

比热容非常值对高超声速平板 边界层稳定性的影响*

贾文利, 曹伟

(天津大学 力学系,天津 300072)

(周哲玮推荐)

摘要: 在高超声速条件下,边界层中气体的温度可能很高,以致气体的比热容不再是常数而与温度有关.这时边界层中的流动稳定性如何是值得研究的问题.采用线性稳定性理论,考虑比热容与温度有关时高超声速可压缩平板边界层的稳定性,并与假定比热容为常值的情况作比较,发现对第一模态和第二模态波的中性曲线、最大增长率都有影响.因此,在高超声速情况下,比热容随温度变化是研究边界层稳定性时必须考虑的一个因素.

关键词: 二维超音速平板边界层; 变比热容; 稳定性

中图分类号: O357.41; O354.4 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.08.006

引 言

对于在高空飞行的高超声速飞行器的设计,其边界层是否会发生转捩及转捩位置的确定,是需要考虑的重要问题.由于高超声速条件下,气体的热力学特性发生了很大的变化,这使得气动热的计算十分困难,成为目前高超声速流动研究的难点,如何确定气体的热力学特性就成为解决高超声速流动最基本的问题^[1].早在1974年,Tannehill和Mugge^[2]用曲线拟合的方法对平衡空气的热力学特性进行了研究.之后,Srinivasan^[3-4],Gupta等^[5]对此又进行了深入的研究.2003年,Iannelli^[6]对含有5种组分的化学反应气体的热力学特性进行了研究,得到了气体的比热容随温度变化的曲线.关于气体热力学特性的变化如何影响流动稳定性,赵耕夫^[7]于1996年讨论了空气热力参数对可压缩边界层流动稳定性的影响,他提出,在Mach数 $Ma=3$ 以上的可压缩线性稳定性问题中,应当采用适当的热力学参数近似方法.本文讨论了比热容的变化对高超声速平板边界稳定性的影响.

过去在有关超声速流转捩位置预测和湍流的计算中,一般都将空气的比热容设为常值.这对于Mach数不很高,因而边界层中气体温度升高不太高时是合理的,如,文献[8-12].但当飞

* 收稿日期: 2009-11-09; 修订日期: 2010-06-11

基金项目: 国家自然科学基金重大研究计划资助项目(90716007); 国家自然科学基金资助项目(10772134)

作者简介: 贾文利(1985—),男,河北人,博士生(Tel: +86-22-27403374);

E-mail: jiawenli851225@sina.com);

曹伟,教授(联系人. Tel: +86-22-87402056; E-mail: caow@tju.edu.cn).

飞行器以高超声速(Mach 数大于 5) 飞行时, 飞行器边界层中的气体温度将升高很多^[13]. 例如, 对于壁面绝热的平板边界层, 当来流 Mach 数为 6 时, 其边界层中的气体温度可高达来流温度的 6.6 倍. 此时, 比热容可能不再是常值, 而与温度有关. 边界层的稳定性也将可能与比热容为常值时不同, 是一值得研究的新问题.

本文针对来流 Mach 数为 6 和 8 两种工况, 采用线性稳定性理论(LST), 在比热容为温度函数的情况下, 计算了基本流及第一模态和第二模态波的中性曲线, 并且同比热容设为不同常数值的情况进行了比较.

1 控制方程及计算参数选取

当空气的温度在 $600\text{ K} \leq T \leq 2\,500\text{ K}$ 范围时, 空气中的 N_2 和 O_2 的振动自由度被激发, 此时比内能表示为如下形式^[14]:

$$e = \frac{3}{2}RT + RT + \frac{RT_{ve}}{e^{T_{ve}/T} - 1}, \tag{1}$$

其中 T_{ve} 为振动特征温度, $T_{ve} = h\nu/k_B$, 式中 k_B 为 Boltzmann 常数, $k_B = 1.380\,66 \times 10^{-23}\text{ J/K}$, h 为 Planck 常数, $h = 6.626\,08 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}$, ν 为分子振动基频, 对于 O_2 为 $4\,740.738 \times 10^{10}$, 对于 N_2 , $\nu = 7\,072.65 \times 10^{10}$, R 为气体常数.

比定容热容可以表示为如下形式:

$$c_v = \frac{3}{2}R + R + R\left(\frac{T_{ve}}{T}\right)^2 \frac{e^{T_{ve}/T}}{(e^{T_{ve}/T} - 1)^2}. \tag{2}$$

比定压热容则为

$$c_p = \frac{3}{2}R + R + R + R\left(\frac{T_{ve}}{T}\right)^2 \frac{e^{T_{ve}/T}}{(e^{T_{ve}/T} - 1)^2}. \tag{3}$$

图 1 是由式(3)得出的空气的比定压热容 c_p 与气体常数 R 的比随温度变化的情况. 从图 1 中可以看出, 当温度低于 600 K 时, 空气的比定压热容为常值, 而当温度超过 600 K 时, 空气的比定压热容不再是常数而是温度 T 的函数. 在 $600\text{ K} \leq T \leq 2\,500\text{ K}$ 区间内比定压热容的变化范围为 $3.5R \sim 4.4R$, 比定容热容的变化范围则为 $2.5R \sim 3.4R$.

为了研究比热容为温度的函数时的基本流及第一模态和第二模态波的中性曲线与比热容取常值时的异同, 也在一组不同常值比定压热容的情况下做了相同的计算. 所取的一组常数值比定压热容分别为 $3.5R$ (600 K 以下)、 $3.86R$ (820 K)、 $4.33R$ (2 030 K). $3.86R$ 和 $4.33R$ 是根据式(3)在相应温度下得到的比定压热容.

对可压缩平板边界层方程, x 为流向坐标, y 为垂直流向坐标. 引入 Illingworth 变换, 形式如下:

$$\xi = \rho_e \mu_e u_e x, \quad \eta = \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy, \tag{4}$$

其中 ρ_e, μ_e 和 u_e 分别为边界层外边缘的密度、粘性系数和速度. 取速度和温度的相似性解为如下形式:

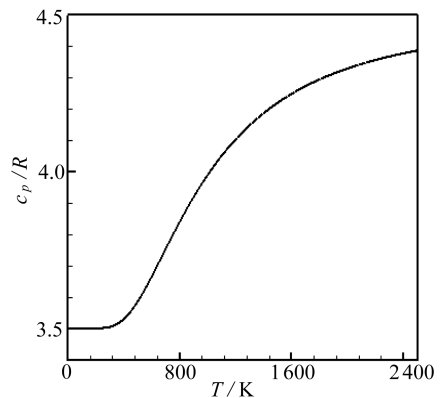


图 1 空气的比定压热容随温度变化的概况

$$u(x \cdot y) = u_e f'(\eta), T(x \cdot y) = T_e g(\eta). \quad (5)$$

将式(5)代入平板边界方程则可得到二维可压缩边界层的相似性解方程. 具体形式如下:

1) 比热容为温度函数的情况:

$$(C_1 f'')' + ff'' = 0, \quad (6)$$

$$(C_2 g')' + \frac{c_p}{c_{pe}} Pr_e f g' = (1 - \gamma_e) Ma_e^2 Pr_e C_1 f'^2, \quad (7)$$

其中 $C_1 = \frac{\rho \mu}{\rho_e \mu_e} = \left(\frac{T}{T_e}\right)^{1/2} \frac{T_e + c_m}{T + c_m}$, c_m 取 110.4; $C_2 = \frac{\rho k}{\rho_e k_e} = \left(\frac{T}{T_e}\right)^{1/2} \frac{T_e + c_k}{T + c_k}$, c_k 取 194^[15];

2) 比热容为常数值的情况:

$$(C_1 f'')' + ff'' = 0, \quad (8)$$

$$(C_2 g')' + Pr f g' = (1 - \gamma) Ma_e^2 Pr C_1 f'^2, \quad (9)$$

其中下标 e 表示边界层外缘气体的值, 可由无穷远来流气体的参数计算, 对于来流气体温度不高时, c_{pe} 可取为常值 3.5R. c_p 定义及计算由式(3) 得出, 与温度有关. T_{ve} 则根据式(3) 由文献[16] 中给出的数据拟合而得到, 在本文中取 $T_{ve} = 3\ 030\text{ K}$.

基本流计算中, 壁面条件取为无滑移及绝热条件:

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f'(\infty) = 1; g'(0) = 0, g(\infty) = 1.$$

来流气体参数均对应于 40 000 m 高空处的空气之值, $T_\infty = 250.35\text{ K}$, $c_\infty = 317.19\text{ m/s}$, $\rho_\infty = 3.9557 \times 10^{-3}\text{ kg/m}^3$, $\mu_\infty = 1.6009 \times 10^{-5}\text{ Pa}\cdot\text{s}$.

然后采用 Runge-Kutta 法进行求解, 得到平板边界层的相似性解, 将其作为稳定性分析的基本流.

用 $\delta = \sqrt{v_e x / u_e}$ 作为参考长度, 并用边界层外缘的 $u_e, T_e, \rho_e, \mu_e, k_e, c_{pe}$ 作为参考量对三维可压缩 N-S 方程中相应的流动变量无量纲化, 压力用 $\rho_e u_e^2$ 无量纲化, 得到无量纲化方程. 根据平行流假设, 基本流的各量都只是垂直坐标的函数, 即 $q_s = q(y)$. 在基本流 q_s 上叠加上三维小扰动 q' , 则瞬时流场可表示为

$$q(x, y, z, t) = q_0(y) + q'(x, y, z, t), \quad (10)$$

式中 $q_0 = (U_0, T_0, P_0)$, $q' = (u, v, w, T, P)$. 粘性系数表示为

$$\mu = \mu_0 + \mu'. \quad (11)$$

将式(10)和式(11)代入无量纲化方程, 并取 q' 的线性项, 即可得到小扰动所满足的控制方程^[17].

扰动方程满足的边界条件为

$$u_0 = v_0 = w_0 = T_0 = 0, \quad y = 0, \infty. \quad (12)$$

扰动方程和边界条件(12)构成了特征值问题. 给定 Re 并解得平均流可得到如下色散关系:

$$\omega = \omega(\alpha, \beta, Re). \quad (13)$$

时间模式下 α 和 β 为实数, ω 为复数. 虚部 ω_i 为小扰动的时间增长率. 空间模式下 ω 为实数, α 和 β 为复数, 虚部 α_i 和 β_i 为小扰动的空间增长率. 本文中采用空间模式. 此特征值问题采用 Muller 法求解.

2 计算结果及分析

对来流 Mach 数为 6 时的情况, 比定压热容和比热比的分布示于图 2 中, 同时也给出了上

述几个取常值时的分布。

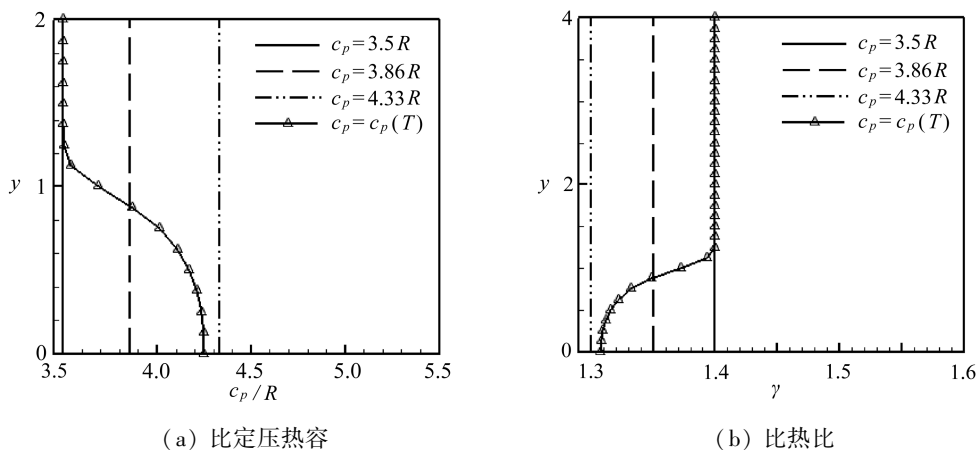


图2 比定压热容及比热比的比较

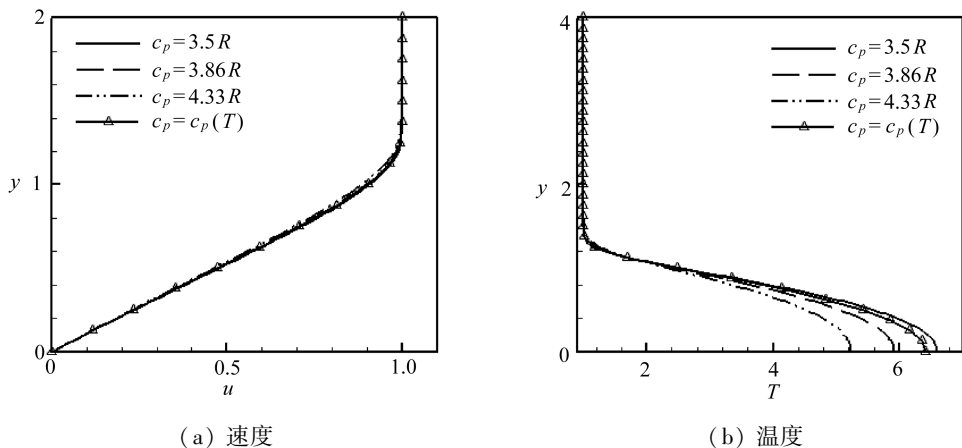


图3 层流相似性解的比较

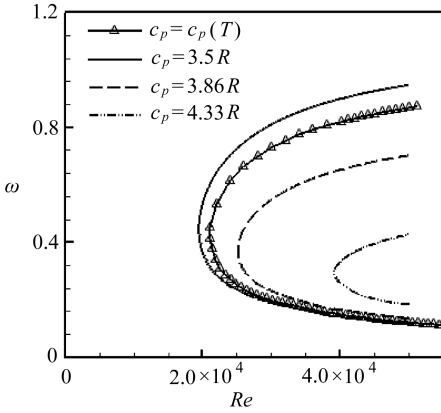
基本流的比较结果,如图3所示;中性曲线的比较结果如图4所示。

由图3(a)和图3(b)可以看出,当考虑比热容随温度的变化后,速度分布与几个比热容取不同常数值时差异都很小。但温度分布则随比定压热容的不同而有明显差别。例如,壁面处无量纲温度从 $c_p = 3.5R$ 时的 $T_0 = 6.6$ 降到 $c_p = 4.33R$ 时的 $T_0 = 5.2$ 。比热容随温度变化时所得温度分布介乎比热容取为常值 $3.5R$ 和 $3.86R$ 时所得的分布之间。

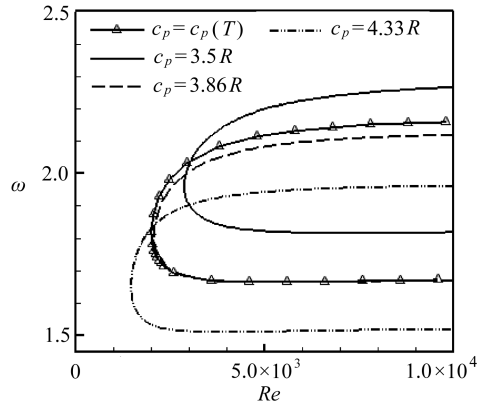
由图4(a)可以看出,对于第一模态,比热容为温度函数时,尽管其值可以从 $3.5R$ 变至 $4.25R$ (见图2),但其相应的中性曲线位于比定压热容为 $3.5R$ 和 $3.86R$ 的之间,比较靠近比热容取常值 $3.5R$ 的情况。而由图4(b)可以看出对于第二模态,比热容为温度函数的中性曲线不全落在任何两个比定压热容取常值的中性曲线之间,但和比热容取常值 $3.86R$ 的相近。由此可见,难以选取合适的等效比热容值来近似代替比热容为温度函数的情况求中性曲线。

再看对应某一物理频率的波(第二模态取比热容为 $3.5R$, Reynolds 数为 $10\ 000$ 剖面增长率最大时的频率 $\omega = 2.033\ 093\ 70$, 第一模态取比热容为 $3.5R$, Reynolds 数为 $40\ 000$ 剖面增长率最大时的频率 $\omega = 0.547\ 914\ 70$) 的增长率沿流向变化情况的比较。结果如图5所示。从图5(a)和图5(b)可见,对于第一模态波,比热容为温度函数的情况得到的曲线位于比定压热容 $3.5R$ 和 $3.86R$ 所得到的曲线之间,较靠近与比热容取常值 $3.5R$ 的情况。而对第二模态波,则不

全在比定压热容 $3.5R$ 和 $3.86R$ 所得到的曲线之间,但和比热容为 $3.86R$ 时的情况相近.这同中性曲线的比较结果类似.

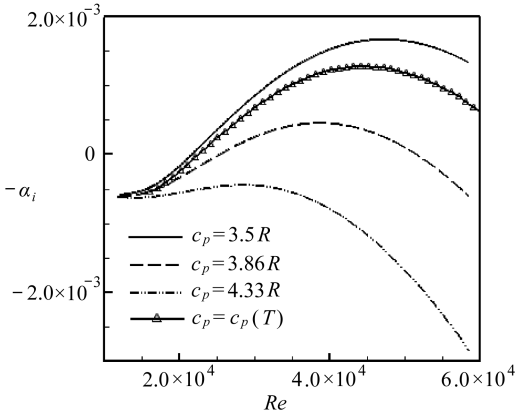


(a)第一模态

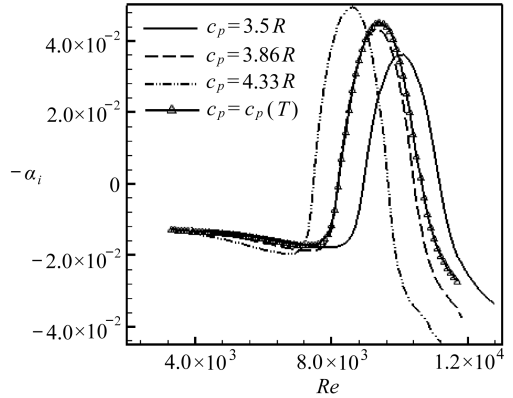


(b)第二模态

图4 中性曲线的比较

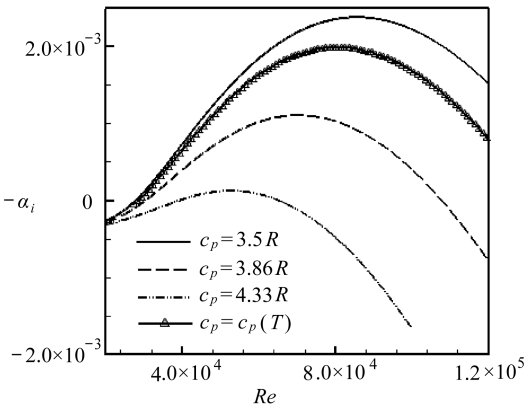


(a)第一模态

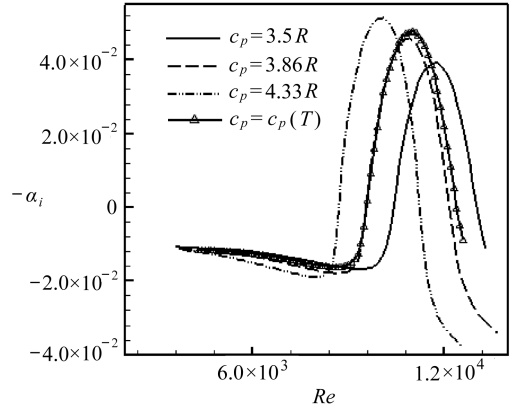


(b)第二模态

图5 不同比热容下同一频率波幅值增长率变化曲线



(a)第一模态



(b)第二模态

图6 不同比热容下同一频率波增长率变化曲线

为了验证频率为其它值,比热容值的变化对其增长率的影响是否具有相同的趋势,在第一

模态下取比热容为 $4.33R$, Reynolds 数为 40 000 的剖面增长率最大时的频率 $\omega = 0.294\ 257\ 63$, 在第二模态下取比热容为 $4.33R$, Reynolds 数为 10 000 的剖面增长率最大时的频率 $\omega = 1.745\ 833\ 70$ 进行研究, 结果如图 6(a) 和图 6(b) 所示. 其趋势和图 5 中所示的类似.

对于来流 Mach 数为 8 的计算结果表明, 比热容为变数时的结果和比热容取常值时的结果比较, 趋势同来流 Mach 数为 6 的情况基本一致.

3 结 论

即使对第一模态和第二模态波, 比热容随温度变化的情况似乎都可以用某一比热容取常值的情况的结果来近似, 但两个常值并不相等, 而且我们也无法事先确定比热容应取何常数. 因此, 选取某一合适的等效比热容值来近似代替比热容为温度函数的情况是不可行的. 在高超音速情况下, 做飞行器边界层的稳定性分析及转捩预测时, 必须考虑比热容随温度变化的因素.

参考文献:

- [1] 梁德旺, 李博, 容伟. 热完全气体的热力学特性及其 N-S 方程的求解[J]. 南京航空航天大学学报, 2003, **35**(4): 424-429.
- [2] Tannehill J C, Muggge P H. Improved curve fits for the thermodynamic properties of equilibrium air suitable for numerical computation using time-dependent or shock-capturing methods [R]. NASA CR-2470, 1974.
- [3] Srinivasan S, Tannehill J C, Weilmuenster K J. Simplified curve fits for the thermodynamic properties of equilibrium air[R]. NASA RP-1181, 1987.
- [4] Srinivasan S, Tannehill J C. Simplified curve fits for the transport properties of equilibrium air [R]. NASA CR-178411, 1987.
- [5] Gupta R N, Yos J M, Lee K P, Thompson R A. A review of reaction rates and thermodynamic and transport properties for an 11-species air model for chemical and thermal non-equilibrium calculations to 30 000 K[R]. NASA RP-1232, 1990.
- [6] Iannelli J. Direct computation of thermodynamic properties of chemically reacting air with consideration to CFD[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2003, **43**(4): 369-406.
- [7] 赵耕夫. 空气热力学参数对可压缩边界层线性稳定性流动稳定性的影响[J]. 空气动力学学报, 1986, **14**(1): 98-102.
- [8] 黄章峰, 曹伟, 周恒. 超音速平板边界层转捩中层流突变为湍流的机理-时间模式[J]. 中国科学, G 辑, 2005, **35**(5): 537-547.
- [9] 曹伟, 周恒. 二维高超音速边界层扰动演化的数值研究及小激波的存在对流场结构的影响[J]. 中国科学, G 辑, 2004, **34**(2): 203-212.
- [10] 黄章峰, 周恒. 超音速边界层中二维扰动的演化及小激波的产生[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(1): 1-8.
- [11] 董明, 罗纪生, 曹伟. 超音速平板边界层中扰动演化特征的数值研究[J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(6): 631-636.
- [12] 王新军, 罗纪生, 周恒. 平面槽道流中层流-湍流转捩的“breakdown”过程的内在机理[J]. 中国科学, G 辑, 2005, **35**(1): 71-78.
- [13] 瞿章华, 刘伟, 曾明. 高超声速空气动力学[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2001: 158-204.

- [14] 童秉纲,孔详言,邓国华. 气体动力学[M]. 北京:高等教育出版社,1990:342-345.
- [15] 张捷迁,章光华,陈允文. 真实流体力学(上册)[M]. 北京:清华大学出版社,1986:7-11.
- [16] 周光炯,严宗毅,许世雄,章克本. 流体力学(下册)[M]. 北京:高等教育出版社,2000:353-357.
- [17] 周恒,赵耕夫. 流动稳定性[M]. 北京:国防工业出版社,2004:91-93.

Effects of Variable Specific Heat on the Stability of Hypersonic Boundary Layer on a Flat Plate

JIA Wen-li, CAO Wei

(*Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China*)

Abstract: The gas temperature within hypersonic boundary layer flow is so high that the specific heat of gas is no longer a constant but relates with temperature. How variable specific heat to influence on boundary layer flow stability is worth researching. The effect of the variable specific heat on the stability of hypersonic boundary layer flows was studied and compared with the case of the specific heat to be supposed constant, based on the linear stability theory. It is found that the variable specific heat indeed has some effects on the neutral curves of both first-mode and second-mode waves, and on the maximum rate of growth either. Therefore, the relationship between specific heat and temperature should be considered in the study of the stability of the boundary layer.

Key words: two-dimensional hypersonic boundary layer; stability; variable specific heat