文章编号:1000-0887(2010)11-1382-11

求解奇异摄动边值问题的精细积分法*

富明慧[1], 张文志[1], S·V·薛申宁[2]

(1. 中山大学 应用力学与工程系,广州 510275;
2. 莫斯科大学 力学数学系,莫斯科 119992, 俄罗斯)

(郭兴明推荐)

摘要: 提出了一种求解一端有边界层的奇异摄动边值问题的精细方法. 首先将求解区域均匀离散,由状态参量在相邻节点间的精细积分关系式确定一组代数方程,并将其写成矩阵形式. 代入边界条件后,该代数方程组的系数矩阵可化为块三对角形式,针对这一特性,给出了一种高效递推消元方法. 由于在离散过程中,精细积分关系式不会引入离散误差,故所提出的方法具有极高的精度. 数值算例充分证明了所提出方法的有效性.

关 键 词: 奇异摄动问题; 一阶常微分方程组; 两点边值问题; 精细积分法; 递推方法
中图分类号: O175.8; O241.81　　**文献标志码:** A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2010.11.011

引　　言

奇异摄动问题经常出现在流体力学、流体动力学、航空动力学、等离子体动力学、磁流体动力学、海洋学、最优控制、化学反应等许多领域. 近年来,在求解奇异摄动问题方面取得了很多进展,如渐进展开法[1-2]、有限差分法[3-5]、有限元法[6]、边值方法[7]、初值方法[8-9]、样条方法[10-11]等.

钟万勰提出的精细积分法最早被用来求解结构动力问题[12]. 由于具有高精度、高效率等诸多优点,其应用范围逐步被拓展到热传导问题、随机振动问题等初值问题[13-15],以及一些两点边值问题[16-17].

本文将精细积分法应用于一端有边界层的奇异摄动问题,并得到了一种高精度高效率的求解方法. 由于在将常微分方程"离散"(即代数化)的过程中,利用相邻结点间状态参量的精细积分关系式建立代数方程组,不会引入离散误差,故本文方法的计算精度几乎与离散步长无关,这样即使在边界层也无需采用过密的网格. 与现有其它求解奇异摄动边值问题的数值方法相比,本文方法在精度和适用范围上均表现出明显的优势.

1　常微分奇异边值问题的精细解法

考虑如下的线性奇异摄动问题:

---

* **收稿日期:** 2010-07-08; **修订日期:** 2010-09-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10672194);中俄 NSFC-RFBR 资助项目(10811120012)
作者简介: 富明慧(1966—),男,黑龙江人,满族,教授,博士,博士生导师(联系人. E-mail:stsfmh@mail.sysu.edu.cn).

$$\varepsilon y''(x) + Ay'(x) + By(x) = f(x), \tag{1}$$

$$y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta, \tag{2}$$

其中, ε 为小参数($0 < \varepsilon \ll 1$), α, β, A, B 已知.

令 $p = y'$, 有

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{H}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r}, \qquad x \in [a,b], \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix},\ \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -B/\varepsilon & -A/\varepsilon \end{pmatrix},\ \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x)/\varepsilon \end{pmatrix}.$$

式(3)的解可由下式给出:

$$\boldsymbol{v}(x) = \exp(\boldsymbol{H}x)\boldsymbol{v}_0 + \int_0^x \exp[\boldsymbol{H}(x-s)]\boldsymbol{r}(s)\,\mathrm{d}s. \tag{4}$$

以步长 $\tau = (b-a)/m$ 将区间 $[a,b]$ 均匀划分为 m 等份. 则式(3)的解可表示为[17-18]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{i+1} &= \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \exp[\boldsymbol{H}(x_{i+1}-s)]\boldsymbol{r}(s)\,\mathrm{d}s = \\ &\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_i + \int_0^{\tau} \exp[\boldsymbol{H}(\tau-s)]\boldsymbol{r}(x_i+s)\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $x_i = i\tau$, $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}(x_i)$ $(i = 0,1,\cdots,m)$, 传递矩阵 $\boldsymbol{T} = \exp(\boldsymbol{H}\tau)$ 可由精细积分法"精确"给出[12].

式(5)的积分项对应于非齐次方程的特解, 它可采用特解精细积分法[18-19]、数值积分法[20-22]进行计算, 当然也可通过增维精细积分的方法将非齐次方程化为齐次方程进行求解[17].

式(5)可视为式(3)的一个差分方程. 与常规差分类方法所不同的是, 本文给出的差分方程(5)没有引入任何离散误差, 且传递矩阵 $\boldsymbol{T}$ 与非齐次方程特解均采用精细积分法"精确"计算, 故精度与步长的选取几乎无关, 这也是本文方法高精度的根源所在.

将式(5)写为下面的矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} -\boldsymbol{T} & \boldsymbol{I} & & & \\ & -\boldsymbol{T} & \boldsymbol{I} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\boldsymbol{T} & \boldsymbol{I} \\ & & & & -\boldsymbol{T} \quad \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{v}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_{m-1} \\ \boldsymbol{v}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1^* \\ \boldsymbol{v}_2^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_{m-1}^* \\ \boldsymbol{v}_m^* \end{pmatrix}, \tag{6}$$

其中

$$\boldsymbol{v}_i^* = \int_0^{\tau} \exp[\boldsymbol{H}(\tau-s)]\boldsymbol{r}(x_i+s)\,\mathrm{d}s \qquad (i = 1,2,\cdots,m).$$

令

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

将边界条件(2)代入式(6)可得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{\mathrm{L}} & \boldsymbol{C} & & & \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ & & & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{m-1} \\ \boldsymbol{u}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{d}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{d}_{m-1} \\ \boldsymbol{d}_m \end{pmatrix}, \tag{8}$$

式中

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -T_{12} & 1 \\ -T_{22} & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{L}} = \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} -T_{12} & 0 \\ -T_{22} & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -T_{11} \\ 0 & -T_{21} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_i = \begin{pmatrix} p_{i-1} \\ y_i \end{pmatrix} \qquad (i = 1,2,\cdots,m-1),\ \boldsymbol{u}_m = \begin{pmatrix} p_{i-1} \\ p_i \end{pmatrix};\ \boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{v}_1^* + \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{pmatrix}\alpha,$$

$$\boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{v}_i^* \qquad (i = 2,3,\cdots,m-1),\ \boldsymbol{d}_m = \boldsymbol{v}_m^* - \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中, $\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}$ 和 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{R}}$ 是对角线上的第 1 个和最后 1 个矩阵.

对于一个非常小的 ε 来说,当 m 取值过小时,$\boldsymbol{H}$ 中元素的值可能会非常大,从而导致 $\boldsymbol{T}$ 中元素的值也非常大,甚至趋近于无穷大. 这将导致 $\boldsymbol{B}^{-1}\left(\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/T_{22} \\ 1 & -T_{12}/T_{22} \end{pmatrix}\right)$ 无法精确给出. 为避免这种情况,可将 m 的值取的足够大.

式(8)是一个块三对角方程组. 一般来说,如果满足对角占优的条件此类问题可采用块追赶法进行求解. 但对角占优的条件常常无法满足,且 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}$ 和 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{R}}$ 的逆阵可能不存在,故有时块追赶法无法采用.

下面本文提出方程(8)的一种高效解法.

取 $m = 2^M + 1\ (M = 0,1,\cdots)$, 将第 2 条方程乘以 $-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}$ 加到第 1 条方程中去, 将第 $m-1$ 条方程乘以 $-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$ 加到第 m 条方程中去,将第 $2i$ 条方程乘以 $-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}$、第 $2i+2$ 条方程乘以 $-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$ 一起加到第 $2i+1$ 条方程中去($i = 1,2,\cdots,(m-3)/2$), 得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{(1)} & \boldsymbol{C}^{(1)} & & & \\ \boldsymbol{A}^{(1)} & \boldsymbol{B}^{(1)} & \boldsymbol{C}^{(1)} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}^{(1)} & \boldsymbol{B}^{(1)} & \boldsymbol{C}^{(1)} \\ & & & \boldsymbol{A}^{(1)} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{R}}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1^{(1)} \\ \boldsymbol{u}_2^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{(m-1)/2}^{(1)} \\ \boldsymbol{u}_{(m+1)/2}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_1^{(1)} \\ \boldsymbol{d}_2^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{d}_{(m-1)/2}^{(1)} \\ \boldsymbol{d}_{(m+1)/2}^{(1)} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{(1)} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{L}} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{R}}^{(1)} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{R}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{B}^{(1)} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{C}^{(1)} = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{A}^{(1)} = -\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{u}_i^{(1)} = \boldsymbol{u}_{2i-1} \qquad (i = 1,2,\cdots,(m+1)/2),$$

$$\boldsymbol{d}_1^{(1)} = \boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{d}_2,$$

$$\boldsymbol{d}_i^{(1)} = \boldsymbol{d}_{2i-1} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{d}_{2i-2} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{d}_{2i} \qquad (i = 2,3,\cdots,(m-1)/2),$$

$$\boldsymbol{d}_{(m+1)/2}^{(1)} = \boldsymbol{d}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{d}_{m-1}.$$

式(9)的方程数和未知数比式(8)减少了 2^{M-1} 个. 类似的,重复上述的消元过程,经过 k 次递推消元后有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{(k)} & \boldsymbol{C}^{(k)} & & & \\ \boldsymbol{A}^{(k)} & \boldsymbol{B}^{(k)} & \boldsymbol{C}^{(k)} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}^{(k)} & \boldsymbol{B}^{(k)} & \boldsymbol{C}^{(k)} \\ & & & \boldsymbol{A}^{(k)} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{R}}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1^{(k)} \\ \boldsymbol{u}_2^{(k)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{2^{M-k}}^{(k)} \\ \boldsymbol{u}_{2^{M-k}+1}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_1^{(k)} \\ \boldsymbol{d}_2^{(k)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{d}_{2^{M-k}}^{(k)} \\ \boldsymbol{d}_{2^{M-k}+1}^{(k)} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{(k)} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{(k-1)} - \boldsymbol{C}^{(k-1)}(\boldsymbol{B}^{(k-1)})^{-1}\boldsymbol{A}^{(k-1)},\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{R}}^{(k)} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{R}}^{(k-1)} - \boldsymbol{A}^{(k-1)}(\boldsymbol{B}^{(k-1)})^{-1}\boldsymbol{C}^{(k-1)}, \\
&\boldsymbol{A}^{(k)} = -\boldsymbol{A}^{(k-1)}(\boldsymbol{B}^{(k-1)})^{-1}\boldsymbol{A}^{(k-1)},\ \boldsymbol{C}^{(k)} = -\boldsymbol{C}^{(k-1)}(\boldsymbol{B}^{(k-1)})^{-1}\boldsymbol{C}^{(k-1)}, \\
&\boldsymbol{B}^{(k)} = \boldsymbol{B}^{(k-1)} - \boldsymbol{A}^{(k-1)}(\boldsymbol{B}^{(k-1)})^{-1}\boldsymbol{C}^{(k-1)} - \boldsymbol{C}^{(k-1)}(\boldsymbol{B}^{(k-1)})^{-1}\boldsymbol{A}^{(k-1)}, \\
&\boldsymbol{u}_i^{(k)} = \boldsymbol{u}_{2i-1}^{(k-1)} \qquad (i = 1,2,\cdots,2^{M-k}+1),\ \boldsymbol{d}_1^{(k)} = \boldsymbol{d}_1^{(k-1)} - \boldsymbol{C}^{(k-1)}(\boldsymbol{B}^{(k-1)})^{-1}\boldsymbol{d}_2^{(k-1)}, \\
&\boldsymbol{d}_i^{(k)} = \boldsymbol{d}_{2i-1}^{(k-1)} - \boldsymbol{A}^{(k-1)}(\boldsymbol{B}^{(k-1)})^{-1}\boldsymbol{d}_{2i-2}^{(k-1)} - \\
&\qquad \boldsymbol{C}^{(k-1)}(\boldsymbol{B}^{(k-1)})^{-1}\boldsymbol{d}_{2i}^{(k-1)} \qquad (i = 2,3,\cdots,2^{M-k}), \\
&\boldsymbol{d}_{2^{M-k}+1}^{(k)} = \boldsymbol{d}_{2^{M-k+1}+1}^{(k-1)} - \boldsymbol{A}^{(k-1)}(\boldsymbol{B}^{(k-1)})^{-1}\boldsymbol{d}_{2^{M-k+1}}^{(k-1)} \qquad (k = 2,3,\cdots,M).
\end{aligned}$$

经过 M 次递推消元,有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{(M)} & \boldsymbol{C}^{(M)} \\ \boldsymbol{A}^{(M)} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{R}}^{(M)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1^{(M)} \\ \boldsymbol{u}_2^{(M)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_1^{(M)} \\ \boldsymbol{d}_2^{(M)} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

方程(11)的解可由下式给出:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_2^{(M)} = (\boldsymbol{B}_{\mathrm{R}}^{(M)} - \boldsymbol{A}^{(M)}(\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{(M)})^{-1}\boldsymbol{C}^{(M)})^{-1}(\boldsymbol{d}_2^{(M)} - \boldsymbol{A}^{(M)}(\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{(M)})^{-1}\boldsymbol{d}_1^{(M)}), \\ \boldsymbol{u}_1^{(M)} = (\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{(M)})^{-1}(\boldsymbol{d}_1^{(M)} - \boldsymbol{C}^{(M)}\boldsymbol{u}_2^{(M)}), \end{cases} \tag{12}$$

注意到 $\boldsymbol{u}_1^{(M)}$ 就是 $\boldsymbol{u}_1$,即同时给出 p_0,然后按照式(5) 或者消元过程的逆过程(本文称之为回退过程) 进行计算就可以求出所有的未知量. 有时为了得到所需位置(可能不在结点上) 的解答,在给出 p_0 后,可对区间进行重新划分,计算新的传递矩阵后,即可得到需要的解答.

下面比较块追赶法与本文递推方法的计算量.

由于矩阵乘法和矩阵求逆的计算量远大于矩阵与向量乘法的计算量,故此处仅考虑矩阵乘法与矩阵求逆的计算量. 如果采用块追赶法,所需矩阵求逆的次数为 2^M,矩阵乘法次数为 $2^{M+1}-1$. 而按式(9) ~ (12),矩阵求逆次数仅为 $M+2$,矩阵乘法次数为 $6M+2$. 由此可见,当 M 较大时,本文递推方法较块追赶法能大幅度提高计算效率.

特别的,当方程(1)是齐次方程时,式(10)的右端项在前 M 次递推消元中无需计算,因而计算更加简便.

2　高阶奇异摄动问题

上节仅讨论了二阶常微分方程的情况,实际上上述方法可以容易地推广到高阶常微分方程的情况. 下面不妨以四阶常微分方程为例加以说明. 考虑如下四阶奇异摄动问题:

$$\varepsilon y^{(4)}(x) + Ay''(x) + By(x) = f(x), \tag{13}$$

$$y(a)=\alpha,\ y(b)=\beta,\ y''(a)=\gamma,\ y''(b)=\theta, \tag{14}$$

其中,$\alpha,\beta,\gamma,\theta$ 为已知常数.

在式(13)中,令 $p=y',q=p',z=q'$,有

$$\begin{pmatrix} y' \\ p' \\ q' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -B/\varepsilon & 0 & -A/\varepsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ p \\ q \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(x)/\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{15}$$

令

$$\boldsymbol{v}=(y\quad p\quad q\quad z)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{r}=\left(0\quad 0\quad 0\quad \frac{f(x)}{\varepsilon}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -B/\varepsilon & 0 & -A/\varepsilon & 0 \end{pmatrix},$$

则式(15)在形式上可化为式(3),由于两端各给出一半边界条件,故此后只需按上节所述方法计算即可.

3 数 值 算 例

算例 1(见文献[3,5]) 考虑如下的奇异摄动问题:

$$\varepsilon y''(x)+y'(x)-y(x)=0, \qquad x\in[0,1],$$

其中 $y(0)=1, y(1)=1.$

该问题在左端 $x=0$ 处有一个边界层.其精确解为

$$y(x)=\frac{(\mathrm{e}^{m_2}-1)\mathrm{e}^{m_1x}+(1-\mathrm{e}^{m_1})\mathrm{e}^{m_2x}}{\mathrm{e}^{m_2}-\mathrm{e}^{m_1}},$$

其中

$$m_1=(-1+\sqrt{1+4\varepsilon})/(2\varepsilon),\ m_2=(-1-\sqrt{1+4\varepsilon})/(2\varepsilon).$$

首先,针对 $\varepsilon=10^{-2}$ 和 $\varepsilon=10^{-3}$ 时的情况进行计算,计算中本文方法取 $M=2$.在求出边界值后,需要重新进行网格划分并按式(5)进行计算,以便得到所需位置的解答.由于该问题左边有一个边界层,故解答在此区域会有急剧的变化.能否精确反映边界层的特征可以作为衡量相关算法精度的参照,为此将本文方法、Chawla 方法[3]和 Andargie 方法[5]在边界层区域的数值结果 $y(x)$ 进行比较,结果见表 1.

由表 1 可以看出,在区域[0,0.1]内,解的变化剧烈,即左端存在边界层.当 $\varepsilon=10^{-2}$ 时,文献[3]和文献[5]方法的结果基本只有小数点后 1 位是精确的.而当 $\varepsilon=10^{-3}$ 时,上述两种方法的结果几乎没有一位数字是精确的.相比之下,无论 $\varepsilon=10^{-2}$ 还是 $\varepsilon=10^{-3}$,本文方法均至少有小数点后 12 位的精度.这充分说明由于精细积分过程的精确性,本文方法即使在解剧烈变化的边界层区域也无需采用过密的网格.故本文方法处理边界层问题极其有效.

然后,用本文方法对 ε 取值更小的情况进行分析.分别取 $\varepsilon=10^{-5}$(取 $M=17$)、$\varepsilon=10^{-10}$(取 $M=12$).对于 ε 如此小的情况,文献[3]和[5]的方法已经失效,故仅将本文方法与

精确解进行比较,见表2. 在表2中,针对给定的 ε,分别计算了 x 在 $\varepsilon, 2\varepsilon, \cdots, 9\varepsilon$ 的 $y(x)$ 值.

表1　不同方法在边界层区域的精度比较

	x	$y(x)$（本文解）	Andargie 方法解	Chawla 方法解	精确解
a组 $\varepsilon = 10^{-2}$	0.00	1.000 000 000 000 00	1.000 000 0	1.000 000 0	1.000 000 000 000 00
	0.01	0.604 133 627 516 82	0.620 915 9	0.600 896 1	0.604 133 627 516 82
	0.02	0.462 324 512 097 62	0.442 490 2	0.423 858 9	0.462 324 512 097 62
	0.03	0.413 080 698 773 61	0.359 547 1	0.346 471 5	0.413 080 698 773 61
	0.04	0.397 578 221 526 48	0.322 052 7	0.313 815 9	0.397 578 221 526 47
	0.05	0.394 390 413 434 75	0.306 205 2	0.301 255 0	0.394 390 413 434 75
	0.06	0.395 712 751 635 37	0.300 681 7	0.297 736 5	0.395 712 751 635 37
	0.07	0.398 702 645 559 77	0.300 096 2	0.298 302 5	0.398 702 645 559 77
	0.08	0.402 324 914 184 64	0.301 886 6	0.300 729 2	0.402 324 914 184 64
	0.09	0.406 202 736 342 12	0.304 834 6	0.304 019 4	0.406 202 736 342 12
	0.10	0.410 199 104 002 65	0.308 360 9	0.307 725 9	0.410 199 104 002 65
b组 $\varepsilon = 10^{-3}$	0.00	1.000 000 000 000 00	1.000 000 0	1.000 000 0	1.000 000 000 000 00
	0.01	0.371 972 395 933 01	0.373 657 6	−0.152 561 8	0.371 972 395 933 03
	0.02	0.375 678 350 793 33	0.288 428 5	0.511 507 6	0.375 678 350 793 35
	0.03	0.379 450 192 748 82	0.279 546 4	0.137 809 9	0.379 450 192 748 84
	0.04	0.383 259 905 613 95	0.281 471 8	0.357 065 1	0.383 259 905 613 97
	0.05	0.387 107 868 326 93	0.284 963 5	0.237 643 3	0.387 107 868 326 95
	0.06	0.390 994 464 919 48	0.288 719 0	0.311 786 1	0.390 994 464 919 51
	0.07	0.394 920 083 279 12	0.292 555 0	0.275 424 6	0.394 920 083 279 14
	0.08	0.398 885 115 187 77	0.296 446 4	0.302 274 5	0.398 885 115 187 79
	0.09	0.402 889 956 360 87	0.300 390 2	0.293 093 2	0.402 889 956 360 90
	0.10	0.406 935 006 486 91	0.304 386 6	0.304 579 0	0.406 935 006 486 93

表2　本文方法在 ε 取更小值时的精度

	x	$y(x)$（本文解）	精确解
a组 $\varepsilon = 10^{-5}(M = 17)$	0	1.000 000 000 000 00	1.000 000 000 000 00
	ε	0.600 427 277 931 55	0.600 427 277 931 32
	2ε	0.453 436 483 657 03	0.453 436 483 656 71
	3ε	0.399 364 458 669 56	0.399 364 458 669 21
	4ε	0.379 474 996 801 07	0.379 474 996 800 71
	5ε	0.372 160 471 425 13	0.372 160 471 424 77
	6ε	0.369 471 960 422 18	0.369 471 960 421 81
	7ε	0.368 485 248 006 96	0.368 485 248 006 60
	8ε	0.368 124 586 067 98	0.368 124 586 067 61
	9ε	0.367 994 232 948 51	0.367 994 232 948 14
b组 $\varepsilon = 10^{-10}(M = 12)$	0	1.000 000 000 000 00	1.000 000 000 000 00
	ε	0.600 423 599 143 17	0.600 423 579 879 02
	2ε	0.453 427 656 128 62	0.453 427 629 777 58
	3ε	0.399 350 870 786 61	0.399 350 841 828 46
	4ε	0.379 457 133 239 89	0.379 457 103 322 63
	5ε	0.372 138 636 212 38	0.372 138 605 942 28
	6ε	0.369 446 311 639 21	0.369 446 281 239 31
	7ε	0.368 455 860 803 13	0.368 455 830 355 48
	8ε	0.368 091 494 326 34	0.368 091 463 861 12
	9ε	0.367 957 451 413 74	0.367 957 420 942 06

由表 2 可以看出对于 $\varepsilon = 10^{-5}$ 的情况,本文方法的精度介于小数点后 11 ~ 12 位;对于 $\varepsilon = 10^{-10}$ 的情况,本文方法的精度介于小数点后 6 ~ 7 位,这充分说明本文方法对于 ε 非常小(问题的奇异性非常强)的情况也能给出较为精确的解答。另一方面,从表 2 还可以看出,随着 ε 的减小,问题的奇异性在增强,本文方法的精度也略有下降。

最后,研究 M 的取值对解答精度的影响。为此,取 $\varepsilon = 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10}$,对于每一个给定的 ε,令 M 取一系列正整数,并通过分析 $y'(0)$ 的相对误差 $|(y'^{(M)}(0) - y'(0))/y'(0)|$ 来讨论这一问题,结果见表 3。对于确定的 ε,M 存在一个临界值 M_{cr}。当 $M < M_{cr}$ 时,本文方法失效,这种情况本文以"—"表示。

表 3 M **的取值对** $|(y'^{(M)}(0) - y'(0))/y'(0)|$ **的影响**

	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-6}$	$\varepsilon = 10^{-8}$	$\varepsilon = 10^{-10}$
$M = 1$	2.895E−13	3.617E−11	—	—
$M = 2$	2.896E−13	3.617E−11	—	—
$M = 3$	2.896E−13	3.617E−11	—	—
$M = 4$	2.902E−13	3.617E−11	—	—
$M = 5$	2.902E−13	3.616E−11	—	—
$M = 6$	2.932E−13	3.617E−11	2.283E−9	—
$M = 7$	2.968E−13	3.617E−11	2.283E−9	—
$M = 8$	2.819E−13	3.615E−11	2.283E−9	—
$M = 9$	2.732E−13	3.615E−11	2.283E−9	—
$M = 10$	2.604E−13	3.612E−11	2.283E−9	—
$M = 11$	2.463E−13	3.609E−11	2.283E−9	—
$M = 12$	2.875E−13	3.616E−11	2.282E−9	4.821E−8
$M = 13$	8.690E−14	3.615E−11	2.282E−9	4.821E−8
$M = 14$	4.584E−13	3.577E−11	2.283E−9	4.821E−8
$M = 15$	4.909E−13	3.796E−11	2.282E−9	4.821E−8

由表 3 可以看出,当 $\varepsilon = 10^{-4}$ 和 10^{-6} 时,$M_{cr} = 1$,当 $\varepsilon = 10^{-8}$ 时,$M_{cr} = 6$,当 $\varepsilon = 10^{-10}$ 时,$M_{cr} = 12$。即对于给定的 ε,当 $M \geqslant M_{cr}$ 时,解的精度几乎不受 M 的影响,这是由于本文方法的"精细离散"过程未引入离散误差,精度与步长的选取几乎是无关的。这种性质是传统差分类方法所不具有的。由表 3 还可以看出,当 ε 减小时,随着奇异性增强,M_{cr} 显著增加,同时解答的精度也略有下降。

算例 2(见文献[3,5]) 考虑如下的二阶奇异摄动方程:

$$\begin{cases} \varepsilon y''(x) - y'(x) = 0, & x \in [0,1], \\ y(0) = 1,\ y(1) = 0. \end{cases}$$

该问题在右端 $x = 1$ 处有一个边界层,其精确解为

$$y(x) = \frac{e^{(x-1)/\varepsilon} - 1}{e^{-1/\varepsilon} - 1}.$$

对 $\varepsilon = 10^{-2}$ 和 $\varepsilon = 10^{-3}$ 的情况进行计算。计算中本文方法取 $M = 2$,求出边界值 $y'(a)$ 后,重新划分网格并按式(5)的变形 $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{v}_{i+1}$ 从右向左递推,以 $\tau = 0.01$ 为步长,计算出相应各节点的 $y(x)$。表 4 给出了本文方法与 Chawla 方法和 Andargie 方法在右端边界层区域所得结

果的对比情况.

表 4　　不同方法在边界层区域的精度比较

	x	$y(x)$（本文解）	Andargie 方法解	Chawla 方法解	精确解
a 组 $\varepsilon = 10^{-2}$	0.90	0.999 954 600 070 24	0.999 262 0	0.999 611 0	0.999 954 600 070 24
	0.91	0.999 876 590 195 91	0.998 490 6	0.999 156 5	0.999 876 590 195 91
	0.92	0.999 664 537 372 10	0.996 902 0	0.998 157 4	0.999 664 537 372 10
	0.93	0.999 088 118 034 45	0.993 630 0	0.995 961 2	0.999 088 118 034 45
	0.94	0.997 521 247 823 33	0.986 890 9	0.991 132 9	0.997 521 247 823 33
	0.95	0.993 262 053 000 91	0.973 010 8	0.980 518 2	0.993 262 053 000 91
	0.96	0.981 684 361 111 27	0.944 422 7	0.957 182 3	0.981 684 361 111 27
	0.97	0.950 212 931 632 14	0.885 541 0	0.905 879 3	0.950 212 931 632 14
	0.98	0.864 664 716 763 39	0.764 264 9	0.793 091 5	0.864 664 716 763 39
	0.99	0.632 120 558 828 56	0.514 477 4	0.545 131 6	0.632 120 558 828 56
	1.00	0.000 000 000 000 00	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 000 000 00
b 组 $\varepsilon = 10^{-3}$	0.90	1.000 000 000 000 00	1.000 006 3	0.995 965 7	1.000 000 000 000 00
	0.91	1.000 000 000 000 00	1.000 006 3	1.006 999 4	1.000 000 000 000 00
	0.92	1.000 000 000 000 00	1.000 006 3	0.987 850 0	1.000 000 000 000 00
	0.93	1.000 000 000 000 00	1.000 005 2	1.021 084 3	1.000 000 000 000 00
	0.94	1.000 000 000 000 00	0.999 997 8	0.963 405 3	1.000 000 000 000 00
	0.95	1.000 000 000 000 00	0.999 945 4	1.063 508 9	1.000 000 000 000 00
	0.96	1.000 000 000 000 00	0.999 580 3	0.889 776 1	1.000 000 000 000 00
	0.97	0.999 999 999 999 91	0.997 039 4	1.191 294 3	0.999 999 999 999 91
	0.98	0.999 999 997 938 85	0.979 356 8	0.668 000 8	0.999 999 997 938 85
	0.99	0.999 954 600 070 24	0.856 305 2	1.576 191 9	0.999 954 600 070 24
	1.00	0.000 000 000 000 00	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 000 000 00

由表 4 可以看出,对于 $\varepsilon = 10^{-2}$ 和 $\varepsilon = 10^{-3}$, Chawla 的方法精度均为小数点后 0 ~3 位;Andargie 的方法当 $\varepsilon = 10^{-2}$ 时精度为小数点后 0 ~ 3 位,当 $\varepsilon = 10^{-3}$ 时精度为 0 ~ 6 位;本文方法在 $\varepsilon = 10^{-2}$ 与 $\varepsilon = 10^{-3}$ 时精度均已达小数点后 14 位,与精确解完全相同,这种精度是其他数值方法所难以达到的.

算例 3(见文献[3,5])　考虑如下流体动力学中小黏性流动的非齐次奇异摄动问题:

$$\varepsilon y''(x) + y'(x) = 1 + 2x, \qquad x \in [0,1],$$

其中

$$y(0) = 0,\ y(1) = 1.$$

该问题在左端 $x = 0$ 处有一个边界层. 其精确解为

$$y(x) = x(x + 1 - 2\varepsilon) + \frac{(2\varepsilon - 1)(1 - \mathrm{e}^{-x/\varepsilon})}{1 - \mathrm{e}^{-1/\varepsilon}}.$$

对 $\varepsilon = 10^{-2}$ 和 $\varepsilon = 10^{-3}$ 时的情况进行计算. 通过计算发现 $M_{\mathrm{cr}} = 1$. 计算中本文方法取 $M = 9$,并在求出 $y'(0)$ 后重新划分网格按式(5)进行了计算. 本文方法与 Chawla 方法和 Andargie 方法计算所得结果在左端边界层区域的对比情况见表 5.

由表 5 中可以看出,本文方法的精度为小数点后 2 ~3 位,而其他两种方法均已失效. 这同

样说明本文方法较 Andargie 的方法及 Chawla 的方法更为有效.

表 5 不同方法在边界层区域的精度比较

	x	$y(x)$（本文解）	Andargie 方法解	Chawla 方法解	精确解
a 组 $\varepsilon = 10^{-2}$	0.00	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0
	0.01	−0.609 231 2	−0.824 546 3	−0.876 014 4	−0.609 578 1
	0.02	−0.826 856 9	−1.217 880 8	−1.267 067 0	−0.827 371 4
	0.03	−0.900 292 5	−1.401 717 4	−1.437 383 1	−0.900 908 7
	0.04	−0.920 557 2	−1.483 702 1	−1.507 149 1	−0.921 250 7
	0.05	−0.921 134 9	−1.516 098 7	−1.531 033 3	−0.921 896 8
	0.06	−0.914 343 8	−1.524 282 3	−1.533 902 2	−0.915 170 8
	0.07	−0.904 715 4	−1.520 572 8	−1.527 066 7	−0.905 606 4
	0.08	−0.893 916 9	−1.510 951 9	−1.515 671 6	−0.894 871 2
	0.09	−0.882 561 4	−1.498 323 6	−1.502 057 2	−0.883 579 1
	0.10	−0.870 874 6	−1.484 098 1	−1.487 287 9	−0.871 955 5
b 组 $\varepsilon = 10^{-3}$	0.00	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 000 0
	0.01	−0.988 300 0	−1.398 575 4	−2.607 798 3	−0.987 874 7
	0.02	−0.978 055 4	−1.587 906 1	−1.083 766 7	−0.977 640 0
	0.03	−0.967 565 4	−1.603 239 2	−1.940 047 5	−0.967 160 0
	0.04	−0.956 875 4	−1.593 340 3	−1.424 387 8	−0.956 480 0
	0.05	−0.945 985 4	−1.579 587 2	−1.698 810 8	−0.945 600 0
	0.06	−0.934 895 4	−1.565 051 9	−1.517 573 2	−0.934 520 0
	0.07	−0.923 605 4	−1.550 175 9	−1.598 463 8	−0.923 240 0
	0.08	−0.912 115 4	−1.535 022 6	−1.527 897 6	−0.911 760 0
	0.09	−0.900 425 4	−1.519 601 1	−1.544 179 4	−0.900 080 0
	0.10	−0.888 535 4	−1.503 912 8	−1.509 999 8	−0.888 200 0

4 结 论

本文提出了奇异摄动问题的一种高精度分析方法,该方法具有以下优点:

1）由于“离散”过程中利用精细积分关系式建立代数方程,几乎未引入离散误差,故本方法精度几乎不受离散步长的影响,因此即使在边界层区域也无需采用过密的网格,从而在保证精度的同时也提高了计算效率;

2）在求解代数方程组时,由于提出了一种高效消元递推方法,因而本文方法具有极高的求解效率;

3）与文献中的 Andargie 方法和 Chawla 方法相比,本文方法不仅精度更高,而且对于上述方法不能处理的 ε 更小的问题,也能给出较为精确的解答. 因此本文方法不仅精度高,还具有较大的适用范围.

参考文献:

［1］ 苏煜城. 奇异摄动中的边界层校正法［M］. 上海: 上海科学技术出版社, 1983.

［2］ Kadalbajoo M K, Reddy Y N. Asymptotic and numerical analysis of singular perturbation problems: a survey[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 1989, **30**(3): 223-259.

[3] Chawla M M. A fourth-order tridiagonal finite difference method for general non-linear two-point boundary value problems with mixed boundary conditions[J]. *IMA J Appl Math*, 1978, **21**(1): 83-93.

[4] 苏煜城, 吴启光. 奇异摄动问题数值方法引论[M]. 重庆: 重庆出版社, 1991.

[5] Andargie A, Reddy Y N. Fitted fourth-order tridiagonal finite difference method for singular perturbation problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, **192**(1): 90-100.

[6] Stynes M, O'Riordan E. A uniformly accurate finite-element method for a singular-perturbation problem in conservative form[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1986, **23**(2): 369-375.

[7] Vigo-Aguiar J, Natesan S. A parallel boundary value technique for singularly perturbed two-point boundary value problems[J]. *The Journal of Supercomputing*, 2004, **27**(2): 195-206.

[8] Reddy Y N, Chakravarthy P P. An initial-value approach for solving singularly perturbed two-point boundary value problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **155**(1): 95-110.

[9] Kadalbajoo M K, Kumar D. Initial value technique for singularly perturbed two point boundary value problems using an exponentially fitted finite difference scheme[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2009, **57**(7): 1147-1156.

[10] Aziz T, Khan A. A spline method for second-order singularly perturbed boundary-value problems[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2002, **147**(2): 445-452.

[11] Tirmizi I A, Fazal-i-Haq, Siraj-ul-Islam. Non-polynomial spline solution of singularly perturbed boundary-value problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, **196**(1): 6-16.

[12] Zhong W X, Williams F W. A precise time step integration method[J]. *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers Part C, Journal of Mechanical Engineering Science*, 1994, **208**(C6): 427-430.

[13] Lin J H, Sun D K, Zhong W X, Zhang W S. High efficiency computation of the variances of structural evolutionary random responses[J]. *Shock and Vibration*, 2000, **7**(4): 209-216.

[14] Gu Y X, Chen B S, Zhang H W, Grandhi R V. A sensitivity analysis method for linear and nonlinear transient heat conduction with precise time integration[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2002, **24**(1): 23-37.

[15] Zhang H W, Zhang X W, Chen J S. A new algorithm for numerical solution of dynamic elastic-plastic hardening and softening problems[J]. *Computers and Structures*, 2003, **81**(17): 1739-1749.

[16] Zhong W X. Combined method for the solution of asymmetric Riccati differential equations[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, **191**(1/2): 93-102.

[17] Chen B S, Tong L Y, Gu Y X. Precise time integration for linear two-point boundary value problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, **175**(1): 182-211.

[18] 富明慧, 林敬华. 一类指数矩阵函数及其应用[J]. 力学学报, 2009, **41**(5): 808-814.

[19] 谭述君, 钟万勰. 非齐次动力方程 Duhamel 项的精细积分法[J]. 力学学报, 2007, **39**(3): 374-

381.

[20] Wang M F, Zhou X Y. Renewal precise time step integration method of structural dynamic analysis[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, **36**(2): 191-195.

[21] 任传波, 贺光宗, 李忠芳. 结构动力学精细积分的一种高精度通用计算格式[J]. 机械科学与技术, 2005, **24**(12): 1507-1509.

[22] 富明慧,梁华力. 一种改进的精细-龙格库塔法[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2009, **48**(5): 1-5.

Precise Integration Method for Solving Singular Perturbation Problems

FU Ming-hui[1], ZHANG Wen-zhi[1], Sergey V Sheshenin[2]

(1. *Department of Applied Mechanics and Engineering*, *Sun Yat-sen University*, *Guangzhou* 510275, *P. R. China*;

2. *Faculty of Mechanics and Mathematics*, *Lomonosov Moscow State University*, *Moscow* 119992, *Russia*)

Abstract: A precise method for solving singularly perturbed boundary-value problems with the boundary layer at one end was presented. Firstly, the interval was divided evenly, then a set of algebraic equations in the form of matrix by the precise integration relationship of each segment was given. Substituting the boundary conditions into the algebraic equations, the coefficient matrix could be transformed to the form of block tridiagonal matrix. Combining the special nature of the problem, an efficient reduction method for singular perturbation problems was given. Since the precise integration relationship gives no discrete error in the discrete process, the present method has very high precision. Numerical examples show the validity of the present method.

Key words: singular perturbation problems; first-order ordinary differential equations; two point boundary value problems; precise integration method; reduction method