

双层 Kidder 自相似解及其 Rayleigh-Taylor 不稳定性研究*

胡 军¹, 尹协远², 杭义洪¹, 张树道¹

(1. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088;

2. 中国科学技术大学 近代力学系, 合肥 230027)

(周哲玮推荐)

摘要: 将单层 Kidder 自相似解推广到双层, 使得两层壳体的交界面两侧存在密度跳跃, 使得轻流体向重流体加速产生 Rayleigh-Taylor 不稳定性; 通过采用 Lagrange 坐标下的 Godunov 方法进行一维直接数值模拟, 将模拟解与双层 Kidder 自相似基本解进行比较, 验证了双层 Kidder 自相似解的可靠性; 最后, 通过编制球形内爆的三维扰动的线性稳定性分析程序, 对双层 Kidder 自相似解的 Rayleigh-Taylor 不稳定性进行了分析计算. 计算结果表明: 初始扰动越集中于交界面, 会造成后期扰动增长得越快, 越不稳定; 扰动波数越大, 扰动增长得越快, 越不稳定; 从扰动在空间上的发展来看, 可压缩性研究表明内外壳体的可压缩性对扰动增长起着相反的作用, 外层壳体的可压缩性对 Rayleigh-Taylor 不稳定起失稳作用, 而内层壳体的可压缩性对 Rayleigh-Taylor 不稳定起致稳作用.

关键词: 双层 Kidder 自相似解; Rayleigh-Taylor 不稳定性; 内爆压缩

中图分类号: O354.9 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.04.003

引 言

惯性约束聚变(ICF)可以分成4个阶段:激光辐射、内爆压缩、聚变点火和聚变燃烧,其中的内爆压缩阶段会出现 Rayleigh-Taylor 不稳定性^[1-2]、Richtmyer-Meshkov 不稳定性^[3-4]和 Kelvin-Helmholtz 不稳定性^[5]的界面不稳定现象,如 RT 不稳定性发生在内爆的烧蚀阶段和压缩到心的阻滞阶段.这些流体力学不稳定性对内爆具有很大威胁,会导致不同物质混合,推进层破裂,甚至点火失败.因此研究内爆过程的 RT 不稳定性、RM 不稳定性和 KH 不稳定性具有重要的现实意义.

1976 年, Kidder^[6]提出了一种单层壳体的等熵压缩或膨胀的自相似基本流解析解; 2005 年, Breil 等^[7]则得到了 Kidder 自相似基本流的线性扰动解析解, 并采用直接数值模拟的方法

* 收稿日期: 2009-09-15; 修订日期: 2010-03-10

基金项目: 国家自然科学基金委员会-中国工程物理研究院“NSAF”联合基金资助项目(10676005; 10676004; 10676120); 国家自然科学基金资助项目(10702011); 中国工程物理研究院科学技术发展基金资助项目(2007B09001); 教育部留学归国人员科研启动基金资助项目

作者简介: 胡军(1978—), 男, 浙江温州人, 副研究员, 博士(联系人. Tel: +86-10-59872034; E-mail: hu_jun@iapcm.ac.cn).

对该扰动解析解进行验证,符合得非常一致. Kidder 的自相似基本解和 Breil 等人的线性扰动解析解非常适用于内爆的数值方法考察和内爆过程所出现失稳现象的研究.

为了研究内爆过程的 RT 不稳定性,我们将单层 Kidder 自相似解推广到双层,使得两层壳体的交界面两侧存在密度跳跃,使得轻流体向重流体加速产生 RT 不稳定性,这样得到的双层 Kidder 自相似解就可以用来研究内爆过程中的 RT 不稳定性现象. 值得注意的是,双层 Kidder 自相似解不存在激波等强间断现象,避免了 RM 不稳定性的出现,使得我们可以集中于 RT 不稳定性的研究.

本文后续主要分成 5 个部分,第 1 节全面回顾了单层 Kidder 自相似解析解;第 2 节将单层 Kidder 自相似解推广到双层;第 3 节采用 Lagrange 坐标下的 Godunov 方法进行一维直接数值模拟,将模拟解与双层 Kidder 自相似基本解进行比较;第 4 节用三维线性稳定性程序^[8]考察了双层 Kidder 自相似解的等熵内爆过程的 RT 不稳定性;最后第 5 节,我们对双层 Kidder 自相似解进行了总结,对今后的研究工作进行了展望.

1 单层 Kidder 自相似基本流解

基本流场为等熵压缩的单层壳体包有一初始静止的理想气体的一维流动(如图 1),假设壳体在空间上被各向同性均匀一致地压缩,也就是意味着每个壳体微元 $d^{\nu}x$ 存在相同的自相似压缩率 $h(t)$, 即

$$d^{\nu}x = h^{\nu}(t) d^{\nu}x_0, \quad (1)$$

这里, $d^{\nu}x_0$ 表示初始时刻的微元体积, $\nu = 1, 2, 3$ 则分别对应于平面、轴对称和球对称的情形. 这样,壳体微元在对称轴方向上的 Euler 坐标 $r(r_0, t)$ 可以表示成

$$r(r_0, t) = r_0 h(t), \quad (2)$$

$$u(r_0, t) = \dot{r} = r_0 \dot{h}(t), \quad (3)$$

这里, r_0 为 Lagrange 坐标, $u(r_0, t)$ 为壳体微元在轴对称方向上的运动速度.

在 Lagrange 坐标系下,设壳体的密度和压力分别为 $\rho(r_0, t)$ 和 $p(r_0, t)$;由质量守恒关系,壳体微元的质量 dm 可以写成

$$dm = \rho r^{\nu-1} dr = dm_0 = \rho_0 r_0^{\nu-1} dr_0. \quad (4)$$

由(2)式和(4)式,可以得到

$$\rho(r_0, t) = \rho_0(r_0) / h^{\nu}(t). \quad (5)$$

而将(4)式代入 Lagrange 质量坐标系下的动量方程^[4],得到

$$\dot{u} = -r^{\nu-1} \frac{dp}{dm} = -\frac{r^{\nu-1}}{\rho_0 r_0^{\nu-1}} \frac{dp}{dr_0}. \quad (6)$$

假设壳体微元满足理想气体状态方程,由于是等熵压缩过程,则

$$p(r_0, t) = a(r_0) \rho^{\gamma}(r_0, t) = \frac{p_0(r_0)}{h^{\nu\gamma}(t)}, \quad (7)$$

这里, γ 为压缩壳体的绝热系数. 进一步假设熵在壳体空间内是均匀分布的,我们有

$$\frac{da(r_0)}{dr_0} = 0 \Rightarrow a(r_0) = \text{const}. \quad (8)$$

最后,将(2)式、(3)式和(7)式代入动量方程(6),我们可以得到

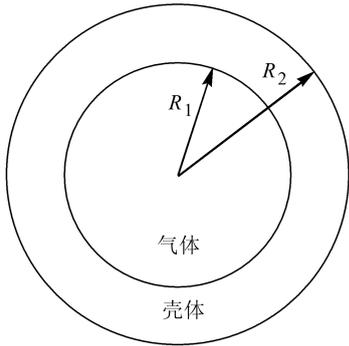


图 1 单层球壳或柱壳模型的示意图

$$h^{\nu\gamma-\nu+1} \ddot{h} = -\frac{1}{\rho_0 r_0} \frac{dp_0}{dr_0} = -\frac{1}{t_c^2} = \text{const}, \quad (9)$$

这里,上式两端分别是关于时间 t 和坐标 r_0 的函数,故而它们相等的话只能是常数,由于是等熵向内压缩,初始的压力梯度为正,因此常数为负值。

Kidder 发现:当 $\nu\gamma - \nu + 1 = 3$ 时,即绝热系数 $\gamma = 1 + 2/\nu$ 时,自相似压缩率 $h(t)$ 满足

$$h^3 \ddot{h} = -\frac{1}{t_c^2}, \quad (10)$$

而这个方程存在如下形式的一个特解:

$$h^2 = 1 - \tau^2, \quad \tau = t/t_c. \quad (11)$$

显然, $h(0) = 1, \dot{h}(0) = 0$ 和 $h(t_c) = 0; \dot{h}(0) = 0$ 表示初始流场速度为 0,而 $h(t_c) = 0$ 则表明在 $t = t_c$ 时壳体被压缩到球心。

进一步给定初始壳体的内外半径为 r_{10} 和 r_{20} (或写成 R_1 和 R_2),在等熵均匀压缩过程中的内外半径则表示为 r_1 和 r_2 . 将 $p_0 = \alpha\rho_0^\gamma$ 代入方程(9),我们可以得到

$$\alpha\gamma\rho_0^{\gamma-2} dp_0 = \frac{1}{t_c^2} r_0 dr_0, \quad (12)$$

显然,它的通解为

$$\frac{c_0^2}{\gamma - 1} = \frac{r_0^2}{2t_c^2} + B. \quad (13)$$

这里, $c_0^2 = \gamma p_0/\rho_0 = \alpha\gamma\rho_0^{\gamma-1}$ 是初始声速平方. 如果给定内外半径上的初始密度 ρ_{10}, ρ_{20} 和初始压力 p_{10}, p_{20} , 则有初始的声速 c_{10}, c_{20} , 则可以得到

$$t_c^2 = \frac{(\gamma - 1)(r_{20}^2 - r_{10}^2)}{2(c_{20}^2 - c_{10}^2)}, \quad B = \frac{c_{10}^2 r_{20}^2 - c_{20}^2 r_{10}^2}{(\gamma - 1)(r_{20}^2 - r_{10}^2)}. \quad (14)$$

由理想气体状态方程 $c^2 = \gamma(\gamma - 1)e$, 则还有

$$t_c^2 = \frac{r_{20}^2 - r_{10}^2}{2\gamma(e_{20} - e_{10})}.$$

那么

$$c_0^2 = \frac{c_{20}^2(r_0^2 - r_{10}^2) + c_{10}^2(r_{20}^2 - r_0^2)}{r_{20}^2 - r_{10}^2}. \quad (15)$$

由于均熵的特征 $c_0^2 = \alpha\gamma\rho_0^{\gamma-1}$, 则初始密度分布和压力分布可以由(15)式得到

$$\rho_0(r_0) = \left(\frac{\rho_{20}^{\gamma-1}(r_0^2 - r_{10}^2) + \rho_{10}^{\gamma-1}(r_{20}^2 - r_0^2)}{r_{20}^2 - r_{10}^2} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad (16)$$

$$p_0(r_0) = \left(\frac{p_{20}^{(\gamma-1)/\gamma}(r_0^2 - r_{10}^2) + p_{10}^{(\gamma-1)/\gamma}(r_{20}^2 - r_0^2)}{r_{20}^2 - r_{10}^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad (17)$$

于是,由初始条件(16)和(17),单层 Kidder 自相似基本流场就完全确定下来了,在 Lagrange 坐标系下,其形式为

$$\begin{cases} u(r_0, t) = \dot{r} = r_0 \dot{h}(t), & h^2 = 1 - \tau^2, \tau = t/t_c, \\ p(r_0, t) = \alpha\rho^\gamma(r_0, t) = \frac{p_0(r_0)}{h^{\nu\gamma}(t)}, \rho(r_0, t) = \frac{\rho_0(r_0)}{h^\nu(t)}. \end{cases} \quad (18)$$

而在 Euler 坐标系下,其形式为

$$\begin{cases} u(r,t) = -\frac{rt}{t_c^2 h^2(t)}, \\ p(r,t) = p_0(r/h(t))/h^{\nu\gamma}(t), \\ \rho(r,t) = \rho_0(r/h(t))/h^\nu(t). \end{cases} \quad (19)$$

为了后续的方便,初始时壳体的内外边界上的密度和压力 $\rho_{10}, \rho_{20}, p_{10}$ 和 p_{20} 被简写为 ρ_1, ρ_2, p_1 和 p_2 , 同时 Lagrange 坐标 r_0 则改写成 R , 这样初始时壳体内外边界为 R_1 和 R_2 , 而 $r_1 = r(R_1, t)$ 和 $r_2 = r(R_2, t)$ 为在不同时刻时壳体内外边界的 Euler 坐标. 这样, Kidder 自相似解的初始条件改写为

$$\begin{cases} \rho(R,0) = \left(\frac{\rho_2^{\gamma-1}(R^2 - R_1^2) + \rho_1^{\gamma-1}(R_2^2 - R^2)}{R_2^2 - R_1^2} \right)^{1/(\gamma-1)}, \\ u(R,0) = 0, \\ p(R,0) = p_2 \left(\frac{\rho}{\rho_2} \right)^\gamma, \end{cases} \quad (20)$$

这里, $\gamma = 1 + 2/\nu$ 是绝热指数, $\nu = 1, 2, 3$ 分别对应于平面、轴对称和球对称.

2 双层 Kidder 自相似基本流解

以球对称的理想气体等熵压缩的内爆过程为例, 我们继续研究双层 Kidder 自相似基本流解. 首先, 对于球对称的情形 $\nu = 3$, 则绝热系数 $\gamma = 5/3$, 则单层球壳的 Kidder 自相似解是以 $r(R, t) = Rh(t)$ 为自相似率, 以(20)式为初始条件, 以 $p(r_1, t) = p_1/h^{3\gamma}(t)$ 和 $p(r_2, t) = p_2/h^{3\gamma}(t)$ 为压力边界条件的解析解, 形式如下:

$$u(r,t) = -\frac{rt}{t_c^2 h^2(t)}, \quad \rho(r,t) = \frac{1}{h^3(t)} \rho\left(\frac{r}{h(t)}, 0\right), \quad p(r,t) = p_2 \left(\frac{\rho(r,t)}{\rho_2}\right)^\gamma,$$

这里

$$h(t) = \sqrt{1 - (t/t_c)^2}, \quad t_c^2 = \frac{(\gamma - 1)(R_2^2 - R_1^2)}{2(c_2^2 - c_1^2)},$$

c_1 和 c_2 为内外球壳处的初始时刻的声速.

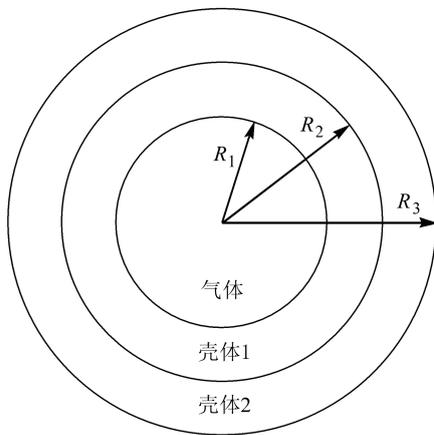


图2 双层球壳模型的示意图

将单层 Kidder 自相似解推广到双层(如图2), 需要满足如下两个基本条件:

- 双层壳体具有相同的自相似率, 即压缩到球心的时间 t_c 相同:

$$\frac{R_2^2 - R_1^2}{c_{2-}^2 - c_1^2} = \frac{R_3^2 - R_2^2}{c_3^2 - c_{2+}^2}; \quad (21)$$

- 保持双层壳体界面处压力的连续性:

$$p_2^- = p_2^+ = p_2; \quad (22)$$

这里, R_1 和 R_3 为双壳体的初始内外边界, 中间界面为 $r_2 = r(R_2, t) = R_2 h(t)$, 它将两种物质分隔开来. $-$ 表示交界面内侧, $+$ 表示交界面外侧.

根据以上两个基本条件, 就可以建立双层 Kidder 自相似解了. 设界面两侧的密度比为 $\chi = \rho_2^-/\rho_2^+$, 由压

力的连续性条件(22), 有

$$\chi = c_{2+}^2 / c_{2-}^2, \quad (23)$$

$$\chi = \left(\frac{a_0}{a_i} \right)^{1/\gamma} = \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^{1/\gamma} \frac{\rho_1}{\rho_3}, \quad (24)$$

这里

$$c_{2+}^2 = \gamma p_2 / \rho_2^+, \quad c_{2-}^2 = \gamma p_2 / \rho_2^-, \quad (25)$$

$$a_0 = p_3 / \rho_3^\gamma = p_2 / (\rho_2^+)^{\gamma}, \quad a_i = p_1 / \rho_1^\gamma = p_2 / (\rho_2^-)^{\gamma}. \quad (26)$$

于是,当给定初始内外边界上的压力 (p_1, p_3) 和密度 (ρ_1, ρ_3) 时,可以计算相应的初始声速 (c_1, c_3),而由(24)式和(26)式可以得到双壳体界面两侧的密度比 χ 和内外等熵壳体的 a_i 和 a_0 ;进一步,给定 R_1, R_2 和 R_3 时,联立(21)式和(23)式就可以计算得到界面两侧的声速 (c_{2+}, c_{2-}),这样就可以最终确定界面两侧对应的密度值和其上的压力值,计算关系式为

$$\rho_2^+ = \left(\frac{c_{2+}^2}{\gamma a_0} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad \rho_2^- = \left(\frac{c_{2-}^2}{\gamma a_i} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad p_2 = a_0 (\rho_2^+)^{\gamma}. \quad (27)$$

这样,双层 Kidder 自相似基本解就建立起来了,每个壳体的动力学过程(对于内爆是压缩过程)将按照单层 Kidder 自相似基本解进行。

显然,双层 Kidder 自相似基本解满足在两壳体交界面处是一个接触间断,使得熵可以在通过中间界面时发生跳跃,而在中间界面两侧的空间里,熵保持均匀分布。但是,注意到双层 Kidder 自相似解可以使得中间界面处的密度跳跃。特别地,当内部壳体的密度大于外部壳体时,即需要满足

$$\chi = \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^{1/\gamma} \frac{\rho_1}{\rho_3} > 1, \quad (28)$$

等熵压缩使得轻流体向重流体加速,因此物理上会产生界面的 Rayleigh-Taylor 不稳定性现象。可见,我们所建立的双层 Kidder 自相似解模型可以非常适用于内爆过程中的 RT 不稳定性的理论研究(见第 4 节)。

3 基本流解与数值模拟的比较

以理想气体等熵压缩的球形内爆过程为例,对给定满足双层 Kidder 自相似解的初始条件和边界条件,采用 Lagrange 坐标下的 Godunov 方法进行一维直接数值模拟^[8-9],将模拟解与双层 Kidder 自相似基本解进行比较,验证双层 Kidder 自相似解的真实性,反过来也考察数值方法的精度和收敛性。

1) 基本控制方程

Lagrange 坐标下,理想气体球形内爆的一维 Euler 方程可以写成如下守恒形式^[10]:

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_m (\mathbf{A}\mathbf{F}) = \mathbf{S}, \quad (29)$$

$$\partial_t r = u_r, \quad (30)$$

这里

$$\mathbf{U} = (\tau, u_r, e)^T, \quad \mathbf{F} = \left(l\boldsymbol{\Psi}, -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Psi}, l\boldsymbol{\Psi}) \right)^T, \quad \boldsymbol{\Psi} = (p, -u_r)^T,$$

$$\mathbf{S} = (0, p\partial_m r^2, 0)^T, \quad \mathbf{A} = r^2, \quad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

其中, τ, u_r, p 和 $\varepsilon = p\tau / (\gamma - 1)$ 分别为理想气体的比容、径向速度、压力和比内能, $e = \varepsilon + u_r^2 / 2$ 为理想气体的总比能, r 和 m 分别为物质坐标和质量坐标, γ 为比热比。

2) Lagrange 网格离散

一维计算区域 $[R_{\min}, R_{\max}]$ 被分成 N 个网格 $I_j = [R_{j-1/2}, R_{j+1/2}]$, 其中 $R_{1/2} = R_{\min}, R_{N+1/2} = R_{\max}$, 这样质量坐标被表示成

$$\begin{cases} m_{1/2} = 0, \\ m_{j+1/2} = m_{j-1/2} + \Delta m_j, \end{cases} \quad (31)$$

这里

$$\Delta m_j = \int_{R_{j-1/2}}^{R_{j+1/2}} \rho_0 A dr,$$

它可以进一步离散成

$$\Delta m_j = \rho_0 \frac{R_{j-1/2}^2 + R_{j-1/2}R_{j+1/2} + R_{j+1/2}^2}{3} \Delta R_j. \quad (32)$$

3) 一阶显式 Godunov 格式

定义每一个网格上的物理量的近似平均值为

$$\mathbf{U}_j^n = \frac{1}{\Delta m_j} \int_{m_{j-1/2}}^{m_{j+1/2}} \mathbf{U}(m, t^n) dm, \quad (33)$$

则显式 Godunov 格式写成一般形式为

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_j} (A_{j+1/2}^n \mathbf{F}(\mathbf{U})_{j+1/2}^n - A_{j-1/2}^n \mathbf{F}(\mathbf{U})_{j-1/2}^n) + \Delta t \mathbf{S}_j^n. \quad (34)$$

• 数值通量 $\mathbf{F}(\mathbf{U})_{j+1/2}^n$:

关键是确定 $\Psi_{j+1/2}^* = (p_{j+1/2}^*, -u_{j+1/2}^*)$, 这里 u_r 简写为 u . 由线性 Riemann 不变量, 沿特征线 C_{\pm} : $dm = \pm(\rho c) dt$, 我们有 $dp \pm(\rho c) du = 0$, 这样沿着这两条曲线积分就有

$$\begin{cases} (p_{j+1/2}^* - p_j) + (\rho c)_j (u_{j+1/2}^* - u_j) = 0, \\ (p_{j+1/2}^* - p_{j+1}) - (\rho c)_{j+1} (u_{j+1/2}^* - u_{j+1}) = 0, \end{cases} \quad (35)$$

可以得到

$$\begin{cases} p_{j+1/2}^* = \frac{(\rho c)_j p_{j+1} + (\rho c)_{j+1} p_j}{(\rho c)_j + (\rho c)_{j+1}} + \frac{(\rho c)_j (\rho c)_{j+1}}{(\rho c)_j + (\rho c)_{j+1}} (u_j - u_{j+1}), \\ u_{j+1/2}^* = \frac{(\rho c)_j u_j + (\rho c)_{j+1} u_{j+1}}{(\rho c)_j + (\rho c)_{j+1}} + \frac{1}{(\rho c)_j + (\rho c)_{j+1}} (p_j - p_{j+1}), \end{cases} \quad (36)$$

这里, 对于理想气体 $c^2 = \gamma p / \rho$, 则 $\rho c = \sqrt{\gamma p / \tau}$.

• 一维流体质点位置的确定:

$$r_{j+1/2}^{n+1} = r_{j+1/2}^n + u_{j+1/2}^* \cdot \Delta t. \quad (37)$$

• 几何参数 $A_{j+1/2}^n$:

在 Lagrange 坐标下, 对于每个时间层上的离散必须保证质量守恒, 即要求

$$\rho_j^{n+1} (V_{j+1/2} - V_{j-1/2})^{n+1} = \rho_j^n (V_{j+1/2} - V_{j-1/2})^n \quad (38)$$

得到满足. Jaouen^[8] 已经证明, 当几何参数的离散格式选择如下形式时,

$$A_{j+1/2}^n = \frac{(r_{j+1/2}^{n+1})^2 + r_{j+1/2}^{n+1} r_{j+1/2}^n + (r_{j+1/2}^n)^2}{3}, \quad (39)$$

可以使得质量守恒的离散形式 (38) 式得到满足.

• 几何源项 \mathbf{S}_j^n :

$$\mathbf{S}_j^n = \left(0, \frac{p_{j+1/2}^* + p_{j-1/2}^*}{2} \frac{A_{j+1/2}^n - A_{j-1/2}^n}{\Delta m_j}, 0 \right)^T. \quad (40)$$

• CFL 条件:

$$A_j \max_j (\rho c)_j \frac{\Delta t}{\Delta m_j} \leq 1. \quad (41)$$

4) 二阶显式 Godunov 格式

一阶 Godunov 格式采用的是分段常数函数,二阶 Godunov 格式则采用的是分段线性函数,其形式如下:

$$\mathbf{U}^n(x) = \mathbf{U}_j^n + \delta \mathbf{U}_j \frac{x - x_j}{\Delta x}, \quad (42)$$

对 $\delta \mathbf{U}_j$ 进行单调性处理,常用的有

$$\delta \mathbf{U}_j = \min \text{mod}(\Delta \mathbf{U}_{j+1/2}, \Delta \mathbf{U}_{j-1/2}), \quad (43)$$

这就构成了 MUSCL 格式.

5) 数值验证

计算采用 $R_1 = 0.8, R_2 = 0.9$ 和 $R_3 = 1.0$, 内外边界上的密度和压力分别为 $\rho_1 = 0.0001, p_1 = 10^6$ 和 $\rho_3 = 0.0008, p_3 = 10^8$, 在球形 Kidder 自相似解中,必须采用绝热系数 $\chi = 5/3$. 根据密度的关系式(24),密度比不依赖于接触界面的位置,计算可以确定交界面两侧流体的密度比约为 $\chi \approx 1.981$,联立(21)式和(23)式,可以计算得到接触间断界面两侧的声速后,最后由(25)~(27)式得到内外两侧的密度约为 $\rho_2^- \approx 0.000921$ 和 $\rho_2^+ \approx 0.000465$,以及压力为 $p_2 \approx 4.0484 \times 10^7$.

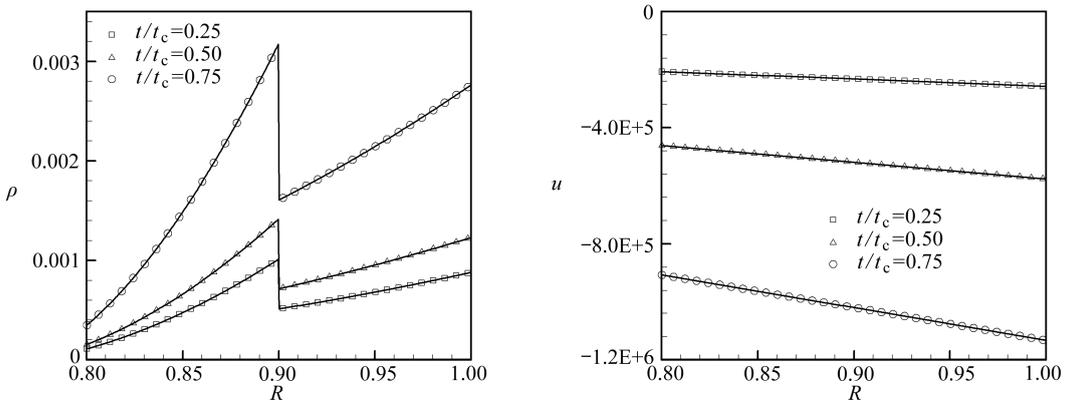


图3 双层 Kidder 自相似解在不同时刻的密度分布和速度分布,数值解与解析解的比较

(标记符号表示不同时刻的数值解,实线表示为解析解,数值模拟采用了 400 个网格)

将双层壳体两侧密度和压力的初始条件设为 Kidder 自相似解的初始条件(20),同时采用 $p(r_1, t) = p_1/h^5(t)$ 和 $p(r_3, t) = p_3/h^5(t)$ 作为压力边界条件,这样就确定了一个双层球壳带接触间断的 Kidder 自相似解.图3给出了该自相似解在不同时刻的密度分布和速度分布,从图中可以看出任意时刻界面两侧的密度比都保持为 1.981,并且轻流体是向重流体加速的,将会产生 Rayleigh-Taylor 不稳定.我们将以此为模型研究多层壳体的等熵内爆过程中的 Rayleigh-Taylor 不稳定性特征.

4 Rayleigh-Taylor 不稳定性的计算与分析

在三维 Lagrange 球坐标下,对守恒变量 $\mathbf{U} = (\tau, u_r, e)^T$ 和 Lagrange 物质球坐标 $\boldsymbol{\xi} = (r, \theta, \phi)^T$ 进行小扰动展开,形式如下:

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \mathbf{U}^0 + \varepsilon \mathbf{U}^1 + \dots, \\ \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^0 + \varepsilon \boldsymbol{\xi}^1 + \dots, \end{cases} \quad (44)$$

这里, $\mathbf{U}^0 = (\tau^0, u_r^0, e^0)^\top$, $\boldsymbol{\xi}^0 = (r^0, \theta^0, \varphi^0)^\top$ 为一维基本流场的状态量和 Lagrange 物质球坐标, 简单地说就是 $(\mathbf{U}^0, \boldsymbol{\xi}^0)$ 构成了(29)式和(30)式的一维基本流场解, 而 $(\mathbf{U}^1, \boldsymbol{\xi}^1)$ 为该基本解的一阶扰动解. 同时还注意到 Lagrange 球坐标由基本流场物质坐标的初始位置 $\boldsymbol{\xi}_0^0 = (r_0^0, \theta_0^0, \varphi_0^0)^\top = (R, \Theta, \Phi)^\top$ 给定.

Jaouen^[8]在上述小扰动展开的基础上, 推导了一维基本流的三维小扰动线性化方程, 其形式为

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U}^1 + \frac{\rho_0^1}{\rho_0^0} \partial_t \mathbf{U}^0 + \partial_m \mathbf{F}^1 + \Lambda^1 \partial_m \mathbf{F}^0 = \boldsymbol{\Sigma}, \\ \partial_t r^1 = u_r^1, \\ \partial_t \Lambda^1 = \Omega^1, \\ \partial_t ((r^0)^2 \Omega^1) = -\tau^0 \Delta_\perp p^1 + (r^0)^2 \partial_m p^0 \cdot \Delta_\perp r^1, \end{cases} \quad (45)$$

这里, 需要强调的是上标 0 表示基本流, 上标 1 表示扰动流, 存在下标 0 表示初始条件. 定义 $\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{F}$, 而算子 Δ_\perp 的定义为

$$\Delta_\perp \lambda = \frac{1}{\sin \Theta} \left(\partial_\theta (\sin \Theta \partial_\theta \lambda) + \frac{1}{\sin \Theta} \partial_\phi^2 \lambda \right). \quad (46)$$

扰动标量 Λ^1 和 Ω^1 的定义为

$$\begin{cases} \Lambda^1 = \nabla_\perp \cdot (r^0 \theta^1, r^0 \sin \Theta \phi^1)^\top, \\ \Omega^1 = \partial_t \Lambda^1 = \nabla_\perp \cdot (u_\theta^1, u_\phi^1)^\top, \end{cases} \quad (47)$$

这里

$$\nabla_\perp \cdot (f_\theta, f_\phi)^\top = \frac{1}{r^0 \sin \Theta} (\partial_\theta (f_\theta \sin \Theta) + \partial_\phi f_\phi).$$

源项向量 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的表达式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= \mathbf{S}^0 \Lambda^1 + \mathbf{S}^1 + (\tau^0 \Omega^1, 0, -\tau^0 p^0 \Omega^1)^\top, \\ \mathbf{S} &= (0, p \partial_m r^2, 0)^\top. \end{aligned}$$

对小扰动采用正则模展开, 形式如下:

$$f^1(t; R, \Theta, \Phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \tilde{f}_{l,m}(t; R) P_{l,m}(\Theta, \Phi), \quad (48)$$

这里

$$\Delta_\perp P_{l,m} = -l(l+1) P_{l,m}. \quad (49)$$

将正则模展开(48)式代入一阶小扰动方程(45), 可以得到三维线性稳定性方程

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\mathbf{U}} + \frac{\tilde{\rho}_0}{\rho_0} \partial_t \mathbf{U} + \partial_m (\mathbf{A} \tilde{\mathbf{F}} + \tilde{\Lambda} \mathbf{F}) + \tilde{\Lambda} \partial_m (\mathbf{A} \tilde{\mathbf{F}}) = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}, \\ \partial_t \tilde{r} = \tilde{u}_r, \\ \partial_t \tilde{\Lambda} = \tilde{\Omega}, \\ \partial_t (\mathbf{A} \tilde{\Omega}) = \omega (\tau \tilde{\rho} - \mathbf{A} \partial_m p \cdot \tilde{r}), \end{cases} \quad (50)$$

这里, $\omega = l(l+1)$, l 为球波数, 此外没有波浪号 \sim 的量均为基本流(省略了上标 0), 扰动源项 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ 的表达式为

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma} &= S\tilde{A} + \tilde{S} + (\tau\tilde{\Omega}, 0, -\tau\rho\tilde{\Omega})^T, \\ \tilde{S} &= (0, \bar{p}\partial_m A + p\partial_m \bar{A}, 0)^T.\end{aligned}\quad (51)$$

显然, 三维线性稳定性方程(50)是一个带源项的双曲守恒律方程, 可以采用第3节同样的 Godunov 方法. 不同的是, 基于强源项对数值稳定性的影响, 对源项采用隐式格式, 具体算法可参见文献[8]. 我们编制了球形内爆的三维扰动的线性稳定性分析程序, 对第3节末建立的双层 Kidder 自相似解模型的 Rayleigh-Taylor 不稳定性进行了分析计算.

我们以接触间断界面为中心, 初始的扰动径向(物质)坐标采用小扰动 Gauss 分布, 其形式如下:

$$\tilde{r}(R, 0) = \exp(-b | R - R_2 |^2), \quad (52)$$

计算了扰动径向坐标在 Rayleigh-Taylor 不稳定影响下随时间的增长情况.

从图4中我们可以看出初始界面扰动的变化比较缓慢, 并有所减少, 随着时间增长到后期, 扰动迅速增大. 我们还发现, 随着 b 的增大, 由于初始扰动越集中于交界面, 造成后期扰动增长得越快, 越不稳定. 在图5中, 固定初始扰动使得 $b = 1\,000$, 考察了不同的球波数对界面扰动的影响, 发现球波数 l 越大, 扰动随时间增长得越快, 这与无粘 Rayleigh-Taylor 不稳定性理论相一致.

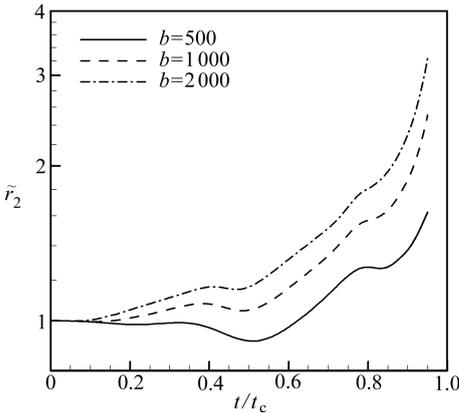


图4 双层 Kidder 自相似解的 Rayleigh-Taylor 不稳定界面扰动随时间增长曲线(其中界面扰动 $\tilde{r}_2 = \tilde{r}(R_2, t)$, 球波数 $l = 8$, $\rho_1 = 0.000\,1$, $p_1 = 10^6$, $\rho_3 = 0.000\,8$, $p_3 = 10^8$, $\chi \approx 1.981$)

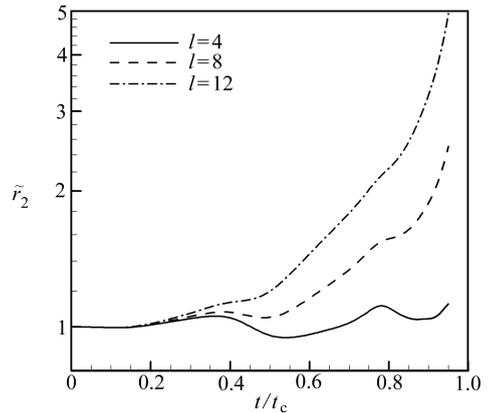


图5 双层 Kidder 自相似解的 Rayleigh-Taylor 不稳定界面扰动随时间增长曲线(其中界面扰动 $\tilde{r}_2 = \tilde{r}(R_2, t)$, 参数 $b = 1\,000$, $\rho_1 = 0.000\,1$, $p_1 = 10^6$, $\rho_3 = 0.000\,8$, $p_3 = 10^8$, $\chi \approx 1.981$)

可压缩效应研究

一般认为有两个物理参数用来表征理想可压缩气体的可压缩性, 一个是交界面上的平衡压力 p_∞ , 另一个是交界面两侧流体的比热比 γ . 当平衡压力 p_∞ 和流体的比热比 γ 越大时, 可压缩流体的可压缩性越小. 对单界面的静止理想气体($p = \rho RT$) 的平面 Rayleigh-Taylor 不稳定的可压缩性研究表明^[11]: 当平衡压力 p_∞ 不变而流体的比热比 γ 越大(越不可压)时, 不稳定的时间增长率减小, 并趋于不可压流体密度指数分层时的增长率, 此时流动的可压缩性对流动起不稳定的作用; 当流体的比热比 γ 不变而平衡压力 p_∞ 越大(越不可压)时, 不稳定的时间增长率增大, 并趋于不可压流体密度均匀分层时的增长率, 此时流动的可压缩性对流动则起稳定的作用. 在同样的粘性和边界效应下, 理想可压缩流体的增长率被夹在不可压流体密度均匀分层和

指数分层的增长率之间,表征流体可压缩性的平衡压力 p_∞ 和流体的比热比 γ 对流动稳定性起这相反的作用,可见引起流体可压缩性变化的因素才决定着 Rayleigh-Taylor 不稳定的强弱.

在我们所得到的双层 Kidder 自相似解中,要求比热比 $\gamma = 5/3$, 因此只有通过改变平衡压力来研究可压缩性对双层 Kidder 自相似解的 Rayleigh-Taylor 不稳定性影响. 首先我们保持初始密度分布不变,这就保证了内外界面的密度比保持不变,然后再同比例放大(或缩小)内外边界上的压力,这样整个双层壳体空间内的压力和声速平方得到同比例放大(或缩小),由等熵关系得知这将会同比例减小(或增大)内外壳体的可压缩性,而由(14)式可以发现这将会同比例减小(或增大)参考时间 t_c^2 .

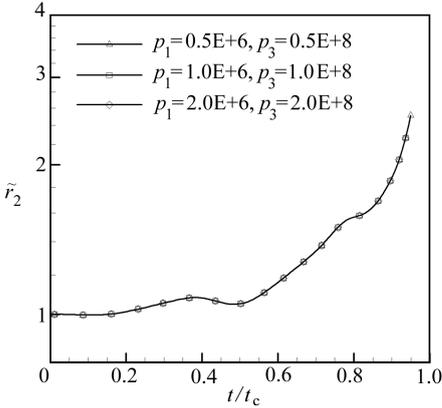


图 6 双层 Kidder 自相似解的 Rayleigh-Taylor 不稳定界面扰动随时间增长曲线(其中界面扰动 $\tilde{r}_2 = \tilde{r}(R_2, t)$, 参数 $b = 1\,000$, 球波数 $l = 8, \rho_1 = 0.000\,1, \rho_3 = 0.000\,8$, $\chi \approx 1.981$)

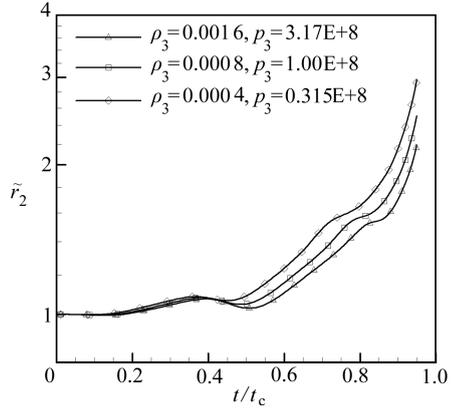


图 7 双层 Kidder 自相似解的 Rayleigh-Taylor 不稳定界面扰动随时间增长曲线(其中界面扰动 $\tilde{r}_2 = \tilde{r}(R_2, t)$, 参数 $b = 1\,000$, 球波数 $l = 8, \rho_1 = 0.000\,1, p_1 = 10^6$, $\chi \approx 1.981$)

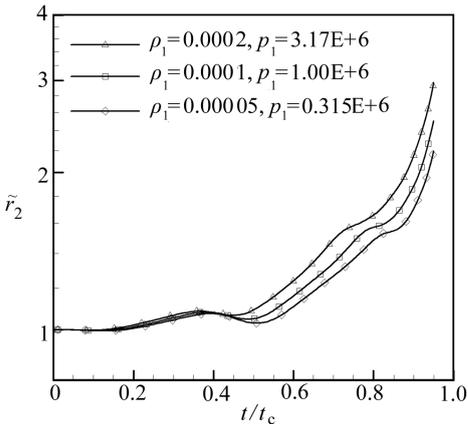


图 8 双层 Kidder 自相似解的 Rayleigh-Taylor 不稳定界面扰动随时间增长曲线(其中界面扰动 $\tilde{r}_2 = \tilde{r}(R_2, t)$, 参数 $b = 1\,000$, 球波数 $l = 8, \rho_3 = 0.000\,8, p_3 = 10^8$, $\chi \approx 1.981$)

图 6 画出了内外边界上的压力放大 1 倍和缩小 1 倍时的 Rayleigh-Taylor 不稳定界面扰动随时间增长曲线,可以很容易地发现曲线是相互重合的,但是我们注意到压力放大 1 倍和缩小 1 倍会导致参考时间 t_c^2 缩小 1 倍和放大 1 倍.从扰动时间增长率的角度来看,压力的增大导致同样扰动的增长需要较小的时间(加速度大),因而具有较大的扰动时间增长率,而压力的增大使得壳体的可压缩性减小,因此流体的可压缩性对流动则起稳定的作用(时间增长率角度看),即可压缩性越大,越稳定.这与静止理想气体的平面 Rayleigh-Taylor 不稳定的可压缩性研究结果相一致.如果从空间位置的角度来看,界面运动到相同的位置将得到相同的扰动增长,因此从扰动在空间上的发展来看可压缩性对扰动增长没有影响.

从扰动在空间上的发展来看,同时同比例增

加或减少内外壳体的可压缩性对扰动增长没有影响,这反映出如果只是单独改变内外壳体的可压缩性,内外壳体的可压缩性对扰动增长起着相反的作用。如图 7 所示,单独增大外层壳体的可压缩性会使得在空间上的扰动发展增强,这时的可压缩性对 Rayleigh-Taylor 不稳定起失稳作用;而如图 8 所示,单独增大内层壳体的可压缩性会使得在空间上的扰动发展减小,这时的可压缩性则对 Rayleigh-Taylor 不稳定起致稳作用。

5 结 论

本文给出了一个研究等熵内爆过程中 Rayleigh-Taylor 不稳定性的理论模型:将单层 Kidder 自相似解推广到双层,使得两层壳体的交界面两侧存在密度跳跃,使得轻流体向重流体加速产生 Rayleigh-Taylor 不稳定性。该双层 Kidder 自相似解的理论模型构造简单,可以很方便地用来研究等熵内爆过程中的 Rayleigh-Taylor 不稳定性,而无须考虑内爆过程中的其他失稳机制,如 Richtmyer-Meshkov 不稳定性和 Kelvin-Helmholtz 不稳定性。

通过编制球形内爆的三维扰动的线性稳定性分析程序,对双层 Kidder 自相似解的 Rayleigh-Taylor 不稳定性进行了分析计算,结果表明初始扰动越集中于交界面,会造成后期扰动增长得越快,越不稳定;扰动波数越大,扰动增长得越快,越不稳定。从扰动在空间上的发展来看,即界面运动到相同的位置将得到的扰动增长情况来看,可压缩性研究表明外层壳体的可压缩性对流动则起失稳的作用,而内层壳体的可压缩性对流动则起致稳的作用。

通过双层 Kidder 自相似解的构造,可以发现单层 Kidder 自相似解还可以推广出任意多层的 Kidder 自相似解,形成多个交界面的等熵内爆过程的自相似解,这就为多界面的 Rayleigh-Taylor 不稳定性的研究提供了理论模型,这将是今后一个很好的研究方向。

参考文献:

- [1] Rayleigh L. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density[J]. *Proc London Math Soc*, 1883, **14**(1):170-177.
- [2] Taylor G I. The instability of liquid surface when accelerated in a direction perpendicular to their planes[J]. *Proc R Soc London, Ser A*, 1950, **201**: 192-196.
- [3] Richtmyer R D. Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids[J]. *Commun Pure Appl Math*, 1960, **13**(2): 297-319.
- [4] Meshkov E E. Instability of the interface of two gases accelerated by a shock wave[J]. *Sov Fluid Dyn*, 1969, **4**(5): 151-157.
- [5] Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*[M]. London: Oxford University Press, 1961.
- [6] Kidder R E. Laser-driven compression of hollow shells: power requirements and stability limitations[J]. *Nuclear Fusion*, 1976, **16**(1): 3-14.
- [7] Breil J, Hallo L, Maire P H, et al. Hydrodynamic instabilities in axisymmetric geometry self-similar models and numerical simulations[J]. *Laser and Particle Beams*, 2005, **23**(2): 155-160.
- [8] Jaouen S. A purely Lagrangian method for computing linearly-perturbed flows in spherical geometry[J]. *Journal of Computational Physics*, 2007, **225**(1): 464-490.
- [9] 水鸿寿. 一维流体力学差分方法[M]. 北京:国防工业出版社,1998.
- [10] Després B. Lagrangian systems of conservation laws—Invariance properties of Lagrangian systems of conservation laws, approximate Riemann solvers and the entropy condition[J].

Numer Math, 2001, **89**(1): 99-134.

- [11] Livescu D. Compressible effects on the Rayleigh-Taylor instability growth between immiscible fluids[J]. *Phys Fluids*, 2004, **16**(1): 118-127.

Linear Rayleigh-Taylor Instability Analysis of a Double-Shell Kidder's Self-Similar Implosion

HU Jun¹, YIN Xie-yuan², HANG Yi-hong¹, ZHANG Shu-dao¹

(1. *Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, P. R. China;*

2. *Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, P. R. China*)

Abstract: By generalizing the single-shell Kidder's self-similar solution to double-shell with a discontinuity for density across the interface, an isentropic implosion model was constructed to study the Rayleigh-Taylor instability for the implosion compression. A Godunov-type method in Lagrangian coordinates was used to compute the one-dimensional Euler equation with the initial conditions and boundary conditions of the double-shell Kidder's self-similar solution in spherical geometry, and numerical results were obtained to validate the double-shell implosion model. By programming and using the linear perturbation code, a linear stability analysis on the Rayleigh-Taylor instability for the double-shell isentropic implosion model was performed. It is found that when the initial perturbation concentrates much closer to the interface of the two shells, or when the spherical wave number becomes much smaller, the interface modal radius grows much faster, i. e. more unstable. In addition, from the spatial point of view for the compressibility effect on the perturbation evolution, it is found that the compressibility of the outer shell has destabilization effect on Rayleigh-Taylor instability, while the compressibility of the inner shell has stabilization effect.

Key words: double-shell Kidder's self-similar solution; Rayleigh-Taylor instability; implosion compression