIAM J Numer Anal*, 2002, **40**(6): 2195-2218.
- [6] Rivière B. Analysis of a discontinuous finite element method for the Stokes and Darcy problem[J]. *J Sci Comput*, 2005, **22**(1): 479-500.
- [7] Bauska I. The finite element method with Lamultiplier[J]. *Numer Math*, 1973, **20**(1): 179-192.
- [8] Brezzi F. On the existence, uniqueness, and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers[J]. *RAIRO Anal Numer*, 1974, **2**(8): 129-151.
- [9] Rivière B, Yotov I. Locally conservative coupling of Stokes and flows[J]. *SIAM J Numer Anal*, 2005, **42**(5): 1959-1977.
- [10] Urquiza J M, N' Dri D, Garon A, et al. Coupling Stokes and Darcy equations[J]. *Appl Numer Math*, 2008, **58**(5): 525-538.
- [11] Burman, Hansbo P. Stabilized Crouzeix-Raviart element for the Darcy- Stokes problem[J]. *Numer Methods Partial Differential*, 2005, **21**(5): 986-997.
- [12] Crouzeix, Raviart P A. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations[J]. *RAIRO Sér Roug*, 1973, **7**(3): 33-75.
- [13] Hansbo P, Larson M G. Discontinuous Galerkin and the Crouzeix-Raviart element: application to elasticity[J]. *E Math Mode Num Anal*, 2003, **37**(1): 63-72.

- [14] Hansbo P, Larson M G. Discontinuous Galerkin method for incompressible and nearly incompressible elasticity by Nitsche's method[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2002, **191** (17/18): 1895-1908.
- [15] Beavers G S, Joseph D D. Boundary conditions at a naturally impermeable wall[J]. *J Fluid Mech*, 2003, **30**(2): 197-207.
- [16] Jäger W, Mikelić A. On the interface boundary condition of Beavers, Joseph, and Saffman [J]. *SIAM J Appl Math*, 2000, **60**(14): 1111-1127.
- [17] Saffman P. On the boundary condition at the surface of a porous media[J]. *Stud Appl Math*, 1971, **50**(1): 292-315.
- [18] Brezzi F, Bristeau M O, Franca K L, et al. A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1992, **96**(1): 117-129.
- [19] Douglas J, Wang J. An absolutely stabilized finite element method for the Stokes problem [J]. *Math Comp*, 1989, **52**(186): 495-508.
- [20] ZHOU Tian-xiao, FENG Min-fu. A least squares Petrov-Galerkin finite element method for the stationary Navier-Stokes[J]. *Math Comp*, 1993, **60**(202): 531- 543.
- [21] Thomée V. *Galerkin Finite Element Method for Parabolic Problems*[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1997.
- [22] Brenner S. Korn's inequalities for piecewise  $H^1$  vector fields[J]. *Math Comp*, 2004, **73** (247): 1067-1087.
- [23] Girault V, Raviart P A. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

## Stabilized Crouzeix-Raviart Element for the Coupled Stokes and Darcy Problem

FENG Min-fu<sup>1</sup>, QI Rui-sheng<sup>1</sup>, ZHU Rui<sup>1</sup>, JU Bing-tao<sup>2</sup>

- (1. *Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P. R. China;*  
 2. *Infor Tech Dept, Cnooc Energy Technology and Services Limited Beijing Branch Company, Beijing 10027, P. R. China*)

**Abstract:** A new stabilized finite element method for the coupled Stokes and Darcy problem was introduced based on the nonconforming Crouzeix-Raviart element. Optimal error estimates for the fluid velocity and pressure were derived. Finally, a numerical example verifying the theoretical predictions was presented.

**Key words:** coupled problem; mass conservation; stabilized element method