

# 幂律速度运动表面上磁流体在驻点 附近的滑移流动\*

朱 婧, 郑连存, 张志刚

(北京科技大学 数力系,北京 100083)

(周哲玮推荐)

**摘要:** 从理论上研究了具有非线性延伸表面的磁流体在滑移流区的动量传输问题.通过 Lie 群变换把控制方程组转化为常微分方程组,利用同伦分析方法求得了问题的近似解析解.获得的级数解与文献中的数值解吻合得较好.另外,利用级数解分析滑移参数、磁场强度、速度比率参数、吸入喷注参数和幂律指数对流动的影响.结果显示这些参数对壁剪切力和边界层内流场有较大的影响.

**关键词:** 边界层; 滑移流; 驻点; Lie 群变换; 同伦分析法

**中图分类号:** O345;O11      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.04.004

## 引 言

近年来,随着微纳米测试技术及其相关领域科学技术的飞速发展,人们发现微纳米尺度下的流体间隙流动与宏观尺度下流体的流动问题有着本质区别,“边界滑移”就是其中最具有代表性的一类问题.研究表明,边界滑移对某些流体的流动特性有着重要的影响,而且边界滑移也有非常重要的技术的应用,如在从研究壁滑移现象的先驱者 Mooney 论文<sup>[1]</sup>发表后,众多研究者<sup>[2-3]</sup>相继证实了流体有壁滑移现象.最近,Wang<sup>[4-5]</sup>研究了具有延伸表面的滑移驻点流,而 Hayat 和 Masood<sup>[6]</sup>分析了管道内的滑移流动问题.文献[7-9]讨论了滑移边界条件下非 Newton 流体的动量传输问题.

随着科学技术的发展,非线性方程的求解已成为广大科学工作者经常面临的问题.过去的几十年中,数学物理研究领域内一大成就就是提出了许多求解非线性方程的精巧数学方法,如同伦分析法<sup>[10]</sup>、摄动法<sup>[11-12]</sup>、Adomian 分解法<sup>[13-14]</sup>、Jacobi 椭圆函数展开法<sup>[15]</sup>等.同伦分析法<sup>[16-17]</sup>已成功用于解决工程技术中的许多非线性问题,如非线性振动、磁流体流动问题<sup>[18]</sup>、非 Newton 流体边界层流动问题<sup>[19]</sup>、非线性深水传播问题<sup>[20]</sup>等.本文利用同伦分析法求解具有滑

\* 收稿日期: 2009-11-25; 修订日期: 2010-01-26

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(50936003);北京科技大学新金属材料国家重点实验室开放课题(2009Z-02)

**作者简介:** 朱婧(1976—),女,汉,山西人,博士生;

郑连存(1957—),教授,博士生导师(联系人. Tel: +86-10-62332891; E-mail: liancunzheng@163.com).

移边界的磁流体在驻点附近的边界层动量传输问题。

## 1 边界层控制方程

流体在远上方垂直流向平板,并在  $x = 0, y = 0$  处形成滞止点. 选取流体驻点为坐标系原点,  $x$  轴是平板方向,  $y$  轴垂直于平板.  $u$  和  $v$  分别为沿  $x$  轴和  $y$  轴的速度. 沿  $x$  轴有两个大小相等, 方向相反的力拉伸平板, 因此在驻点处切向速度为  $u_w = ax^m$ , 其中  $a$  是正常数.  $u_e = cx^m$  是边界层外的主流速度. 利用边界层近似, 控制方程简化为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\sigma B^2(x)}{\rho} (u_e - u) + u_e \frac{du_e}{dx}, \quad (2)$$

这里  $\sigma$  为电导率,  $B(x) = B_0 x^{(m-1)/2}$  表示磁场强度, 其中  $B_0$  是常数,  $m$  是幂律指数,  $\rho$  是流体密度,  $\nu$  是运动粘性系数, 相应的滑移边界条件为

$$\begin{cases} u(x, 0) = ax^m + \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \lambda_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}, & v(x, 0) = v_w = -bx^{(m-1)/2}, \\ u(x, \infty) = u_e = cx^m, \end{cases} \quad (3)$$

其中  $v_w$  是吸入喷注速度,  $b$  是非负数,  $\lambda_0$  是平均自由程, 而  $\sigma_v$  为界面切向动量调节系数. 引入流函数求解方程式(1)和(2)是很方便的, 令

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4)$$

则连续方程(1)自动满足. 将流函数代入动量方程(2), 则得

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\sigma B^2(x)}{\rho} \left( u_e - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right). \quad (5)$$

相应的边界条件为

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) = ax^m + \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \lambda_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{y=0}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 0) = -bx^{(m-1)/2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, \infty) = cx^m. \quad (6)$$

为了化简方程, 假设具有如下形式的 Lie 群变换:

$$\begin{aligned} \Gamma: x^* &= xe^{\varepsilon\alpha_1}, \quad y^* = ye^{\varepsilon\alpha_2}, \quad \psi^* = \psi e^{\varepsilon\alpha_3}, \quad u^* = ye^{\varepsilon\alpha_4}, \\ v^* &= ve^{\varepsilon\alpha_5}, \quad u_e^* = u_e e^{\varepsilon\alpha_6}, \quad B^* = Be^{\varepsilon\alpha_7}. \end{aligned} \quad (7)$$

将变换(7)代入到式(5)和(6), 由于  $\Gamma$  将坐标点  $(x, y, \psi, u, v)$  映射到点  $(x^*, y^*, \psi^*, u^*, v^*)$  保持形式不变, 得

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 &= \alpha_1 - 2\alpha_6 = 3\alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_7 = -\alpha_6 - 2\alpha_7, \\ \alpha_3 - m\alpha_1 - \alpha_2 &= 0, \quad \alpha_3 - m\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_3 - \alpha_5 = \alpha_3 - \alpha_1 - \frac{m-1}{2}\alpha_1 = 0. \end{aligned}$$

因此获得以下的单参数变换群:

$$\begin{aligned} \Gamma: x^* &= xe^{\varepsilon\alpha_1}, \quad y^* = ye^{(1-m)\alpha_1\varepsilon/2}, \quad \psi^* = \psi e^{(1+m)\alpha_1\varepsilon/2}, \quad u^* = ye^{m\alpha_1\varepsilon}, \\ v^* &= ve^{(m-1)\alpha_1\varepsilon/2}, \quad u_e^* = u_e e^{m\alpha_1\varepsilon}, \quad B^* = Be^{(m-1)\alpha_1\varepsilon/2}. \end{aligned}$$

利用变换  $\Gamma$ , 得到两个不变量  $\eta$  和  $f(\eta)$ ,

$$\eta = \sqrt{\frac{a}{\nu}} x^{(m-1)/2} y, \quad f(\eta) = \sqrt{\frac{1}{\nu a}} x^{-(m-1)/2} \psi. \quad (8)$$

将式(8)代入式(5)和(6)就得到如下的常微分方程:

$$f''' + \frac{m+1}{2}ff'' + m(d^2 - f'^2) + Ha(d - f') = 0, \tag{9}$$

相应的边界条件转化为

$$f(0) = R, f'(0) = 1 + \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} Kn_x Re_x f''(0) = 1 + \lambda f''(0), f'(\infty) = d, \tag{10}$$

其中  $Kn_x = \lambda_0 / \sqrt{dx}$  是局部 Knudsen 数,  $Re_x = u_e x / \nu$  是局部 Reynolds 数,  $\lambda = [(2 - \sigma_v) / \sigma_v] Kn_x Re_x^{1/2}$  是滑移参数,  $Ha = \sigma B_0^2 / (\rho \nu)$  是磁场参数,  $R = 2b / [(m + 1) \sqrt{\nu a}]$  是吸入喷注参数, 而  $d = c/a = u_e / u_w$  是速度比率参数.

流动计算的目的之一就是求壁面剪切力, 定义壁面局部阻力系数为

$$C_f = \frac{\mu \partial u / \partial y |_{y=0}}{\rho u_e^2 / 2} = \frac{2f''(0)}{\sqrt{d^3} \sqrt{Re_x}}. \tag{11}$$

## 2 同伦法求解 $f(\eta)$

下面用同伦分析法求解非线性方程组(9)和(10). 表示一个函数需要一个完备的基函数序列来表达, 根据边界条件(10), 函数  $f(\eta)$  可以由基函数  $\{\eta^i e^{-k\eta} \mid i \geq 0, k \geq 0\}$  表示为下列形式:

$$f(\eta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{i,k} \eta^i e^{-k\eta}, \tag{12}$$

这里  $a_{i,k} (i, k = 0, 1, 2, \dots)$  均是系数.

根据边界条件(10), 以  $f_0(\eta) = R + d\eta + (1 - d)\eta e^{-\eta} / (1 + 2\lambda)$  作为函数  $f(\eta)$  的初始近似, 并构造同伦的辅助线性算子

$$\mathcal{L}_f(f) = f''' + f'', \mathcal{L}_f[C_1 + C_2\eta + C_3e^{-\eta}] = 0, \tag{13}$$

其中  $C_i (i = 1, 2, 3)$  均是常数.

下面构造零阶变形方程组

$$(1 - q)\mathcal{L}_f[F(\eta, q) - f_0(\eta)] = qh_f H_f(\eta) N_f[F(\eta, q)], \tag{14}$$

$$F(0, q) = R, F'(0, q) = 1 + \lambda F''(0, q), F'(\infty, q) = d. \tag{15}$$

其中非线性算子  $\mathcal{N}_f[F(\eta, q)]$  定义为

$$\mathcal{N}_f[F(\eta, q)] = \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} + \frac{m+1}{2} F \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - m \left( \frac{\partial F}{\partial \eta} \right)^2 + md^2 + Ha \left( d - \frac{\partial F}{\partial \eta} \right),$$

这里  $q \in [0, 1]$  是一个嵌入系数,  $h_f$  为辅助非零参数, 而  $H_f(\eta)$  为辅助非零函数. 当  $q$  从 0 连续地变到 1, 函数  $F(\eta, q)$  就从初始解  $f_0(\eta)$  连续变化到精确解  $f(\eta)$ , 利用 Taylor 级数展开定理, 得

$$F(\eta, q) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{+\infty} f_m(\eta) q^m, f_m(\eta) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m F(\eta, q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}. \tag{16}$$

级数(16)的敛散性强烈地依赖于辅助参数  $h_f$  和辅助函数  $H_f(\eta)$ , 如果辅助参数  $h_f$  和辅助函数  $H_f(\eta)$  选取的足够合理, 使得级数(16)在  $q = 1$  收敛, 从而就有

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(\eta) = f_0(\eta) + f_1(\eta) + f_2(\eta) + f_3(\eta) + \dots. \tag{17}$$

在零阶变形方程组(14)、(15)的两边均对  $q$  求  $k$  阶导数, 然后令  $q = 0$ , 最后在等式两边同除以  $k!$ , 得到如下的  $k$  阶变形方程组:

$$\mathcal{L}_f[f_k(\eta) - \chi_k f_{k-1}(\eta)] = h_f H_f(\eta) R_k^f, \tag{18}$$

且它满足如下的边界条件:

$$f_k(0) = f'_k(+\infty) = 0, f'_k(0) = \lambda f''_k(0), \quad (19)$$

$$R_k^f = f_{k-1}^{f''} + \frac{m+1}{2} \sum_{s=0}^{k-1} f_s f_{k-1-s}'' - H a f_{k-1}' - m \sum_{s=0}^{k-1} f_{k-1-s}' f_s' + (1 - \chi_k)(d^2 m + d H a)$$

$$\text{和 } \chi_k = \begin{cases} 0, & k \leq 1, \\ 1, & k > 1. \end{cases}$$

为了使级数(16)收敛得最快,可以通过残差变量 $\Delta_k^{[21]}$ 获得最合适的辅助参数 $h_f$ ,其中残差变量定义为

$$\Delta_k = \int_0^{+\infty} \left( \left[ N_f \sum_{i=0}^k f_i(x) \right] \right)^2 dx.$$

令 $H_f(\eta) = 1$ ,函数 $f_m(\eta)$ 可以表示为如下形式:

$$f_m(\eta) = \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{i=0}^{2m+2-k} a_{m,k}^i \eta^i e^{-k\eta}. \quad (20)$$

把式(20)带入式(18)和(19)就获得 $m \geq 1$ 时系数 $a_{m,k}^i$ 的递推公式:

$$\begin{aligned} a_{m,0}^0 &= \chi_m a_{m-1,0}^0 + \sum_{k=2}^{m+1} \sum_{q=0}^{2m+2-k} (k + k^2 \lambda - 1) \mu_{k,0}^q \Omega_{m,k}^q + \\ &\quad \sum_{k=2}^{m+1} \sum_{q=2}^{2m+2-k} 2\lambda \mu_{k,2}^q \Omega_{m,k}^q - \sum_{k=2}^{m+1} \sum_{q=1}^{2m+2-k} (1 + 2k\lambda) \mu_{k,1}^q \Omega_{m,k}^q - \\ &\quad \sum_{q=0}^{2m} (\lambda + 1) \mu_{1,1}^q \Omega_{m,1}^q - \sum_{q=1}^{2m} 2\lambda \mu_{1,2}^q \Omega_{m,1}^q, \\ a_{m,0}^i &= 0, \quad 1 \leq i \leq 2m + 2, \\ a_{m,k}^0 &= \chi_m a_{m-1,k}^0 + \sum_{q=0}^{2m+2-k} \mu_{k,0}^q \Omega_{m,k}^q, \quad 2 \leq k \leq m, \\ a_{m,1}^0 &= \chi_m a_{m-1,1}^0 + \sum_{q=0}^{2m} (1 + \lambda) \mu_{1,1}^q \Omega_{m,1}^q + \sum_{k=2}^{m+1} \sum_{q=1}^{2m+2-k} (1 + 2k\lambda) \mu_{k,1}^q \Omega_{m,k}^q - \\ &\quad \sum_{k=2}^{m+1} \sum_{q=2}^{2m+2-k} 2\lambda \mu_{k,2}^q \Omega_{m,k}^q + \sum_{q=1}^{2m} 2\lambda \mu_{1,2}^q \Omega_{m,1}^q - \sum_{k=2}^{m+1} \sum_{q=0}^{2m+2-k} (k + k^2 \lambda) \mu_{k,0}^q \Omega_{m,k}^q, \\ a_{m,1}^i &= \chi_m a_{m-1,1}^i + \sum_{q=i-1}^{2m} \mu_{1,i}^q \Omega_{m,1}^q, \quad 1 \leq i \leq 2m - 1, \\ a_{m,1}^i &= \sum_{q=i-1}^{2m} \mu_{1,i}^q \Omega_{m,1}^q, \quad 2m \leq i \leq 2m + 1, \\ a_{m,k}^i &= \chi_m a_{m-1,k}^i + \sum_{q=i}^{2m+2-k} \mu_{k,i}^q \Omega_{m,k}^q, \quad 2 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq 2m - k, \\ a_{m,k}^i &= \sum_{q=i}^{2m+2-k} \mu_{k,i}^q \Omega_{m,k}^q, \quad 2 \leq k \leq m, 2m + 1 - k \leq i \leq 2m + 2 - k, \\ a_{m,m+1}^i &= \sum_{q=i}^{m+1} \mu_{m+1,i}^q \Omega_{m,m+1}^q, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_{k,i}^q &= i! (q - i + 2) / q!, \quad k = 1, 0 \leq i \leq q + 1, \\ \Omega_{m,k}^i &= h_f (e_{m-1,k}^i - H a c_{m-1,k}^i + (m + 1) \delta_{m,k}^i / 2 - m \Delta_{m,k}^i), \\ \mu_{k,i}^q &= \frac{q!}{i! (k - 1)^{q-i+1}} \left\{ 1 - \frac{(q - i + 2) - (q - i + 1) / n}{n^{q-i+1}} \right\}, \\ &\quad k \geq 2, 0 \leq i \leq q. \end{aligned}$$

而当  $m \geq 1$  时, 系数  $\delta_{m,k}^i, \Delta_{m,k}^i, c_{m,k}^i, d_{m,k}^i, e_{m,k}^i$  和  $\lambda_{m,k}^i$  分别定义为

$$\begin{aligned} \delta_{m,k}^i &= \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{j=\max\{0, k+s-m\}}^{\min\{s+1, k\}} \sum_{t=\max\{0, i+2s+k-j-2m\}}^{\min\{2s+2-j, i\}} a_{m-1-s, k-j}^{i-t} d_{s,j}^t, \\ \Delta_{m,k}^i &= \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{j=\max\{0, k+s-m\}}^{\min\{s+1, k\}} \sum_{t=\max\{0, i+2s+k-j-2m\}}^{\min\{2s+2-j, i\}} c_{m-1-s, k-j}^{i-t} c_{s,j}^t, \\ c_{m,k}^i &= (i+1) a_{m,k}^{i+1} \lambda_{m,k}^{i+1} - k a_{m,k}^i \lambda_{m,k}^i, \quad e_{m,k}^i = (i+1) d_{m,k}^{i+1} \lambda_{m,k}^{i+1} - k d_{m,k}^i \lambda_{m,k}^i, \\ d_{m,k}^i &= (i+1)(i+2) a_{m,k}^{i+2} \lambda_{m,k}^{i+2} - 2k(i+1) a_{m,k}^{i+1} \lambda_{m,k}^{i+1} + k^2 a_{m,k}^i \lambda_{m,k}^i. \end{aligned}$$

由初始近似解得到系数的 3 个初始值  $a_{0,0}^0 = R, a_{0,0}^1 = d, a_{0,1}^1 = (1-d)/(1+2\lambda)$ , 用这 3 个系数和以上的递推公式就可以递推出所有系数  $a_{m,k}^i$  的具体表达式. 因此就得到所求问题的显式解析解:

$$f(\eta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{m=0}^N a_{m,0}^0 + \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{m=k-1}^{2N} \sum_{i=0}^{2m+1-k} a_{m,k}^i \eta^i e^{-k\eta} \right).$$

### 3 结果与讨论

Liao 在文献[16]中指出同伦分析法的敛散性和收敛的速度强烈地依赖于辅助参数  $h_f$  的选取. 图 1 给出了确定参数  $h_f$  的  $h$  曲线图和残差曲线图. 由图 1 可以看到  $h_f$  对应的收敛区间为  $-0.55 \leq h_f \leq -0.10$ . 在本文中选取参数  $h_f = -0.35$ . 由表 1 可以看到, 当  $h_f = -0.35$  时, 同伦级数解与文献[4]中的数值解吻合的较好.

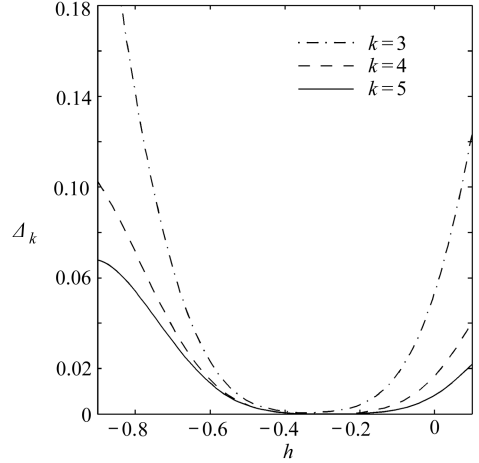
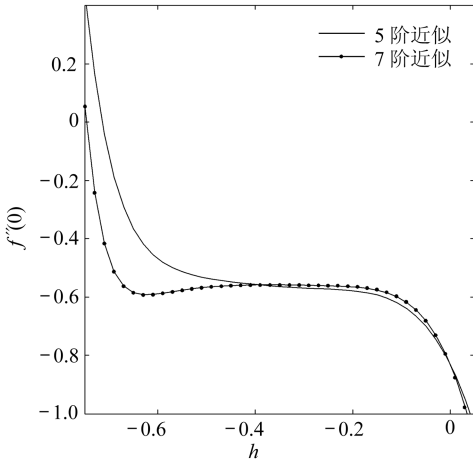


图 1(a)  $h-f'(0)$  曲线图 ( $d = 0.5, Ha = 0.0, \lambda = 0.1, R = 0.0, m = 1.0$ )

图 1(b) 残差曲线图 ( $d = 0.5, Ha = 0.0, \lambda = 0.1, R = 0.0, m = 1.0$ )

下面讨论各参数  $d = c/a, Ha, m, \lambda$  和  $R$  对无量纲速度  $f'(\eta)$  的影响. 图 2(a) 描绘的是幂律指数  $m$  对变量  $f'(\eta)$  的影响, 由图 2(a) 可以看出, 幂律指数  $m$  对无量纲速度  $f'(\eta)$  的影响与参数  $d$  有关, 当  $d > 1$  时, 无量纲速度  $f'(\eta)$  随着参数  $m$  的增加而增加, 而当  $d < 1$  时, 无量纲速度  $f'(\eta)$  却随着参数  $m$  的增加而减少. 图 2(b) 描绘了滑移边界参数  $\lambda$  ( $d = 0.5, R = 0.0, Ha = 0.0$ ) 对变量  $f'(\eta)$  的影响. 从图中可以看到, 无量纲剪切应力  $f'(\eta)$  随着滑移边界参数  $\lambda$  增大而减小, 即滑移边界参数  $\lambda$  小的流体对边界层内流场施加了更大的剪切力. 图 3(a) 描绘了在滑移边界条件下, 速度比例参数  $d$  对无量纲速度  $f'(\eta)$  的影响. 由图 3(a) 可以看出, 变量  $f'(\eta)$  与  $d$  ( $\lambda = 0.5, R = 0.0, Ha = 0.5$ ) 有关并随着  $d$  的增加而增加. 而且当主流速度大于

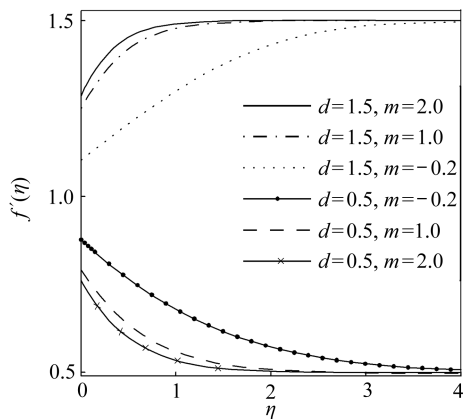


图 2(a) 无量纲切向速度  $f'(\eta)$  分布图  
( $\lambda = 0.5, Ha = 0.5, R = 0.0$ )

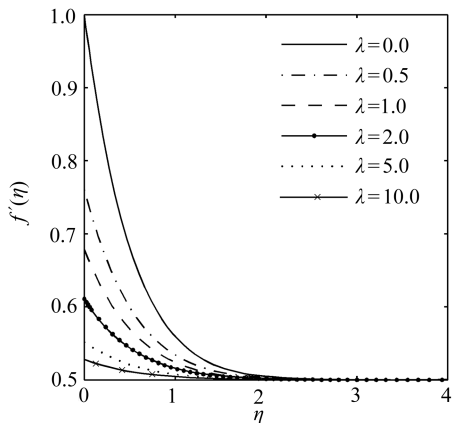


图 2(b) 无量纲切向速度  $f'(\eta)$  分布图  
( $m = 2.0, Ha = 0.5, R = 0.0, d = 0.5$ )

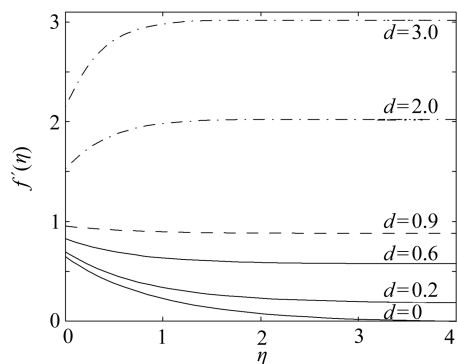


图 3(a) 无量纲切向速度  $f'(\eta)$  分布图  
( $\lambda = 0.5, Ha = 0.5, R = 0.0, m = 1.0$ )

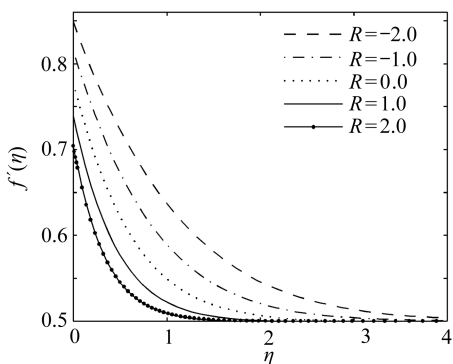


图 3(b) 无量纲切向速度  $f'(\eta)$  分布图  
( $\lambda = 0.5, Ha = 1.0, m = 1.0, d = 0.5$ )

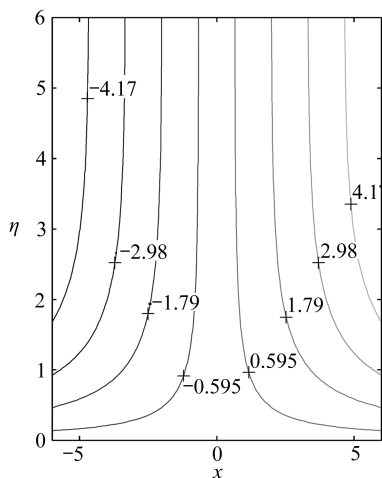


图 4(a)  $m = 1.0$  的流线图 (谱 ( $d = 0.0, Ha = 0.0, \lambda = 0.3$ ))

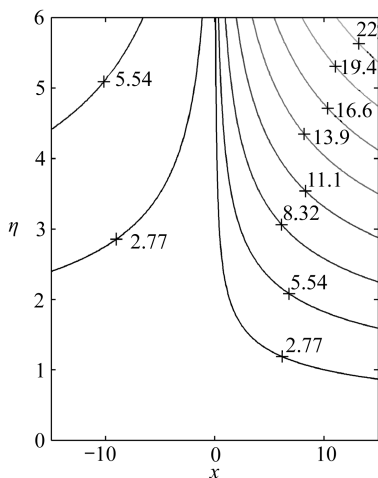


图 4(b)  $m = -0.2$  的流线图 (谱 ( $d = 1.5, Ha = 0.0, \lambda = 0.3$ ))

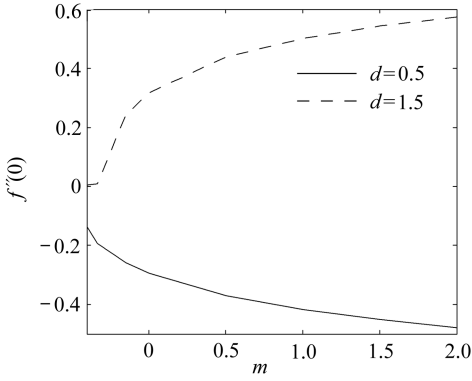


图 5(a) 幂律指数  $m$  对壁面摩擦力  $f''(0)$  的影响 ( $\lambda = 0.5, Ha = 0.5, R = 0.0$ )

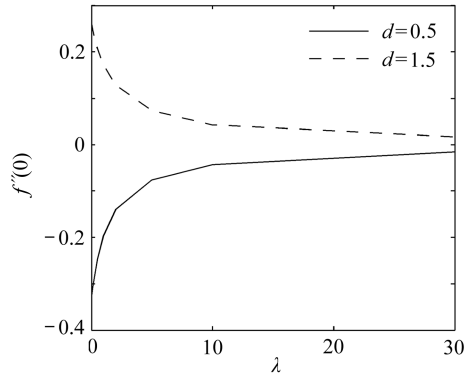


图 5(b) 滑移参数  $\lambda$  对壁面摩擦力  $f''(0)$  的影响 ( $m = -0.2, Ha = 0.5, R = 0.0$ )

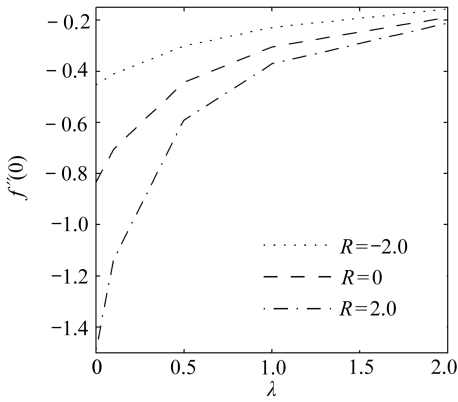


图 6(a) 抽吸喷注参数  $R$  对壁面摩擦力  $f''(0)$  的影响 ( $d = 0.5, Ha = 1.0, m = 1.0$ )

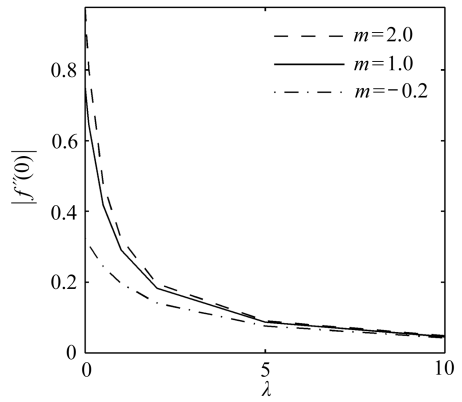


图 6(b) 滑移参数  $\lambda$  对壁面摩擦力  $f''(0)$  的影响 ( $d = 0.5, Ha = 0.5, R = 0.0$ )

延伸速度时,形成一个边界层.然而当主流速度小于延伸速度时,却形成一个反边界层.如图 3 (b)所示,吸入喷注参数对变量  $f'(\eta)$  的影响与滑移参数  $\lambda$  完全类似.图 4 描绘了不同参数下的流线图.

最后讨论了各参数对壁面剪切力的影响.图 5(a)描绘的是幂律指数  $m$  对壁面剪切力  $f''(0)$  的影响,由图 5(a)可以看出,当  $d > 1$  时,壁面剪切力  $f''(0)$  随着参数  $m$  的增加而增加,而当  $d < 1$  时,壁面剪切力  $f''(0)$  却随着参数  $m$  的增加而减少.图 5、图 6 和表 2 描绘了滑移边界参数  $\lambda$  对壁摩擦力的影响.结果显示当  $d > 1$  时,壁面剪切力随着滑移边界参数  $\lambda$  增大而减小,而当  $d < 1$  时,  $f''(0)$  随着滑移边界参数  $\lambda$  增大而增大.由以上的典型图表可以看到:滑移参数、磁场强度、速度比率参数、吸入喷注参数和幂律指数对壁面剪切力和边界层内流场有很大的影响.

表 1 同伦解  $f''(0)$  与 Wang<sup>[4]</sup>数据的比较 ( $Ha = 0.0, R = 0.0, d = 0.0, m = 1.0$ )

$\lambda$	0.0	0.3	1.0	2.0	5.0	20.0
Wang <sup>[4]</sup>	-1.000	-0.701	-0.430	-0.284	-0.145	-0.043 8
HAM	-1.000 26	-0.707 76	-0.440 31	-0.286 90	-0.151 11	-0.046 78

表 2 壁剪切力  $f''(0)$  ( $R = 0.0, d = 0.5$ )

$\lambda$	$m = 1.0$	$m = 1.0$	$m = 1.0$	$m = -0.2$	$m = -0.2$
	$Ha = 0.0$	$Ha = 0.5$	$Ha = 2.0$	$Ha = 0.0$	$Ha = 0.5$
0.0	-0.667 30	-0.754 01	-0.970 10	-0.070 00	-0.325 55
0.1	-0.580 10	-0.646 89	-0.805 05	-0.061 34	-0.305 30
0.5	-0.386 30	-0.417 95	-0.484 02	-0.053 41	-0.245 00
1.0	-0.275 31	-0.292 21	-0.324 79	-0.050 73	-0.196 50
2.0	-0.176 17	-0.183 48	-0.196 46	-0.046 46	-0.140 85
5.0	-0.085 31	-0.087 12	-0.090 09	-0.033 11	-0.076 28
10.0	-0.045 99	-0.046 53	-0.047 39	-0.023 21	-0.043 26
30.0	-0.016 19	-0.016 26	-0.016 37	-0.011 11	-0.015 84
$+\infty$	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00

## 4 结 论

本文从理论上研究具有非线性延伸表面的滑移驻点流的相似解问题. 借助 Lie 群变换将控制方程组转化成一类常微分方程组, 并利用同伦分析方法获得问题的解析解. 结果显示, 当速度比率参数  $d > 1$  时, 形成一个边界层, 并且随着  $d$  的增加, 边界层变薄. 而当  $d < 1$  时却形成一个反边界层. 并且当延伸速度大于主流速度时, 无量纲切向速度随着  $R, Ha$  和  $\lambda$  的增大而减小. 然而当主流速度大于延伸速度时, 无量纲切向速度却有它们的增函数.

当主流速度固定时, 如果  $d > 1$ , 壁面剪切力随着壁面延伸速度的增加而增大, 而当  $d < 1$  时, 壁面剪切力随着壁面延伸速度的增加而减少. 另外壁摩擦力随着磁场强度、吸入喷注参数和幂律参数的增加而增加, 而随着滑移边界参数  $\lambda$  增大而减小, 即滑移参数小的流体对壁面和边界层内流场施加了更大的剪切力.

**感谢** 本文作者感谢北京科技大学冶金研究院研究基金的资助.

### 参考文献:

- [1] Mooney M. Explicit formulas for slip and fluidity[J]. *J Rheology*, 1931, **2**(2): 210-222.
- [2] Rao I J, Rajagopal K R. The effect of the slip condition on the flow of fluids in a channel[J]. *Acta Mech*, 1999, **135**(3): 113-126.
- [3] Khaled A R A, Vafai K. The effect of slip condition on Stokes and Couette flows due to an oscillating wall: exact solutions[J]. *Int J Non-Linear Mech*, 2004, **39**(5): 795-804.
- [4] Wang C Y. Flow due to a stretching boundary with partial slip — an exact solution of the Navier-Stokes equations[J]. *Chem Eng Sci*, 2002, **57**(17): 3745-3747.
- [5] Wang C Y. Stagnation slip flow and heat transfer on a moving plate[J]. *Chem Eng Sci*, 2006, **61**(23): 7668-7672.
- [6] Hayat T, Masood K, Ayub M. The effect of the slip condition on flows of an Oldroyd 6-constant fluid[J]. *J Comput Appl Math*, 2007, **202**(2): 402-413.
- [7] 乔德哈瑞 R C, 吉哈 A K. 化学反应对竖直平板边界磁流体动力学微极流体滑流的影响[J]. *应用数学和力学*, 2008, **29**(9): 1069-1082.
- [8] Andersson H I, Rousselet M. Slip flow over a lubricated rotating disk[J]. *Int J Heat Fluid Flow*, 2006, **27**(2): 329-335.
- [9] Labropulu F, Li D. Stagnation-point flow of a second-grade fluid with slip[J]. *Int J Non-Linear Mech*, 2008, **43**(9): 941-947.



- [10] 朱婧,郑连存,张欣欣. 具有延伸表面的驻点流动和传热问题的级数解[J]. 应用数学和力学, 2009, **30**(4):432-442.
- [11] 莫嘉琪. 具有边界摄动弱非线性反应扩散方程的奇摄动[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(8):1003-1089.
- [12] 林苏榕,莫嘉琪. 超抛物型方程的非线性奇摄动问题[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(10):1249-1253.
- [13] 苏晓红,郑连存,蒋锋. 幂律流体边界层方程的近似解析解和壁摩擦因数的近似值[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(9):1101-1106.
- [14] 梁祖峰,唐晓艳. 用 Adomian 分解法求解分数阻尼梁的解析解[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(2):200-209.
- [15] 张善元,刘志芳. 有限变形弹性杆中三种非线性弥散波[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(7):908-917.
- [16] Liao S J. *Beyond Perturbation: Introduction to Homotopy Analysis Method* [M]. Boca Raton; Chapman Hall/CRC, 2003.
- [17] Liao S J. On the homotopy analysis method for nonlinear problems[J]. *Appl Math Comput*, 2004, **147**(2): 499-513.
- [18] Hayat T, Abbas Z, Sajid M. Series solution for the upper-convected Maxwell fluid over a porous stretching plate[J]. *Phys Lett A*, 2006, **358**(6): 396-403.
- [19] Xu H, Liao S J. Series solutions of unsteady magnetohydrodynamic flows of non-Newtonian fluids caused by an impulsively stretching plate[J]. *J Non-Newton Fluid*, 2005, **129**(1): 46-55.
- [20] Tan Y, Xu H, Liao S J. Explicit series solution of travelling waves with a front of Fisher equation[J]. *Chaos Soliton Fract*, 2007, **31**(2): 462-472.
- [21] Liao S J. An optimal homotopy-analysis approach for strongly nonlinear differential equations[J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2009. doi: 10.1016/j.cnsns. 2009. 09.002.

## Effect of the Slip Condition on the MHD Stagnation-Point Flow Over a Power-Law Stretching Sheet

ZHU Jing, ZHENG Lian-cun, ZHANG Zhi-gang

( Department of Mathematics and Mechanics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, P. R. China )

**Abstract:** The steady two-dimensional magnetohydrodynamic stagnation flow towards a nonlinear stretching surface was studied. The no slip condition on the solid boundary was replaced by the partial slip condition. A scaling group of transformations was applied to get the invariants. Using the invariants, a third order ordinary differential equation corresponding to the momentum was obtained. The analytical solution was obtained in the series form with the help of homotopy analysis method. The reliability and efficiency of series solutions were illustrated by good agreement with numerical results in the literature. Besides, the effects of the slip parameter, the magnetic field parameter, velocity ratio parameter, suction velocity parameter and the power law exponent on the flow were investigated. Results show that the velocity and shear stress profiles are greatly influenced by these parameters.

**Key words:** boundary-layer; slip-flow; stagnation point; scaling group of transformations; homotopy analysis method