文章编号:1000-0887(2010)04-0491-08　

具组合型非线性项与调和位势的非线性 Schrödinger 方程*

徐润章[1], 徐　闯[2]

(1. 哈尔滨工程大学 理学院,哈尔滨 150001;
2. 哈尔滨工业大学 数学系,哈尔滨 150001)

(陈立群推荐)

摘要: 讨论了一类带有组合型非线性项与调和位势的非线性 Schrödinger 方程. 通过构造变分问题,引入位势井方法. 给出了位势井的结构和位势井深度函数的性质. 得到了问题的相关集合在流之下的不变性. 揭示了只要问题的初值属于位势井内或位势井外,则问题在今后所有时间内的解都存在于位势井内或井外. 结合凹性方法,给出了解的整体存在性的最佳条件.

关　键　词: 最佳条件; 不变流形; 调和位势; 组合型非线性项

中图分类号: O175.29　　**文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.04.012

引　　言

本文处理具组合型非线性项与调和位势的非线性 Schrödinger 方程的初值问题:

$$\begin{cases} \mathrm{i}\varphi_t + \Delta\varphi - |x|^2\varphi - \lambda_1|\varphi|^{p_1}\varphi - \lambda_2|\varphi|^{p_2}\varphi = 0, & t > 0, x \in R^N, \\ \varphi(0,x) = \varphi_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

当 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, p_1 = 3$ 时,方程(1)描述吸引的 Bose-Einstein 凝聚态. 通过降温仪器使原子变慢来产生被称作 Bose 凝聚态或 Bose-Einstein 凝聚态的奇异量子态. 它是一种密闭在外部势并降温至非常接近绝对零度的相互作用的玻色子稀释气体的物质状态. 在这种条件下,大部分波色子占据了最低的外部势的量子态,所有的波函数相互重叠,在这点量子效应在宏观意义上开始变得明显. 同样众所周知,方程

$$\begin{cases} \mathrm{i}\varphi_t + \Delta\varphi + |\varphi|^{p-1}\varphi = 0, & t > 0,\ x \in R^N, \\ \varphi(0,x) = \varphi_0(x) \end{cases} \tag{2}$$

是众多物理分支,如量子力学和场论中描述非线性波基本发展模型之一. 很多文章研究了方程(2). 在文献[1]中,Zhang 研究了方程(2)解的整体存在性,以及该 Schrödinger 方程与其基态之间的关系. 在文献[2]中,Ginibre 和 Velo 建立了在能量函数类 $H^1(R^N)$ 中的 Cauchy 问题的局部存在性. Glassey[3], Ogawa 和 Tsutsumi[4-5] 证明了对某些初值,尤其是对一类充分大的初

* **收稿日期:** 2009-07-08; **修订日期:** 2010-03-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871055;10926149);黑龙江省自然科学基金资助项目(A200702;A200810);黑龙江省教育厅科学技术基金资助项目(11541276)

作者简介: 徐润章(1982—),男,河北人,副教授,博士(联系人. E-mail: xurunzh@yahoo.com.cn).

值,方程(2)的 Cauchy 问题的解在有限时间内爆破.对于充分小的初值,方程(2)的 Cauchy 问题的解在 $t \in [0,\infty)$ 整体存在(见文献[6-10]等).Strauss 和 Cazenave 在他们的专著[11-12]中也分别提及了这一论题.对于具调和位势的问题,即

$$\begin{cases} i\varphi_t + \Delta\varphi - |x|^2\varphi + |\varphi|^p\varphi = 0, & t > 0,\ x \in R^N, \\ \varphi(0,x) = \varphi_0(x) \end{cases} \tag{3}$$

或

$$\begin{cases} i\varphi_t + \Delta\varphi - V(x)\varphi + |\varphi|^p\varphi = 0, & t > 0,\ x \in R^N, \\ \varphi(0,x) = \varphi_0(x), \end{cases} \tag{4}$$

也有很多数学家处理过这些问题.在文献[13]中,Chen 和 Zhang 得到了对于方程(3)的超临界状态的整体存在性条件,这一条件与临界状态的相同.对于方程(4),Fujiwara[14]证明了对于二次增长势的 Schrödinger 核的光滑性;Yajima[15]证明了对于高于二次的势,Schrödinger 核不在 C^1 中.而由文献[16],我们知道二次位势是保证方程局部存在性的最高阶势.当 $1 < p < 1 + 4/N$ 时,Zhang[17]证明了对于能量空间中的任何初值,方程(3)的 Cauchy 问题的整体解都是存在的.当 $p = 1 + 4/N$ 时,Zhang[18]证明了整体存在性的最佳条件.当 $p > 1 + 4/N$ 时,Cazenave[12],Carles[19-20]以及 Tsurumi 和 Wadati [21]证明了对于某些初值,尤其是对于一类充分大的初值,方程(3)的 Cauchy 问题的解在有限时间内爆破;但对于其它初值,尤其是对于一类充分小的初值,方程(3)的 Cauchy 问题的解整体存在(见文献[19-21]).此外,Shu 和 Zhang[22]以及 Xu 和 Liu[27]还研究了方程(3)的整体存在性和爆破.对于具组合型非线性项的非线性 Schrödinger 方程

$$\begin{cases} i\varphi_t + \Delta\varphi = \lambda_1 |\varphi|^{p_1}\varphi + \lambda_2 |\varphi|^{p_2}\varphi, & t > 0,\ x \in R^N, \\ \varphi(0,x) = \varphi_0(x), \end{cases} \tag{5}$$

Tao,Visan 和 Zhang 在文献[23]中描述了整体存在性、爆破,而且最重要地是得到了散射结果.在文献[24]中,Shu 和 Zhang 描述了在 $\lambda_1 = -1$ 和 $\lambda_2 = 1$ 时与方程(5)基态相关的驻波的存在性.而且他们得到了 Cauchy 问题解的爆破和整体存在性的严格条件,并证明了对于小初值,解整体存在以及证明了驻波的不稳定性.Xu,Zhang 和 Wu 在文献[25]中得到了方程(6)的解的真空隔离以及解的整体存在性和不存在性的门槛结果,即如下反应扩散方程:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = a|u|^{p-1}u - b|u|^{q-1}u, & t > 0,\ x \in \Omega, \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \geqslant 0. \end{cases} \tag{6}$$

基于上面谈到的工作,我们希望考虑具组合型非线性项与调和位势的非线性 Schrödinger 方程.在这篇文章中,我们构造了变分问题,并通过引入源于文献[26]中的位势井以及文献[3]中提出的证明爆破的凹性方法,得到了整体存在性和爆破的最佳条件,推广了文献[22]中的结果.

本文按下列方式组织.在第 1 节,我们给出有关的预备知识.在第 2 节,我们给出变分问题和不变流形.在第 3 节,我们将给出整体存在性的严格条件.

1 预 备 知 识

在这部分,我们想引入一些之后会用到的泛函和一个空间.我们将利用它们构造一个变分问题.对于方程(1),我们先赋予如下空间:

$$H = \left\{ \psi \in H^1(R^N) \,\middle|\, \int |x|^2 |\psi|^2 \mathrm{d}x < \infty \right\} \tag{7}$$

的内积

$$\langle \psi, \phi \rangle := \int \nabla\psi \nabla\bar{\phi} + \psi\bar{\phi} + |x|^2 \psi\bar{\phi} \mathrm{d}x, \tag{8}$$

其相关范数记为 $\|\cdot\|_H$.

然后我们定义能量泛函

$$E(\varphi) = \int \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{2}|x|^2|\varphi|^2 + \frac{\lambda_1}{p_1+2}|\varphi|^{p_1+2} + \frac{\lambda_2}{p_2+2}|\varphi|^{p_2+2}\mathrm{d}x \tag{9}$$

以及如下两个泛函:

$$P(\varphi) = \int \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{2}|\varphi|^2 + \frac{1}{2}|x|^2|\varphi|^2 + \frac{\lambda_1}{p_1+2}|\varphi|^{p_1+2} + \frac{\lambda_2}{p_2+2}|\varphi|^{p_2+2}\mathrm{d}x, \tag{10}$$

$$I(\varphi) = \int |\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2 + |x|^2|\varphi|^2 + \frac{\lambda_1 N p_1}{2(p_1+2)}|\varphi|^{p_1+2} + \frac{\lambda_2 N p_2}{2(p_2+2)}|\varphi|^{p_2+2}\mathrm{d}x. \tag{11}$$

我们引入如下引理,这个不等式将在第 3 节用来证明爆破现象.

引理 1 设 $\varphi_0 \in H$,φ 是方程(1)在空间 $C([0,T];H)$ 中 Cauchy 问题的一个解.令

$$V(t) = \int |x|^2|\varphi|^2\mathrm{d}x,$$

则有

$$V''(t) = 8\int \left(|\nabla\varphi|^2 - |x|^2|\varphi|^2 + \frac{\lambda_1 N p_1}{2(p_1+2)}|\varphi|^{p_1+2} + \frac{\lambda_2 N p_2}{2(p_2+2)}|\varphi|^{p_2+2} \right)\mathrm{d}x. \tag{12}$$

2 变分问题与不变流形

现在我们定义流形

$$M := \{\psi \in H\backslash\{O\} : I(\psi) = 0\},$$

并且我们考虑如下变分问题:

$$d = \inf_{\{\psi \in H\backslash\{0\} : I(\psi)=0\}} P(\psi). \tag{13}$$

通过利用类似于文献[22]中的证法易得如下引理.

引理 2 $d > 0$.

定理 1 定义

$$W := \{\psi \in H, P(\psi) < d, I(\psi) > 0\}, \tag{14}$$

则 W 是方程(1)的不变流形,即若 $\varphi_0 \in W$, 则方程(2)的 Cauchy 问题的解 $\varphi(x,t)$ 也满足 $\varphi(x,t) \in W, t \in [0,T)$.

证明 设 $\varphi_0 \in W$. 因此我们有 $P(\varphi_0) < d$. 由局部存在性定理[28],存在唯一的 $\varphi(x,t) \in C([0,T);H)$, $T \leqslant \infty$ 使得 $\varphi(x,t)$ 是方程(1)的 Cauchy 问题的一个解. 若存在 t_1 使得 $P(\varphi(x,t_1)) \geqslant d$, 则据文献[3]和[29-30],由能量和质量守恒定律,我们有

$$P(\varphi_0)=P(\varphi(x,t_1))\geqslant d, \tag{15}$$

这与 $P(\varphi_0)<d$ 矛盾. 因此

$$P(\varphi)<d,\qquad t\in[0,T). \tag{16}$$

现在我们证明 $I(\varphi)>0, t\in[0,T)$. 首先,因为 $\varphi_0\in W$,所以 $I(\varphi_0)>0$. 由反证法,从 $I(\varphi)$ 的连续性可知,存在 $t_2\in[0,T)$ 使得 $I(\varphi(x,t_2))=0$. 若 $\varphi(x,t_2)=0$, 则由质量守恒定律,我们有

$$0=\int|\varphi(x,t_2)|^2\mathrm{d}x=\int|\varphi_0|^2\mathrm{d}x,$$

这说明 $\varphi_0=0$. 因此我们有 $I(\varphi_0)=0$,这与 $I(\varphi_0)>0$ 矛盾. 若 $\varphi(x,t_2)\neq 0$,由式(13),我们有 $P(\varphi(x,t_2))\geqslant d$,这与式(16) 矛盾. 因此 $I(\varphi)>0, t\in[0,T)$. 以上我们证明了 $\varphi(x,t)\in W$, $t\in[0,T)$.

这完成了定理的证明. □

利用和定理 1 同样的证法,我们可以得到如下结果.

定理 2 定义

$$V:=\{\psi\in H, P(\psi)<d, I(\psi)<0\},$$

则 V 是方程(1)的不变流形.

3 整体存在性的最佳条件

定理 3 若 $\varphi_0\in W$, 则 Cauchy 问题(1)的解 $\varphi(x,t)$ 在 $t\in[0,\infty)$ 整体存在.

证明 首先,设 $\varphi_0\in W$. 因此定理 2 说明 Cauchy 问题(1)的解 $\varphi(x,t)$ 满足 $\varphi(x,t)\in W$, $t\in[0,T)$. 对于固定的 $t\in[0,T)$,记 $\varphi(x,t)=\varphi$. 因此我们有 $P(\varphi)<d, I(\varphi)>0$. 由 $I(\varphi)>0$, 我们有

$$\begin{aligned}&\int\frac{\lambda_1Np_1}{2(p_1+2)}|\varphi|^{p_1+2}+\frac{\lambda_2Np_1}{2(p_2+2)}|\varphi|^{p_2+2}\mathrm{d}x>\\&\quad\int\frac{\lambda_1Np_1}{2(p_1+2)}|\varphi|^{p_1+2}+\frac{\lambda_2Np_2}{2(p_2+2)}|\varphi|^{p_2+2}\mathrm{d}x>\\&\quad-\int|\nabla\varphi|^2+|\varphi|^2+|x|^2|\varphi|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{17}$$

由式(10)和式(11)知

$$\begin{aligned}d>P(\varphi)&=\int\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2+\frac{1}{2}|\varphi|^2+\frac{1}{2}|x|^2|\varphi|^2+\\&\quad\frac{\lambda_1}{p_1+2}|\varphi|^{p_1+2}+\frac{\lambda_2}{p_2+2}|\varphi|^{p_2+2}\mathrm{d}x>\\&\quad\int\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2+\frac{1}{2}|\varphi|^2+|x|^2|\varphi|^2-\\&\quad\frac{2}{Np_1}\int|\nabla\varphi|^2+|\varphi|^2+|x|^2|\varphi|^2\mathrm{d}x=\\&\quad\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{Np_1}\right)\int|\nabla\varphi|^2+|\varphi|^2+|x|^2|\varphi|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{18}$$

从而

$$\int|\nabla\varphi|^2+|\varphi|^2+|x|^2|\varphi|^2\mathrm{d}x<\frac{2Np_1d}{Np_1-4}.$$

因此局部存在性表明 φ 在 $t\in[0,\infty)$ 整体存在.

这完成了定理的证明. □

定理 4 若 $\varphi_0\in V$, 则 Cauchy 问题(1)的解 $\varphi(x,t)$ 在有限时间内爆破.

证明 由 $\varphi_0\in V$, 定理 2 表明 Cauchy 问题(1)的解 $\varphi(x,t)$ 满足 $\varphi(x,t)\in V, t\in[0,T)$. 对于

$$V(t)=\int|x|^2|\varphi|^2\mathrm{d}x,$$

式(12)和式(11)说明

$$\begin{aligned}V''(t)=8\int\Big(&|\nabla\varphi|^2-|x|^2|\varphi|^2+\frac{\lambda_1Np_1}{2(p_1+2)}|\varphi|^{p_1+2}+\\&\frac{\lambda_2Np_2}{2(p_2+2)}|\varphi|^{p_2+2}\Big)\mathrm{d}x<\\&8\int\Big(|\nabla\varphi|^2+|\varphi|^2+|x|^2|\varphi|^2+\frac{\lambda_1Np_1}{2(p_1+2)}|\varphi|^{p_1+2}+\\&\frac{\lambda_2Np_2}{2(p_1+2)}|\varphi|^{p_1+2}\Big)\mathrm{d}x-16\int|x|^2|\varphi|^2\mathrm{d}x<\\&-16\int|x|^2|\varphi|^2\mathrm{d}x=-16V(t).\end{aligned}\tag{19}$$

现在我们证明存在 $T_1\in(0,\infty)$ 使得 $V(t)>0, t\in[0,T_1]$; $V(T_1)=0$. 由反证法, 假设 $\forall t\in[0,\infty), V(t)>0$. 令

$$g(t)=\frac{V'(t)}{V(t)}.$$

易证

$$g'(t)=\frac{V''(t)}{V(t)}-\left(\frac{V'(t)}{V(t)}\right)^2<-16-g^2(t).\tag{20}$$

接下来我们要证明 $g(t)\neq0, t\in[0,\infty)$. 仍用反证法, 假设存在 t_0 使得 $g(t_0)=0$, 即 $V'(t_0)=0$. 由 $V''(t)<0$, 我们有 $V'(t)<0, t\in(t_0,\infty)$. 因此我们有 $g(t)<0, t\in(t_0,\infty)$. 对于任何不动点 $t_1>t_0$, 方程(20) 两边同时除以 $g^2(t)$, 我们有

$$\frac{g'(t)}{g^2(t)}<-\frac{16}{g^2(t)}-1<-1.$$

进一步我们得到

$$\int_{t_1}^{t}\frac{g'(\tau)}{g^2(\tau)}\mathrm{d}\tau<\int_{t_1}^{t}-1\mathrm{d}\tau,$$

即

$$\frac{1}{g(t)}>\frac{1}{g(t_1)}+(t-t_1),\tag{21}$$

这意味着存在 $t_2>t_1$, 使得

$$g(t)>0,\qquad t\in(t_2,\infty).\tag{22}$$

这与 $g(t)<0, t\in(t_0,\infty)$ 矛盾. 因此我们有 $g(t)\neq0, t\in[0,\infty)$. 由式(21) 和式(22), 对于 $t\in(0,\infty)$, 我们有

$$\frac{1}{g(t)}>\frac{1}{g(0)}+t.$$

因此，$V'(t) > 0, t \in [|1/g(0)|, \infty)$. 从而 $V(t)$ 在 $[|1/g(0)|, \infty)$ 递增且

$$V''(t) < -16V(t) < 0.$$

进一步我们有

$$\int_0^t V''(\tau)\mathrm{d}\tau < -16V(0)t,$$

即

$$V'(t) - V'(0) < -16V(0)t,$$

也即

$$V'(t) < V'(0) - 16V(0)t.$$

再一次,我们有

$$\int_0^t V'(\tau)d\tau < V'(0)t - 8V(0)t^2,$$

即

$$V(t) - V(0) < V'(0)t - 8V(0)t^2.$$

因此,我们有

$$V(t) < V(0) + V'(0)t - 8V(0)t^2,$$

这与 $V(t) > 0, t \in [0, \infty)$ 矛盾. 至此我们证明了存在 $T_1 \in (0, \infty)$ 使得 $V(t) > 0, t \in [0, T_1]$ 且 $V(T_1) = 0$. 再次用不等式[30],

$$\|\varphi\|^2 \leqslant \frac{2}{N}\|\nabla\varphi\| \cdot \|x\varphi\|,$$

我们有

$$\lim_{t \to T_1}\|\nabla\varphi\| = \infty,$$

这表明

$$\lim_{t \to T_1}\|\varphi\|_H = \infty,$$

即 Cauchy 问题(1)的解在有限时间爆破.

这完成了定理的证明. □

注记 1 显然

$$\{\psi \in H, P(\psi) < d\} = W \cup V \cup \{O\}.$$

因此定理 3 和定理 4 均为严格的.

由定理 3,我们得到了方程(1)的解的另一个整体存在性条件.

推论 1 若 φ_0 满足 $\|\varphi_0\|_H^2 < 2d$, 则 Cauchy 问题(1)的解 φ 在 $t \in [0, \infty)$ 整体存在.

证明 若 $\varphi_0 = 0$,质量守恒定律表明 $\varphi = 0$. 显然 Cauchy 问题(2)的解在 $t \in [0, \infty)$ 整体存在. 若 $\varphi_0 \neq 0$,由 $\|\varphi_0\|_H^2 < 2d$,我们有 $P(\varphi_0) < d$. 此外,我们指出 $I(\varphi_0) > 0$. 否则,存在 $0 < \mu \leqslant 1$ 使得 $I(\mu\varphi_0) = 0$. 因此 $P(\mu\varphi_0) \geqslant d$. 另一方面,

$$\|\mu\varphi_0\|_H^2 = \mu^2\|\varphi_0\|_H^2 < 2\mu^2 d < 2d.$$

从而 $P(\mu\varphi_0) < d$. 矛盾. 故我们有 $\varphi_0 \in W$. 因此定理 3 推出这一引理. □

注记 2 令 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$(或 $\lambda_2 = 0, \lambda_1 = -1$), 容易证明文献[22]中得到的结论.

致谢 作者感谢审稿人的宝贵建议及哈尔滨工程大学科学基金对本文的资助.

参考文献:

[1] ZHANG Jian. Sharp conditions of global existence for nonlinear Schrödinger and Klein-Gordon equations[J]. *Nonlinear Analysis*, 2002, **48**(2):191-207.

[2] Ginibre J, Velo G. On a class of nonlinear Schrödinger equations[J]. *Journal of Functional Analysis*, 1979, **32**(1):1-71.

[3] Glassey R T. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1977, **18**(9):1794-1797.

[4] Ogawa T, Tsutsumi Y. Blow-up of H^1 solution for the nonlinear Schrödinger equation[J]. *Journal of Differential Equations*, 1991, **92**(2):317-330.

[5] Ogawa T, Tsutsumi Y. Blow-up of H^1 solution for the nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1991, **111**(2):487-496.

[6] Kenig C, Ponce G, Vega L. Small solution to nonlinear Schrödinger equations[J]. *Annales de l' Institut Henri Poincaré Nonlinear Analysis*, 1993, **10**(3):255-288.

[7] Hayashi N, Nakamitsu K, Tsutsumi M. On solutions of the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equations[J]. *Journal of Functional Analysis*, 1987, **71**(2):218-245.

[8] Hayashi N, Tsutsumi Y. Scattering theory for Hartree type equations[J]. *Annales de I' institut Henri Poincaré, Physique Théorique*, 1987, **46**:187-213.

[9] Ginibre J, Velo G. The global Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation[J]. *Annales de l' Institut Henri Poincaré Non Linear Analysis*, 1985, **2**(4):309-327.

[10] Ginibre J, Ozawa T. Long range scattering for nonlinear Schrödinger and Hartree equations in space dimensions $n\geqslant 2$[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 1993, **151**(3):619-645.

[11] Strauss W A. *Nonlinear Wave Equations*[M]. Conference Board of the Mathematical Sciences, No 73. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1989.

[12] Cazenave T. *An Introduction to Nonlinear Schrödinger Equations*[M]. Textos de Metodos Matematicos, Vol **22**, Rio de Janeiro, 1989.

[13] CHEN Guang-gan, ZHANG Jian. Remarks on global existence for the supercritical nonlinear Schrödinger equation with a harmonic potential[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2006, **320**(2):591-598.

[14] Fujiwara D. Remarks on convergence of the Feynman path integrals[J]. *Duke Mathematical Journal*, 1980, **47**(3):559-600.

[15] Yajima K. On fundamental solution of time dependent Schrödinger equations[J]. *Contemporary Mathematics*, 1998, **217**:49-68.

[16] Oh Y G. Cauchy problem and Ehrenfest' s law of nonlinear Schrödinger equations with potentials[J]. *Journal of Differential Equations*, 1989, **81**(2):255-274.

[17] ZHANG Jian. Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with unbounded potentials[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2000, **51**(3):498-503.

[18] ZHANG Jian. Stability of attractive Bose-Einstein condensates[J]. *Journal of Statistical Physics*, 2000, **101**(3/4):731-746.

[19] Carles Rémi. Critical nonlinear Schrödinger equation with and without harmonic potential [J]. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2002, **12**(10):1513-1523.

[20] Carles Rémi. Remarks on the nonlinear Schrödinger equation with harmonic potential[J].

Annales Henri Poincaré, 2002, **3**(3/4):757-772.

[21] Tsurumi T, Wadati M. Collapses of wave functions in multidimensional nonlinear Schrödinger equations under harmonic potential[J]. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1997, **66**(10):3031-3034.

[22] Shu J, Zhang J. Nonlinear Shrödinger equation with harmonic potential[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2006, **47**(6):063503.

[23] Tao Terence, Visan Monica, ZHANG Xiao-yi. The nonlinear Schrödinger equation with combined power-type nonlinearities[J]. *Commumications in Partial Differential Equations*, 2007, **32**(7/9):1281-1343.

[24] SHU Ji, ZHANG Jian. Instability of standing waves for a class of nonlinear Schrödinger equations[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, **327**(2):878-890.

[25] XU Run-zhang, ZHANG Wen-ying , WU Wei-ning. *Nonlinear Analysis Research Trends*[M]. Incorporation: Nova Science Publishers, 2008: 259-281.

[26] Payne L E, Sattinger D H. Saddle points and intability of nonlinear hyperbolic equations[J]. *Israel Journal of Mathematics*, 1975, **22**(3/4):273-303.

[27] XU Run-zhang, LIU Ya-cheng. Remarks on nonlinear Schrödinger equation with harmonic potential[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2008, **49**(4):043512.

[28] Kato T. On nonlinear Shrödinger equations[J]. *Annales de I' institut Henri Poincaré, Physique Théorique*, 1987, **49**(1):113-129.

[29] Cazenave T. *Semilinear Schrödinger Equations*[M]. Courant Lecture Notes in Mathematics. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2003.

[30] Tsutsumi Y, Zhang J. Instability of optical solitons for two-wave interaction model in cubic nonlinear media[J]. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 1998, **8**(2):691-713.

Nonlinear Schrödinger Equation With Combined Power-Type Nonlinearities and Harmonic Potential

XU Run-zhang[1], XU Chuang[2]

(1. *College of Science*, *Harbin Engineering University*, *Harbin* 150001, *P. R. China*;

2. *Department of Mathematics*, *Harbin Institute of Tecnology*, *Harbin* 150001, *P. R. China*)

Abstract: A class of nonlinear Schrödinger equations with combined power-type nonlinearities and harmonic potential are discussed. By constructing a variational problem the potential well method is applied. The structure of the potential well and the properties of depth function are given. The invariance of some sets for the problem is shown. It is proven that if the initial data are in the potential well or out of it, the solutions will lie either in the potential well or out of it respectively. By convexity method, the sharp condition of the global well-posedness is given.

Key words: sharp criterion; invariant manifold; harmonic potential; combined power-type nonlinearities