文章编号:1000-0887(2010)10-1181-10　

对边简支的矩形平面弹性问题的辛本征展开定理*

侯国林,　阿拉坦仓

(内蒙古大学 数学科学学院,呼和浩特 010021)

(陈伟球推荐)

摘要: 对来源于平面弹性问题的 Hamilton 算子的本征值问题进行了研究.在矩形域内含位移和应力的混合边界条件下,首先求解了相应算子的本征函数.接着,证明了本征函数系的完备性,这为施行分离变量法求解相应问题提供了可行性.最后,利用文中的辛本征展开定理获得了问题的一般解.

关 键 词: 平面弹性问题; Hamilton 系统; 辛正交性; 本征展开; Hamilton 算子

中图分类号: O175.3;O343.1　　　**文献标志码**: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.10.005

引　　言

数学物理和力学中的许多偏微分方程都可以化为无穷维 Hamilton 系统[1-4]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\boldsymbol{J}^{-1}\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta u},$$

其中,$\mathscr{H}$ 表示 Hamilton 泛函,$\delta/(\delta u)$ 是变分导数,且 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}$ 为单位辛算子.根据势算子的 Vainberg 定理[5],线性偏微分方程的 Hamilton 系统可等价地表示为

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}=\begin{pmatrix}A & F\\ G & -A^{*}\end{pmatrix}\boldsymbol{U},$$

其中,$\boldsymbol{U}$ 为状态空间中的向量值函数,$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}A & F\\ G & -A^{*}\end{pmatrix}$ 就是 Hamilton 算子.

利用结构力学与最优控制相模拟的理论,钟万勰[6]将 Hamilton 体系的理论引入了弹性力学,建立了理性求解弹性力学问题的新体系,求解了许多力学问题[7-8].新体系方法拓广了传统

---

* **收稿日期**: 2010-04-09; **修订日期**: 2010-09-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10962004);高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20070126002);内蒙古自治区自然科学基金资助项目(20080404MS0104)

作者简介: 侯国林(1980—),男,内蒙古人,教授,博士(E-mail:houguolin@163.com);
阿拉坦仓(1963—),男,内蒙古人,教授,博士,博士生导师(联系人.E-mail:alatanca@imu.edu.cn).

分离变量法的应用范围,导向了 Hamilton 算子的本征值问题. 因而需要研究 Hamilton 算子的谱理论,其中辛本征函数系的完备性是首要解决的问题.

文献[9]对 Hamilton 体系下各向同性平面电磁弹性固体问题的辛本征展开进行了研究. 最近,文献[10-11]得到了一些关于辛本征函数系完备性的理论结果,但是该文并没有考虑 Hamilton 算子出现约当型本征函数情形;由于结论成立的前提假设较强,文献[11]中的结果目前还不能用于考察力学领域中出现的 Hamilton 算子本征函数系的完备性. 然而,在平面弹性问题、板弯曲等问题的相应边界条件下,导出的 Hamilton 算子都出现约当型本征函数. 虽然,含有约当型本征函数的辛展开已经应用于许多实际问题,特别是非自伴问题[12-13],但相应的展开定理还没有给出严格的数学证明.

对于 Hamilton 体系下的平面弹性问题,我们利用一种方法证明了相应算子包含约当型本征函数系的完备性,并利用证明的展开定理给出了该问题的 Saint-Venant 解和被 Saint-Venant 原理覆盖掉的解的一般形式.

1 预 备 知 识

在不特别指出的情况下,文中始终用 X 表示 Hilbert 空间. 对于一个线性算子 T,$\mathfrak{D}(T)$ 表示 T 的定义域 . $\boldsymbol{I}_n$ 表示 n 阶单位矩阵.

现在叙述一些定义.

定义 1.1 设 $\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} A & F \\ G & -A^* \end{pmatrix}:\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})\subset X\times X\to X\times X$ 是稠定闭线性算子,其中 A 为 X 中的稠定闭算子,F 和 G 为(对称)自伴算子,则称 $\boldsymbol{H}$ 为无穷维 Hamilton 算子. 特别地,当 $A=0$,称 $\boldsymbol{H}$ 为斜对角无穷维 Hamilton 算子(ODH),此时称下列发展方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}(t,x)}{\partial t}=\boldsymbol{HU}+\boldsymbol{f}$$

为可解耦的无穷维 Hamilton 系统. 这里 $\boldsymbol{f}$ 表示外力向量.

定义 1.2 设 λ 是空间 X 中线性算子 T 的本征值. 如果存在非零元 $u^0\in\mathfrak{D}(T)$ 使得 $Tu^0=\lambda u^0$,则 u^0 称为 T 的基本本征函数. 如果存在 $u^1\in\mathfrak{D}(T)$ 使得

$$Tu^1=\lambda u^1+u^0,\qquad u^1\neq 0,$$

则 u^1 被称为 T 的(一阶)约当型本征函数. 一般地,如果 T 的 $k-1$ 阶约当型本征函数 u^{k-1} 已经定义,那么它的 k 阶约当型本征函数 u^k 由下式定义:

$$Tu^k=\lambda u^k+u^{k-1},\qquad u^k\neq 0.$$

2 平面弹性问题的辛本征展开

2.1 基本方程和 Hamilton 系统

直角坐标系下的平面弹性问题的基本方程可表示如下:

(I) 应力-位移关系:

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial w}{\partial z}\right),\tag{1}$$

$$\sigma_z=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right),\tag{2}$$

$$\tau_{xz}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\nu\frac{\partial w}{\partial x}\right);\tag{3}$$

(Ⅱ) 平衡方程：

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+F_z=0,\tag{4}$$

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+F_x=0.\tag{5}$$

考虑图 1 所示的双连杆支承的平面弹性模型：

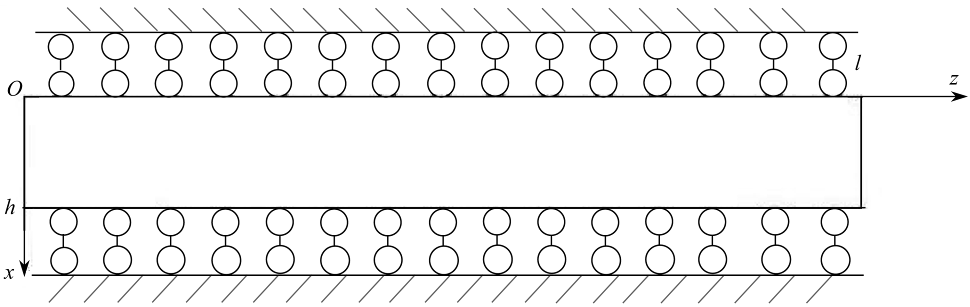

图 1　问题的图示和建立的坐标系

坐标系的选择如上图所示.

在矩形域 $\{(x,z)\mid 0\leqslant x\leqslant h, 0\leqslant z\leqslant l\}$ 内，由位移与应力构成的混合边界条件为

$$u=\tau_{xz}=0,\qquad x=0,\ x=h,\tag{6}$$

这里用变量 z 去模拟 Hamilton 系统中的时间变量，并用点表示关于 z 的偏导数，即$(\cdot)=\partial/\partial z$. 为简洁，我们省略应力 σ_z,τ_{xz}的下标，分别表为 σ 和 τ. 根据式(2)～(4)，我们有

$$\dot u=-\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{2(1+\nu)}{E}\tau,\ \dot\sigma=-\frac{\partial\tau}{\partial x}-F_z,\ \dot w=-\nu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1-\nu^2}{E}\sigma.\tag{7}$$

运用方程(5)并结合方程(1)，有

$$\dot\tau=-\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}-F_x=-E\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial\sigma}{\partial x}-F_x.\tag{8}$$

我们选取应力 τ，位移 w 作为 $u,-\sigma$ 的对偶变量. 根据方程(7)和(8)，我们得到下列可解耦的无穷维 Hamilton 系统

$$\frac{\partial\boldsymbol U}{\partial z}=\begin{pmatrix}0&0&\dfrac{2(1+\nu)}{E}&-\dfrac{\partial}{\partial x}\\0&0&\dfrac{\partial}{\partial x}&0\\-E\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}&\nu\dfrac{\partial}{\partial x}&0&0\\-\nu\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\nu^2-1}{E}&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol U+\boldsymbol f,\tag{9}$$

其中

$$\boldsymbol U=(u,-\sigma,\tau,w)^{\mathrm T},\quad \boldsymbol f=(0,F_z,-F_x,0)^{\mathrm T}$$

分别为状态向量和外力向量.

2.2 本征函数系的完备性

为求解非齐次方程(9),应先求解下列齐次方程:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial z}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ -E\frac{\partial^2}{\partial x^2} & \nu\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ -\nu\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\nu^2-1}{E} & 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{U}. \tag{10}$$

对方程(10)而言,自然是应用分离变量法将其约化为本征值问题. 为此,将状态向量表示为

$$\boldsymbol{U}(x,z)=T(z)\boldsymbol{Q}(x). \tag{11}$$

将方程(11)代入方程(10),得到

$$\boldsymbol{HQ}(x)=\lambda\boldsymbol{Q}(x),$$

其中, λ 为本征值, $\boldsymbol{Q}(x)$ 为本征函数,且 $\boldsymbol{H}$ 是如下形式给出的一个 ODH,

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ 0 & 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 \\ -E\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} & \nu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 & 0 \\ -\nu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & \frac{\nu^2-1}{E} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

对于算子(12)而言, 必须合适指定它所在的空间和定义域. 这里我们选择 Hilbert 空间 $X=L^2(0,h)$,并令 $W=X\times X\times X\times X$. 根据边界条件(6),算子(12)的定义域为

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})=\left\{\begin{pmatrix} u \\ -\sigma \\ \tau \\ w \end{pmatrix}\in W \;\middle|\; \begin{array}{l} u(0)=u(h)=\tau(0)=\tau(h)=0, \\ u'\in X,\text{且 } u',\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau},w\text{ 绝对连续} \end{array}\right\}.$$

通过直接计算,算子(12)相应于零本征值的基本本征函数 $\boldsymbol{\Psi}^0$ 和 一阶本征函数 $\boldsymbol{\Psi}^1$ 为

$$\boldsymbol{\Psi}^0(x)=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\Psi}^1(x)=\left(0,\frac{E}{\nu^2-1},0,1\right)^{\mathrm{T}}. \tag{13}$$

算子(12)的所有非零本征值为 $\lambda_n(n=\pm 1,\ \pm 2,\cdots)$,相应的本征函数 $\boldsymbol{Q}_n^0,\boldsymbol{Q}_n^1$ 为

$$\begin{cases} \lambda_n=\frac{n\pi}{h},\ \boldsymbol{Q}_n^0(x)=\left(-\sin\lambda_n x,\ -\frac{\lambda_n E}{1+\nu}\cos\lambda_n x,\ -\frac{\lambda_n E}{1+\nu}\sin\lambda_n x,\cos\lambda_n x\right)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{Q}_n^1=\left(\frac{\nu-3}{2\lambda_n(1+\nu)}\sin\lambda_n x,\ \frac{E}{2(1+\nu)}\cos\lambda_n x,\right. \\ \qquad\left.-\frac{E}{2(1+\nu)}\sin\lambda_n x,\ \frac{\nu-3}{2\lambda_n(1+\nu)}\cos\lambda_n x\right)^{\mathrm{T}}, \end{cases} \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{Q}_n^1$ 为 $\boldsymbol{H}$ 相应于 λ_n 的一阶本征函数.

下面引理在文中主要结果的证明中起关键作用.

引理 2.1 算子(12)的本征函数 $\boldsymbol{\Psi}^0(x)$, $\boldsymbol{\Psi}^1(x)$, $\{\boldsymbol{Q}_n^0(x)\}_{-\infty}^{\infty}$ 和 $\{\boldsymbol{Q}_n^1(x)\}_{-\infty}^{\infty}$($n$ 为非零整数)间成立如下辛正交关系:

$$\langle \boldsymbol{Q}_n^0(x), \boldsymbol{Q}_m^0(x)\rangle = \langle \boldsymbol{Q}_n^1(x), \boldsymbol{Q}_m^1(x)\rangle = 0, \qquad n, m \text{ 为任意整数}, \tag{15a}$$

$$\langle \boldsymbol{\Psi}^i(x), \boldsymbol{Q}_n^j(x)\rangle = 0, \qquad i, j = 0, 1 \text{ 且为任意整数}, \tag{15b}$$

$$\langle \boldsymbol{\Psi}^0(x), \boldsymbol{\Psi}^1(x)\rangle = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \tag{15c}$$

$$\langle \boldsymbol{Q}_n^0(x), \boldsymbol{Q}_m^1(x)\rangle = \begin{cases} 0, & m \neq -n, \\ -\dfrac{2Eh}{(1+\nu)^2}, & m = -n, \end{cases} \tag{15d}$$

其中辛内积定义为

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle = \int_0^h \boldsymbol{v}_1(x)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J} \boldsymbol{v}_2(x)\,\mathrm{d}x, \text{ 对于任意的 } \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in W, \text{且 } \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{I}_2 \\ -\boldsymbol{I}_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

引理 2.2[14] 下列正交函数集在 Hilbert 空间 $L^2(0,h)$ 中按标准的内积是完备的,进而对于任意的 $\phi \in L^2(0,h)$,相应的 Fourier 级数在 $L^2(0,h)$ 中收敛于 ϕ.

(i) $\varphi_n(x) = \sin\left(\dfrac{n\pi x}{h}\right), \qquad n \geqslant 1, n \in \mathbf{Z}$;

(ii) $\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_n(x) = \cos\left(\dfrac{n\pi x}{h}\right), \qquad n \geqslant 1, n \in \mathbf{Z}$.

下面的定理是本文的主要结果,它对文中考虑的平面弹性问题施行 Hamilton 体系下的分离变量法提供了理论保障.

定理 2.1 算子(12)的本征函数系(13)和(14)在空间 W 中 Cauchy 主值意义下完备. 换言之,对于任意的 $\boldsymbol{g}(x) \in W$,都存在常数 C^0, C^1, $\{g_{\pm n}^0\}_{n=1}^{+\infty}$ 和 $\{g_{\pm n}^1\}_{n=1}^{+\infty}$ 使得

$$\boldsymbol{g}(x) = C^0\boldsymbol{\Psi}^0 + C^1\boldsymbol{\Psi}^1 + \sum_{n=1}^{\infty}[g_n^0\boldsymbol{Q}_n^0(x) + g_{-n}^0\boldsymbol{Q}_{-n}^0(x) + g_n^1\boldsymbol{Q}_n^1(x) + g_{-n}^1\boldsymbol{Q}_{-n}^1(x)].$$

证明 对于任意的 $\boldsymbol{g}(x) \in W$,将其写为矩阵形式 $\boldsymbol{g}(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x))^{\mathrm{T}}$. 根据引理 2.1,取

$$C^0 = \frac{1-\nu^2}{Eh}\langle \boldsymbol{g}(x), \boldsymbol{J\Psi}^1(x)\rangle = \frac{1-\nu^2}{Eh}\int_0^h g_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{h}\int_0^h g_4(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

$$C^1 = -\frac{1-\nu^2}{Eh}\langle \boldsymbol{g}(x), \boldsymbol{J\Psi}^0(x)\rangle = \frac{\nu^2-1}{Eh}\int_0^h g_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

于是得到

$$C^0\boldsymbol{\Psi}^0 + C^1\boldsymbol{\Psi}^1 = \frac{1}{h}\left(0, \int_0^h g_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi, 0, \int_0^h g_4(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)^{\mathrm{T}}. \tag{16}$$

对于任意的正整数 n, 我们取

$$g_n^1 = \frac{1}{\langle \boldsymbol{Q}_n^1(x), \boldsymbol{Q}_{-n}^0(x)\rangle}\langle \boldsymbol{g}(x), \boldsymbol{Q}_{-n}^0(x)\rangle = \frac{(1+\nu)^2}{2Eh}\langle \boldsymbol{g}(x), \boldsymbol{Q}_{-n}^0(x)\rangle =$$

$$-\frac{(1+\nu)}{2Eh}\int_0^h((1+\nu)g_3(\xi) + \lambda_n g_1(\xi)E)\sin\lambda_n\xi\,\mathrm{d}\xi +$$

$$\frac{(1+\nu)}{2Eh}\int_0^h((1+\nu)g_2(\xi)-\lambda_n g_4(\xi)E)\cos\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi,$$

$$g_n^0=\frac{\langle\boldsymbol{g}(x),\boldsymbol{Q}_{-n}^1(x)\rangle}{\langle\boldsymbol{Q}_n^0(x),\boldsymbol{Q}_{-n}^1(x)\rangle}=\frac{(1+\nu)^2}{2Eh}\langle\boldsymbol{g}(x),\boldsymbol{Q}_{-n}^1(x)\rangle=$$

$$\frac{(1+\nu)}{4\lambda_n Eh}\int_0^h((\nu-3)g_3(\xi)-\lambda_n g_1(\xi)E)\sin\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi+$$

$$\frac{(1+\nu)}{4\lambda_n Eh}\int_0^h((\nu-3)g_2(\xi)+\lambda_n g_4(\xi)E)\cos\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi,$$

$$g_{-n}^1=\frac{\langle\boldsymbol{g}(x),\boldsymbol{Q}_n^0(x)\rangle}{\langle\boldsymbol{Q}_{-n}^1(x),\boldsymbol{Q}_n^0(x)\rangle}=\frac{(1+\nu)^2}{2Eh}\langle\boldsymbol{g}(x),\boldsymbol{Q}_n^0(x)\rangle=$$

$$\frac{(1+\nu)}{2Eh}\int_0^h((1+\nu)g_3(\xi)-\lambda_n g_1(\xi)E)\sin\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi+$$

$$\frac{(1+\nu)}{2Eh}\int_0^h((1+\nu)g_2(\xi)+\lambda_n g_4(\xi)E)\cos\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi$$

和

$$g_{-n}^0=\frac{\langle\boldsymbol{g}(x),\boldsymbol{Q}_n^1(x)\rangle}{\langle\boldsymbol{Q}_{-n}^0(x),\boldsymbol{Q}_n^1(x)\rangle}=-\frac{(1+\nu)^2}{2Eh}\langle\boldsymbol{g}(x),\boldsymbol{Q}_n^1(x)\rangle=$$

$$\frac{(1+\nu)}{4\lambda_n Eh}\int_0^h((\nu-3)g_3(\xi)+\lambda_n g_1(\xi)E)\sin\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi+$$

$$\frac{(1+\nu)}{4\lambda_n Eh}\int_0^h((3-\nu)g_2(\xi)+\lambda_n g_4(\xi)E)\cos\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi.$$

因为

$$g_n^0\boldsymbol{Q}_n^0+g_{-n}^0\boldsymbol{Q}_{-n}^0=$$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{(1+\nu)}{2\lambda_n Eh}\left(\displaystyle\int_0^h(3-\nu)g_2(\xi)\cos\lambda_n\xi+\lambda_n g_1(\xi)E\sin\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\lambda_n x\\ \dfrac{1}{2h}\left(\displaystyle\int_0^h(3-\nu)g_2(\xi)\cos\lambda_n\xi+\lambda_n g_1(\xi)E\sin\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi\right)\cos\lambda_n x\\ \dfrac{1}{2h}\left(\displaystyle\int_0^h(3-\nu)g_3(\xi)\sin\lambda_n\xi-\lambda_n g_4(\xi)E\cos\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\lambda_n x\\ \dfrac{(1+\nu)}{2\lambda_n Eh}\left(\displaystyle\int_0^h(\nu-3)g_3(\xi)\sin\lambda_n\xi+\lambda_n g_4(\xi)E\cos\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi\right)\cos\lambda_n x\end{pmatrix}$$

且

$$g_n^1\boldsymbol{Q}_n^1+g_{-n}^1\boldsymbol{Q}_{-n}^1=$$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{(\nu-3)}{2\lambda_n Eh}\left(\displaystyle\int_0^h(1+\nu)g_2(\xi)\cos\lambda_n\xi-\lambda_n g_1(\xi)E\sin\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\lambda_n x\\ \dfrac{1}{2h}\left(\displaystyle\int_0^h(1+\nu)g_2(\xi)\cos\lambda_n\xi-\lambda_n g_1(\xi)E\sin\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi\right)\cos\lambda_n x\\ \dfrac{1}{2h}\left(\displaystyle\int_0^h(1+\nu)g_3(\xi)\sin\lambda_n\xi+\lambda_n g_4(\xi)E\cos\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\lambda_n x\\ \dfrac{(3-\nu)}{2\lambda_n Eh}\left(\displaystyle\int_0^h(1+\nu)g_3(\xi)\sin\lambda_n\xi+\lambda_n g_4(\xi)E\cos\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi\right)\cos\lambda_n x\end{pmatrix},$$

我们有

$$g_n^0\boldsymbol{Q}_n^0 + g_{-n}^0\boldsymbol{Q}_{-n}^0 + g_n^1\boldsymbol{Q}_n^1 + g_{-n}^1\boldsymbol{Q}_{-n}^1 = \frac{2}{h}\begin{pmatrix} \left(\int_0^h g_1(\xi)\sin\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\lambda_n x \\ \left(\int_0^h g_2(\xi)\cos\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi\right)\cos\lambda_n x \\ \left(\int_0^h g_3(\xi)\sin\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\lambda_n x \\ \left(\int_0^h g_4(\xi)\cos\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi\right)\cos\lambda_n x \end{pmatrix}.$$

注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{h}\int_0^h g_i(\xi)\sin\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\lambda_n x, \qquad i = 1,3$$

和

$$\frac{1}{h}\int_0^h g_j(\xi)\mathrm{d}\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{h}\int_0^h g_j(\xi)\cos\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi\right)\cos\lambda_n x, \qquad j = 2,4$$

是 $g_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ 按 $L^2(0,h)$ 中正交函数系 $\{\sin(n\pi x/h)\}_{n=1}^{+\infty}$ 或 $\{1,\cos(\pi x/h),\cos(2\pi x/h),\cdots\}$ 展开的 Fourier 级数,应用引理 2.2,可得

$$C^0\boldsymbol{\Psi}^0 + C^1\boldsymbol{\Psi}^1 + \sum_{n=1}^{\infty}[g_n^0\boldsymbol{Q}_n^0(x) + g_{-n}^0\boldsymbol{Q}_{-n}^0(x) + g_n^1\boldsymbol{Q}_n^1(x) + g_{-n}^1\boldsymbol{Q}_{-n}^1(x)] =$$

$$C^0\boldsymbol{\Psi}^0 + C^1\boldsymbol{\Psi}^1 + \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}[g_n^0\boldsymbol{Q}_n^0(x) + g_{-n}^0\boldsymbol{Q}_{-n}^0(x) + g_n^1\boldsymbol{Q}_n^1(x) + g_{-n}^1\boldsymbol{Q}_{-n}^1(x)] =$$

$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^h g_2(\xi)\mathrm{d}\xi \\ 0 \\ \int_0^h g_4(\xi)\mathrm{d}\xi \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{+\infty}\begin{pmatrix} \left(\frac{2}{h}\int_0^h g_1(\xi)\sin\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\lambda_n x \\ \left(\frac{2}{h}\int_0^h g_2(\xi)\cos\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi\right)\cos\lambda_n x \\ \left(\frac{2}{h}\int_0^h g_3(\xi)\sin\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\lambda_n x \\ \left(\frac{2}{h}\int_0^h g_4(\xi)\cos\lambda_n\xi\mathrm{d}\xi\right)\cos\lambda_n x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \\ g_4(x) \end{pmatrix} = \boldsymbol{g}(x),$$

这就完成了定理的证明. □

2.3 方程(9)的一般解

根据定理 2.1,本征函数系(13)和(14)在空间 W 中 Cauchy 主值意义下完备. 根据叠加原理,方程(9)的解有如下形式:

$$\boldsymbol{U}(x,z) = S^0(z)\boldsymbol{\Psi}^0 + S^1(z)\boldsymbol{\Psi}^1 + \sum_{n=1}^{\infty}[T_n^0(z)\boldsymbol{Q}_n^0(x) + T_{-n}^0(z)\boldsymbol{Q}_{-n}^0(x) + T_n^1(z)\boldsymbol{Q}_n^1(x) + T_{-n}^1(z)\boldsymbol{Q}_{-n}^1(x)]. \tag{17}$$

假设方程(9)的非齐次项 $\boldsymbol{f} = (0,F_z, -F_x,0)^{\mathrm{T}}$ 可以展开为

$$\boldsymbol{f} = K^0(z)\boldsymbol{\Psi}^0 + K^1(z)\boldsymbol{\Psi}^1 + \sum_{n=1}^{\infty}[f_n^0(z)\boldsymbol{Q}_n^0(x) + f_{-n}^0(z)\boldsymbol{Q}_{-n}^0(x) + f_n^1(z)\boldsymbol{Q}_n^1(x) + f_{-n}^1(z)\boldsymbol{Q}_{-n}^1(x)]. \tag{18}$$

据本征函数系的辛正交性，Fourier 系数 $K^0(z)$，$K^1(z)$，$f^0_{\pm n}(z)$，$f^1_{\pm n}(z)$ 为

$$\begin{cases} K^0(z) = \dfrac{1-\nu^2}{Eh}\displaystyle\int_0^h F_z(\epsilon, z)\,\mathrm{d}\epsilon, \\ K^1(z) = \dfrac{\nu^2-1}{Eh}\displaystyle\int_0^h F_z(\epsilon, z)\,\mathrm{d}\epsilon, \\ f^0_{\pm n}(z) = \dfrac{(1+\nu)(\nu-3)}{4\lambda_n Eh}\displaystyle\int_0^h (\pm F_z(\epsilon, z)\cos\lambda_n\epsilon - F_x(\epsilon, z)\sin\lambda_n\epsilon)\,\mathrm{d}\epsilon, \\ f^1_{\pm n}(z) = \dfrac{(1+\nu)^2}{2Eh}\displaystyle\int_0^h (F_z(\epsilon, z)\cos\lambda_n\epsilon \pm F_x(\epsilon, z)\sin\lambda_n\epsilon)\,\mathrm{d}\epsilon. \end{cases} \tag{19}$$

将方程(17)和(18)代入方程(9)后，可得到

$$\begin{cases} S^1(z) = s^1 + \displaystyle\int_0^z K^1(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \\ S^0(z) = (s^0 + zs^1) + \displaystyle\int_0^z K^0(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^z\int_0^\eta K^1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\eta, \\ T^1_n(z) = c^1_n \mathrm{e}^{\lambda_n z} + \displaystyle\int_0^z f^1_n(\tau)\,\mathrm{e}^{\lambda_n(z-\tau)}\,\mathrm{d}\tau, \\ T^0_n(z) = (c^0_n + zc^1_n)\mathrm{e}^{\lambda_n z} + \displaystyle\int_0^z f^0_n(\tau)\,\mathrm{e}^{\lambda_n(z-\tau)}\,\mathrm{d}\tau + \\ \qquad \displaystyle\int_0^z\int_0^\eta f^1_n(\tau)\,\mathrm{e}^{\lambda_n(z-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\eta, \\ n = \pm 1, \pm 2, \cdots, \end{cases} \tag{20}$$

其中，s^0，s^1，c^0_n 和 c^1_n 为任意常数，它们由 z 侧边的边界条件决定.

将方程(19)和(20)代入式(17)中，方程(9)的一般解 $\boldsymbol{U}(x, z)$ 为

$$\boldsymbol{U}(x, z) = \boldsymbol{U}_0(x, z) + \boldsymbol{U}_1(x, z). \tag{21}$$

这里

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_0(x, z) &= (u(x, z), -\sigma(x, z), \tau(x, z), w(x, z))^{\mathrm{T}} = \\ &\quad s^0 \underline{\boldsymbol{\Psi}^0} + s^1(\underline{\boldsymbol{\Psi}^1 + z\boldsymbol{\Psi}^0}) + \\ &\quad \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 0 \\ \displaystyle\int_0^z\int_0^h F_z(\epsilon, \tau)\,\mathrm{d}\epsilon\,\mathrm{d}\tau \\ 0 \\ \dfrac{\nu^2-1}{E}\displaystyle\int_0^z\int_0^\eta\int_0^h F_z(\epsilon, \tau)\,\mathrm{d}\epsilon\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\eta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{22}$$

且

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_1(x, z) &= (u(x, z), -\sigma(x, z), \tau(x, z), w(x, z))^{\mathrm{T}} = \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty}\{c^0_n\boldsymbol{\Lambda}^0_n(x, z) + c^1_n\boldsymbol{\Lambda}^1_n(x, z) + c^0_{-n}\boldsymbol{\Lambda}^0_{-n}(x, z) + c^1_{-n}\boldsymbol{\Lambda}^1_{-n}(x, z)\} + \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^z(\boldsymbol{\Theta}_n(x, z, \tau) + \boldsymbol{\Theta}_{-n}(x, z, \tau))\,\mathrm{d}\tau + \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^z(\boldsymbol{\Omega}_n(x, z, \eta) + \boldsymbol{\Omega}_{-n}(x, z, \eta))\,\mathrm{d}\eta, \end{aligned} \tag{23}$$

其中

$$\Lambda_n^0(x,z)=\mathrm{e}^{\lambda_n z}\boldsymbol{Q}_n^0(x),\ \Lambda_n^1(x,z)=\mathrm{e}^{\lambda_n z}(\boldsymbol{Q}_n^1(x)+z\,\boldsymbol{Q}_n^0(x)),$$

$$\Theta_n(x,z,\tau)=(f_n^0(\tau)\boldsymbol{Q}_n^0(x)+f_n^1(\tau)\boldsymbol{Q}_n^1(x))\mathrm{e}^{\lambda_n(z-\tau)},$$

$$\Omega_n(x,z,\eta)=\boldsymbol{Q}_n^0(x)\int_0^\eta f_n^1(\tau)\mathrm{e}^{\lambda_n(z-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

式(22)给出了所有的Saint-Venant解,这是零特征值对应的本征解.解Ψ^0和$\Psi^1+z\Psi^0$的物理意义分别是z向的刚体位移和单轴拉伸.解(23)通常由Saint-Venant原理所覆盖,这是非零本征值对应的本征解,它对于满足两端($z=0$及l)的边界条件或域内有突变载荷等情形是非常重要的.

3 数值算例

令$h=1,l=10$.我们考虑矩形区域$\Omega=\{(x,z)\mid 0\leqslant x\leqslant h,0\leqslant z\leqslant l\}$和$z$侧边的如下边界条件:

$$\sigma_z=\tau_{xz}=0,\qquad z=0,$$

$$\sigma_z=-2\cos x,\tau_{xz}=0,\qquad z=l.$$

根据上面的条件,可确定一般解(21)中的任意常数$s^0,s^1,c_{\pm n}^0$及$c_{\pm n}^1$.一些计算结果见下表($n=30$).

表1 计算结果

(x,z)	u	σ_z	τ_{xz}	w
(0.05,0.50)	$5.288\ 18\times10^{-14}$	$1.028\ 28\times10^{-12}$	$2.128\ 61\times10^{-13}$	$-4.377\ 91\times10^{-13}$
(0.25,5.00)	$2.124\ 39\times10^{-7}$	$6.756\ 5\times10^{-7}$	$6.352\ 11\times10^{-7}$	$-2.048\ 21\times10^{-7}$
(0.60,8.50)	0.057 774 0	−0.048 551 2	0.123 646 0	0.012 007 8
(0.96,9.90)	0.016 996 1	−0.485 900 0	0.035 782 1	0.054 133 6

4 结 论

文中用Hamilton体系下的辛本征展开精确求解了平面弹性问题,更重要的是,证明了相应本征函数系的完备性.文中定理为平面弹性问题施行Hamilton体系下的分离变量法提供了理论保证,而且基于展开定理还得到了问题的一般解.

参考文献:

[1] 阿拉坦仓, 张鸿庆, 钟万勰. 矩阵多元多项式的带余除法及其应用[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(7): 661-668.

[2] 阿拉坦仓, 张鸿庆, 钟万勰. 一类偏微分方程的Hamilton正则表示[J]. 力学学报, 1999, **31**(3): 347-357.

[3] 陈勇, 郑宇, 张鸿庆. 一些数学物理问题中的Hamilton方程[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(1): 19-24.

[4] REN Wen-xiu, Alatancang. An algorithm and its application for obtaining some kind of infinite-dimensional Hamiltonian canonical formulation[J]. *Chinese Physics*, 2007, **16** (11):

3154-3160.

[5] Vainberg M M. *Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators*[M]. San Francisco: Holden-Day, 1964.

[6] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995.

[7] Lim C W, Lü C F, Xiang Y, Yao W. On new symplectic elasticity approach for exact free vibration solutions of rectangular Kirchhoff plates [J]. *Int J Eng Sci*, 2009, **47** (1):131-140.

[8] Yao W, Zhong W X, Lim C W. *Symplectic Elasticity*[M]. Singapore:World Scientific Publishing, 2009.

[9] HOU Guo-lin, Alatancang. On the feasibility of variable separation method based on Hamiltonian system for plane magnetoelectroelastic solids[J]. *Chinese Physics B*, 2008, **17**(8): 2753-2758.

[10] HOU Guo-lin, Alatancang. Completeness of eigenfunction systems for off-diagonal infinite-dimensional Hamiltonian operators[J]. *Commun Theor Phys*, 2010,**53**(2): 237-241.

[11] Alatancang, Wu D Y. Completeness in the sense of Cauchy principal value of the eigenfunction systems of infinite dimensional Hamiltonian operator[J]. *Sci China Ser A*, 2009,**52**(1): 173-180.

[12] Zou G. An exact symplectic geometry solution for the static and dynamic analysis of Reissner plates[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1998, **156**(1/4): 171-178.

[13] Zhong Y, Li R. Exact bending analysis of fully clamped rectangular thin plates subjected to arbitrary loads by new symplectic approach[J]. *Mechanics Research Communications*, 2009,**36**(6): 707-714.

[14] Elias M S, Rami Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*[M]. Oxford: Princeton University Press, 2003.

Symplectic Eigenfunction Expansion Theorem for the Rectangular Plane Elasticity Problems With Two Opposite Simply Supported

HOU Guo-lin, Alatancang

(*School of Mathematical Sciences*, *Inner Mongolia University*, *Hohhot* 010021, *P. R. China*)

Abstract: The eigenvalue problem of the Hamiltonian operator associated with the plane elasticity problems was investigated. First, the eigenfunctions of the operator with the mixed boundary conditions for the displacement and stress in the rectangular region was solved directly. Then, the completeness of the eigenfunctions was proved, thereby demonstrating the feasibility of using separation of variables to solve the problems. Finally, the general solution was obtained by using the symplectic eigenfunction expansion theorem.

Key words: plane elasticity problems; Hamiltonian system; symplectic orthogonality; eigenfunction expansion; Hamiltonian operator