

等宽多孔介质壁面管道中磁流体的流动*

K·拉马克里希南¹, K·希艾雷恩德拉²

- (1. 斯里克里什那工程技术大学 数学系, 哥印拜陀-641008, 泰米尔纳德, 印度;
2. 阿密尔塔·维沙瓦·维德亚皮大学 阿密尔塔工程学院 数学系,
哥印拜陀-641105, 泰米尔纳德, 印度)

摘要: 研究等宽管道中, 磁场、可渗透壁面、Darcy 速度和滑动参数, 对流体稳定流动的综合影响。假设管道中流动的流体是均匀的、不可压缩的 Newton 流体。利用 Beavers-Joseph 滑动边界条件, 得到控制方程的解析解。详细地讨论了磁场、可渗透性、Darcy 速度和滑动参数对轴向速度、滑动速度和剪应力的影响。可以看出, Hartmann 数、Darcy 速度、多孔参数和滑动参数, 在改变流动方向, 进而改变剪应力方面, 起着至关重要的作用。

关键词: 等宽管道; 可渗透壁面; 磁场; 滑动速度; 剪应力

中图分类号: O34 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.07.003

引 言

在过去的几年里, 一些简单的流动问题, 结合经典的水动力学, 将动量纳入其中, 成为更加一般的磁流体动力学 (MHD)。研究导电流体在一个可渗透壁面管道中的流动, 不仅拥有理论价值, 还可以用来模拟很多生物工程问题, 例如 MHD 发电机、MHD 泵、加速器、静电集尘、聚合体工艺、石油工业、原油提炼、等离子研究、核反应堆、地热能萃取、空气动力学领域中的边界层控制、血液流动问题, 等等。特别是磁场作用下 Newton 流体运动的研究, 已被应用于众多领域, 包括生物流体的处理, 以及核燃料浆、液态金属合金、聚合体、汞合金、血液的流动 (Makinde^[1], Rao 和 Deshikachar^[2])。Berman^[3], Sellars^[4] 和 Yuan^[5] 在一个均匀多孔壁面的 2 维管道中, 研究了不可压缩粘性流体稳定的层流问题。

Wallace 等^[6] 在横向磁场作用下, 对多孔介质中汞的流动进行了实验。Rudraiah 等^[7] 研究有磁场作用时流经可渗透地基的 Hartmann 流动, 磁场作用在可渗透层地基的界处, 对 Wallace 等的实验工作提出了一个理论模型。Beaves 和 Joseph^[8] 在自然渗透壁面边界条件的实验研究中, 证实了在管道和渗透边界中滑动的存在, 流动在界面处分离。Richardson^[9], Rajasekhar^[10], Rudraiah 和 Veerbhadraiah^[11] 从理论和实验两个方面建立起由 Beavers 和 Joseph 提出的边界条件, 对平面边界是正确的。

在对砂滤器中水流动的研究中, Darcy^[12] 观察到水的流动率与沿砂滤器水头的高差成比

* 收稿日期: 2010-05-10; 修订日期: 2011-04-17

作者简介: K. Ramakrishnan, 副教授(联系人, E-mail: murali_19722002@yahoo.co.in).

本文原文为英文, 黄雅意译, 张禄坤校。

例,从而,他实证性地建立起粘性流体流经多孔介质时的数学理论. Van Lankveld 对多孔介质中的 Darcy 方程,多孔介质和粘性流体间的边界条件,在文献[13]中进行了综合报导. Srivastava^[14]研究多孔介质圆形边界管道中粘性流体的流动,假设管道中自由流动的控制方程为 Navier-Stokes 方程,多孔介质满足 Darcy 定律.

Sigh 和 Lawrence^[15]图解说明滑动速度对超滤性能的重要作用. Pal 等^[16]在一个以多孔介质为边界的管道中,研究滑动对追踪颗粒纵向扩散的影响. 近年来, Khan 等^[17]在多孔介质中,研究滑动对剪切流动的影响. Makinde 等^[18]在一个可渗透边界上出现滑动的管道中,研究粘性导电电磁流体的稳定流动. Ganesh 等^[19]以两块多空平行板为管道,在横向磁场作用下,当流体被以相同速率从管道壁两边抽取时,研究其粘性不可压缩导电流体的稳定层流.

本文的主要目的是,在一个等宽的被无限厚的多孔介质包裹的管道中,研究磁场、多孔参数、Darcy 速度和滑动速度,对高粘性导电流体稳定流动的综合影响. 利用 BJ (Beavers-Joseph) 滑动条件,将物理问题归结为数学最小化问题,解析地求解方程系统. 鉴于此,追随 Makinde 等^[18], Chandrasekhara 等^[20], Shivakumar 等^[21]的研究,假设多孔层的厚度比管道中流动的宽度要大得多,所以在管道的边界面上可以直接使用 BJ 条件.

1 问题的公式

在一个等宽长度无限的、始终为无限厚多孔介质包裹的管道中,研究层状稳定粘性导电电磁流体的流动. 假设流体为均匀的导电 Newton 流体,其密度为 ρ ,粘度为 μ ,导电率为 σ_e . 假设流体的导电率很小,且产生的电磁力也非常小.

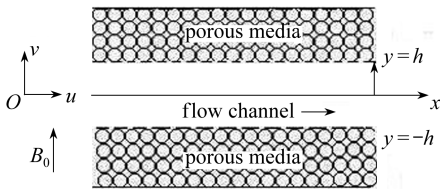


图1 物理构造

Fig. 1 Physical Configuration

选择直角坐标系 (x, y) , 其中 x 为沿管道中心线, y 为离中性面的距离, 如 $y = h$ 为管道的一半宽度, 如图1所示. 令 u 和 v 分别为 x 和 y 正方向上的速度分量. 进一步假定, 管道以 x 轴为对称, 假定多孔层是均匀各向同性的, 并严密地包裹着, 使得通常的 Darcy 定律有效. 均匀磁场 H_0 作用在 y 方向, 电磁感应强度为 $B_0 = \mu_e H_0$, 其中 μ_e 为磁导率. 假设管道两边界面离

中性面的距离用 $y = \pm h$ 表示, 其中 h 为正值.

假设流体的导电性不大, 其磁 Reynolds 数比单位 1 小得多, 因此, 与其所作用的磁场相比, 感应磁场可以忽略不计(参见文献[22]). 事实上, 当流动的特征长度不大时, 磁 Reynolds 数不可能超过单位 1, 除非流动为湍流(参见文献[23]).

于是, 流动的控制方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u - \frac{\sigma_e B_0^2 u}{\rho}, \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v, \quad (3)$$

其中
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

不计惯性(考虑为高度粘性的流体, 参见文献[20]), 则运动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma_e B_0^2}{\mu} u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$v = 0. \quad (6)$$

根据 Beavers-Joseph^[8] 的假设,可渗透界面上的滑动速度,与多孔基体内的平均过滤速度有差别,剪切效应通过边界层区域传递到材料体中.穿过该边界,速度很快地从界面的滑动速度,变化为 Darcy 定律的计算值:

$$Q_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad Q_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (7)$$

Beavers 和 Joseph^[8] 假设滑动速度与切向应力相关.那么,多孔壁面中的管道速度和 Darcy 速度可通过以下的边界条件耦合在一起:

$$\frac{du}{dy} = -\bar{\alpha} \left(\frac{u_{B_1} - Q_1}{\sqrt{k}} \right), \quad y = h, \quad (8)$$

$$\frac{du}{dy} = \bar{\alpha} \left(\frac{u_{B_2} - Q_1}{\sqrt{k}} \right), \quad y = -h, \quad (9)$$

$$u_{B_1} = u_B, \quad y = h, \quad (10)$$

$$u_{B_2} = u_B, \quad y = -h, \quad (11)$$

$$v = \epsilon Q_y, \quad Q_1 = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (12)$$

$$\int_{-h}^h u(y) dy = n_f, \quad (13)$$

其中, n_f 为经过管道的净通量, u_{B_1} 和 u_{B_2} 为滑动速度,即多孔介质外的局部平均切向速度, Q_1 为由 Darcy 定律给出的多孔壁面内的速度, k 为多孔材料的渗透率, $\bar{\alpha}$ 为无量纲常数,称为滑动参数的.条件(8)和(9)就是 BJ(Beavers 和 Joseph)条件.

2 问题的求解

由于管道是等宽的,利用壁面坡度处处可忽略不计的近似,速度分量和压力梯度近似相等.在式(4)和(5)中消去压力项,得到

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - Ha^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

其中, $y^* = y/h$, $Ha^2 = B_0^2 h^2 \sigma_e / \mu$ 为 Hartmann 数的平方,略去前式中的 * 号,由于 u 只是 y 的函数,基本方程最终成为

$$\frac{d^3 u}{dy^3} - Ha^2 \frac{du}{dy} = 0. \quad (14)$$

条件(8)~(13)变为

$$\frac{du}{dy} = -\bar{\alpha} \sigma (u_{B_1} - Q_1), \quad y = 1, \quad (15)$$

$$\frac{du}{dy} = \bar{\alpha} \sigma (u_{B_2} - Q_1), \quad y = -1, \quad (16)$$

$$u_{B_1} = u_B, \quad y = 1, \quad (17)$$

$$u_{B_2} = u_B, \quad y = -1, \quad (18)$$

$$\int_{-1}^1 u(y) dy = \frac{n_f}{h}, \quad (19)$$

这里 $\sigma = h/\sqrt{k}$ 为无量纲数.

在条件(15)~(19)下,求解方程(14),得到

$$u(y) = \frac{n_f}{2h} + \frac{\bar{\alpha}\sigma}{2h} \left[\frac{n_f - 2hQ_1}{(Ha^2 - \bar{\alpha}\sigma) \sinh(Ha) + \bar{\alpha}\sigma Ha \cosh(Ha)} \right] \times \\ \left[\sinh(Ha) - Ha \cosh(Hay) \right], \quad (20)$$

其中

$$n_f = \frac{2h^3}{\sigma Ha^2} \left[\frac{(\bar{\alpha} Ha^2 + \sigma Ha^2 - \bar{\alpha}\sigma^2) \sinh(Ha) + \bar{\alpha}\sigma^2 Ha \cosh(Ha)}{Ha^2 \sinh(Ha) + \bar{\alpha}\sigma Ha \cosh(Ha)} \right] \left(-\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (21)$$

滑动速度如下给出:

$$u_B = \frac{1}{2h} \left[\frac{n_f Ha^2 \sinh(Ha) - 2\bar{\alpha}\sigma h Q_1 [\sinh(Ha) - Ha \cosh(Ha)]}{Ha^2 \sinh(Ha) - \bar{\alpha}\sigma [\sinh(Ha) - Ha \cosh(Ha)]} \right]. \quad (22)$$

当 $\sigma \rightarrow \infty$ (渗透性可忽略不计)时,

$$u(y) = \frac{n_f Ha}{2h} \left[\frac{\cosh(Hay) - \cosh(Ha)}{\sinh(Ha) - Ha \cosh(Ha)} \right],$$

其中

$$n_f = 2h \left[\frac{\sinh(Ha) - Ha \cosh(Ha)}{Ha \cosh(Ha)} \right] \frac{h^2}{Ha^2 \mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (23)$$

它就是等宽刚性管壁管道中的 MHD 流动^[20].

当 $Ha \rightarrow 0$ (不计磁场)时,

$$u(y) = \frac{n_f}{2h} + \frac{\bar{\alpha}\sigma}{4h} \left[\frac{n_f - 2hQ_1}{3 + \bar{\alpha}\sigma} \right] (1 - 3y^2),$$

其中

$$n_f = \frac{2h^3}{3} \left[\frac{\sigma(3 + \bar{\alpha}\sigma) + 3\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}\sigma^2} \right] \left(-\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (24)$$

它就是等宽可渗透管壁管道中流体的运动^[21].

当 $\sigma \rightarrow \infty, Ha \rightarrow 0$ 时,

$$u(y) = \frac{3n_f}{4h} (1 - y^2), \quad (25)$$

它就是等宽刚性不可渗透管壁管道的一般解^[24].

3 结果和讨论

本文讨论的目的是,分析多孔参数 ($\bar{\alpha}\sigma$)、滑动参数 ($\bar{\alpha}$)、Hartmann 数 (Ha) 和 Darcy 速度 (Q_1) 对轴向速度 (u)、滑动速度 (u_B) 和剪应力 (τ_{xy}) 的影响.

一般而言,等宽管道不考虑磁场 (Ha) 时,我们得到的结果与文献[21]的结果是一致的.进一步地,等宽管道不考虑多孔参数时,我们得到的结果可以与文献[20]的结果进行比较.最后,磁场和多孔性都不考虑时,得到的结果与文献[24]的结果是一致的.可以看出,当滑动参数 ($\bar{\alpha}$) 和 Hartmann 数 (Ha) 增加时,轴向速度和壁面上的滑动速度是减小的,和文献[18]的

结果表现出良好的一致性。

MHD 流经多孔介质包裹的等宽管道,参数赋值如下:管道宽度 $h = 0.00175\text{ m}$,Hartmann 数 $Ha = 0, 2, 3.5, 5$ ^[20],多孔参数 $\bar{\alpha}\sigma = 10, 10^2, 10^3$, Darcy 速度 $Q_1 = 0, 0.001$ ^[21],滑动参数 $\bar{\alpha} = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ ^[18]。

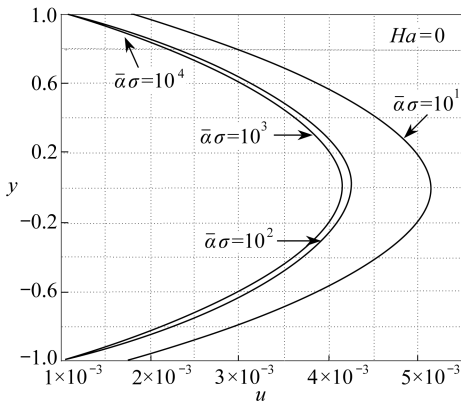


图2 $Ha = 0$ 时, $\bar{\alpha}\sigma$ 对轴向速度 u 的影响
Fig.2 Effect of $\bar{\alpha}\sigma$ on axial velocity vs. channel width at $Ha = 0$

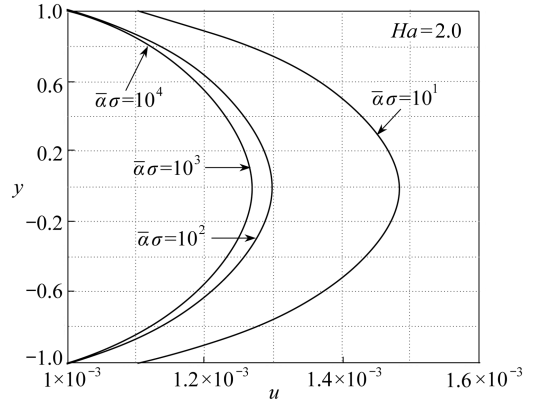


图3 $Ha = 2.0$ 时, $\bar{\alpha}\sigma$ 对轴向速度 u 的影响
Fig.3 Effect of $\bar{\alpha}\sigma$ on axial velocity vs. channel width at $Ha = 2.0$

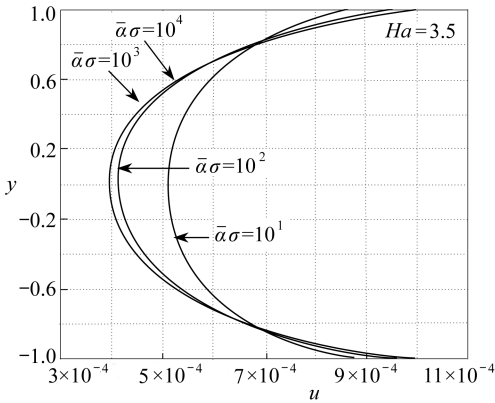


图4 $Ha = 3.5$ 时, $\bar{\alpha}\sigma$ 对轴向速度 u 的影响
Fig.4 Effect of $\bar{\alpha}\sigma$ on axial velocity vs. channel width at $Ha = 3.5$

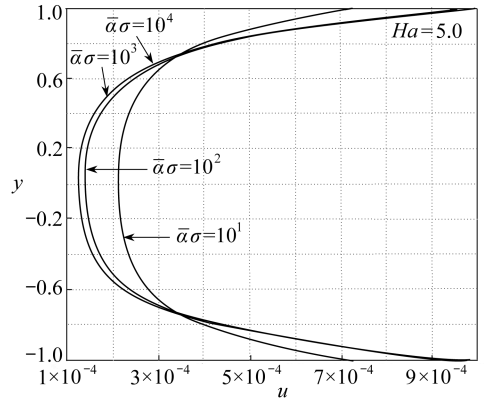


图5 $Ha = 5.0$ 时, $\bar{\alpha}\sigma$ 对轴向速度 u 的影响
Fig.5 Effect of $\bar{\alpha}\sigma$ on axial velocity vs. channel width at $Ha = 5.0$

由图2~图5可以看出,随着多孔参数 ($\bar{\alpha}\sigma$) 的增大,速度在减小.对于大的多孔参数值 ($>10^3$),速度分布与多孔参数无关.图2~图5还表明,对于这里考虑的所有多孔参数的可能值,不管是否考虑 Darcy 速度,磁场的作用都会使轴向速度减小。

当多孔参数 ($\bar{\alpha}\sigma$) 由 10 增加到 10^3 时,轴向速度在减小,这意味着多孔性会减缓流动.然而,当多孔参数进一步增加时,轴向速度并没有出现明显地变化,因为这时的壁面如同不可渗透的壁面.还可以注意到,对于小的 Ha 值 ($Ha = 0$ 至 $Ha = 2$),曲线显示,随着 Ha 值的增加,速度在减小,而对于大的 Ha 值,速度出现反转。

磁场对轴向速度的影响如图6~图9所示.速度分布曲线为抛物线.可以看出,磁场的作用会减缓流体的轴向运动,证实了这样一个事实:磁场使导电液体显示出刚性的特点。

对于不同的滑动参数值 ($\bar{\alpha}$),图10~图13给出了流体轴向速度的分布曲线.可以看到,

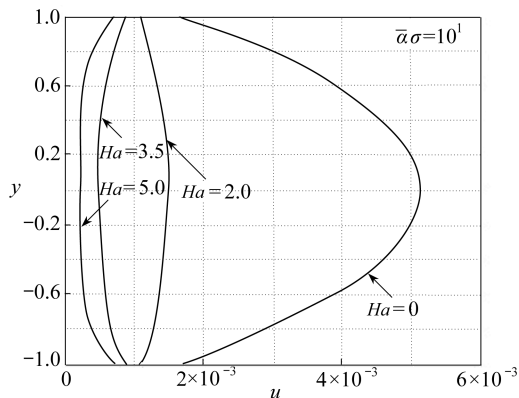


图6 $\bar{\alpha}\sigma = 10^1$ 时, Ha 对轴向速度 u 的影响
Fig. 6 Effect of Ha on axial velocity vs. channel width at $\bar{\alpha}\sigma = 10^1$

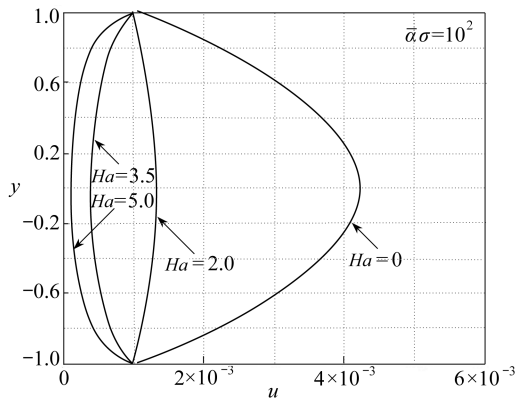


图7 $\bar{\alpha}\sigma = 10^2$ 时, Ha 对轴向速度 u 的影响
Fig. 7 Effect of Ha on axial velocity vs. channel width at $\bar{\alpha}\sigma = 10^2$

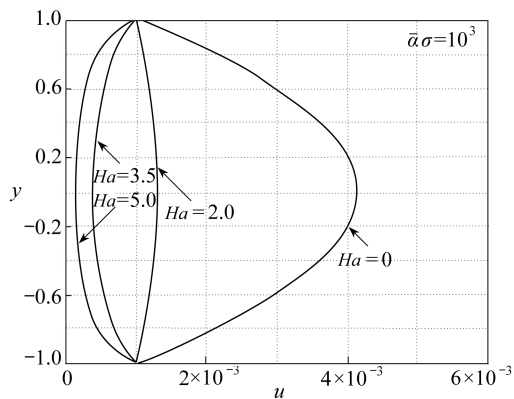


图8 $\bar{\alpha}\sigma = 10^3$ 时, Ha 对轴向速度 u 的影响
Fig. 8 Effect of Ha on axial velocity vs. channel width at $\bar{\alpha}\sigma = 10^3$

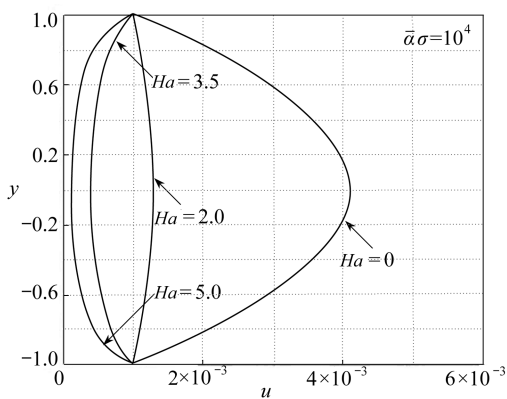


图9 $\bar{\alpha}\sigma = 10^4$ 时, Ha 对轴向速度 u 的影响
Fig. 9 Effect of Ha on axial velocity vs. channel width at $\bar{\alpha}\sigma = 10^4$

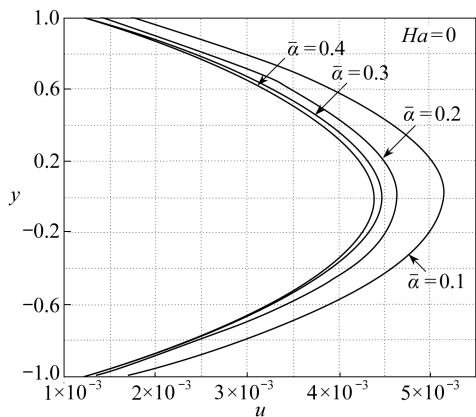


图10 $Ha = 0$ 时, $\bar{\alpha}$ 对轴向速度 u 的影响
Fig. 10 Effect of $\bar{\alpha}\sigma$ on axial velocity vs. channel width at $Ha = 0$

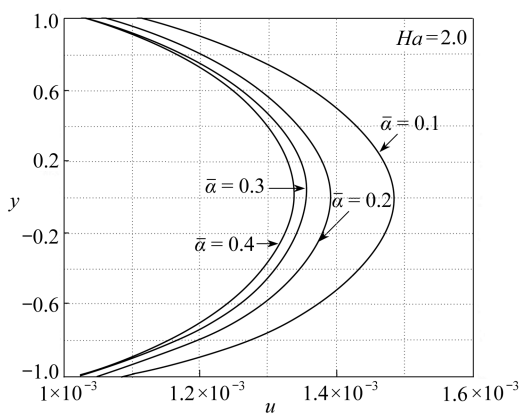


图11 $Ha = 2.0$ 时, $\bar{\alpha}$ 对轴向速度 u 的影响
Fig. 11 Effect of $\bar{\alpha}\sigma$ on axial velocity vs. channel width at $Ha = 2.0$

抛物线分布的轴向速度曲线,其最大值出现在管道中心线上,最小值出现在壁面上。然而,当滑

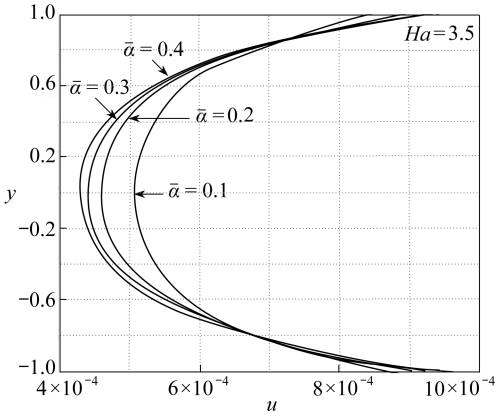


图 12 $Ha = 3.5$ 时, $\bar{\alpha}$ 对轴向速度 u 的影响

Fig. 12 Effect of $\bar{\alpha}\sigma$ on axial velocity vs. channel width at $Ha = 3.5$

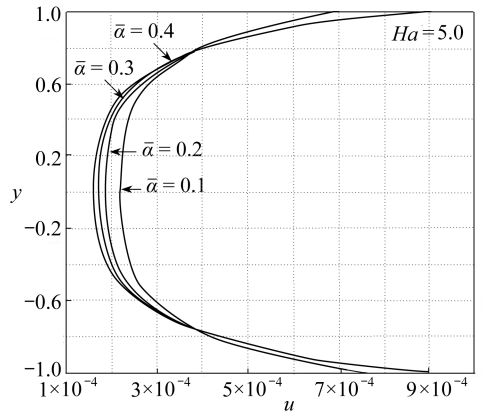


图 13 $Ha = 5.0$ 时, $\bar{\alpha}$ 对轴向速度 u 的影响

Fig. 13 Effect of $\bar{\alpha}\sigma$ on axial velocity vs. channel width at $Ha = 5.0$

动参数 ($\bar{\alpha}$) 增大时,可以观察到轴向速度分布曲线的峰值都出现减小. 这些结果,与 Makinde 等^[18]所做的工作,即可渗透边界上出现滑动时,管道中的 MHD 稳定流动的结果,有着良好的一致性.

表 1 当 $\bar{\alpha} = 0.1$, $\bar{\alpha}\sigma$ 和 Ha 取不同数值时,滑动速度的分布

Table 1 Slip velocity distribution for different values of $\bar{\alpha}\sigma$ and Ha ($\bar{\alpha} = 0.1$)

$Ha \downarrow \bar{\alpha}\sigma \rightarrow$	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
0.0	0.008 6	0.001 100 00	0.000 108 90	0.000 010 918	0.000 001 092 0	0.000 001 009 2
2.0	0.007 7	0.001 000 00	0.000 104 06	0.000 010 440	0.000 001 044 3	0.000 001 004 4
3.5	0.006 9	0.000 978 76	0.000 102 13	0.000 010 257	0.000 001 026 2	0.000 001 002 6
5.0	0.006 3	0.000 958 71	0.000 101 21	0.000 010 178	0.000 001 018 3	0.000 001 001 8

利用方程(22),表 1 给出了多孔参数 ($\bar{\alpha}\sigma$) 和 Hartmann 数 (Ha) 取不同数值时,滑动速度的分布.可以看出,当多孔参数和 Hartmann 数都增加时,滑动速度在减小.

表 2 考虑 Darcy 速度, $\bar{\alpha}$ 和 Ha 取不同数值时,滑动速度的分布

Table 2 Slip velocity distribution for different values of $\bar{\alpha}$ and Ha in the presence of Darcy velocity

$Ha \downarrow \bar{\alpha} \rightarrow$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.0	0.008 6	0.009 2	0.009 4	0.009 5	0.009 6	0.009 7
2.0	0.007 7	0.008 6	0.009 0	0.009 3	0.009 4	0.009 5
3.5	0.006 9	0.008 1	0.008 7	0.009 0	0.009 2	0.009 3
5.0	0.006 3	0.007 7	0.008 3	0.008 7	0.008 9	0.009 1

表 2 和表 3 分别给出了多孔参数取小值和取大值时,不同的 Hartmann 数下,滑动参数对滑动速度的影响.

由表 2 可看出,滑动速度随着 Hartmann 数的增加而减小,考虑 Darcy 速度 ($Q_1 = 0.001 \text{ m/s}$ 即多孔参数 ($\bar{\alpha}\sigma$) 取小值)时,滑动速度随着滑动参数的增加而增加.然而,由表 3 可以看出,在不考虑 Darcy 速度 ($Q_1 = 0.0 \text{ m/s}$ 即多孔参数 ($\bar{\alpha}\sigma$) 取大值)时,Hartmann 数和滑动参数都在增加时,滑动速度却在减小.

比较表 2 和表 3 可以清楚地看出,考虑 Darcy 速度时的滑动速度,比不考虑 Darcy 速度时的滑动速度要大些.确实,由表 3 可以清楚地看出,不考虑 Darcy 速度时,滑动速度可以忽略不

计,它呈现不可渗透壁面的情况。

表3 不考虑 Darcy 速度, $\bar{\alpha}$ 和 Ha 取不同数值时,滑动速度的分布

Table 3 Slip velocity distribution for different values of $\bar{\alpha}$ and Ha in the absence of Darcy velocity

$Ha \downarrow \bar{\alpha} \rightarrow$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.0	0.000 010 092	0.000 010 046	0.000 010 031	0.000 010 023	0.000 010 018	0.000 010 015
2.0	0.000 010 044	0.000 010 022	0.000 010 015	0.000 010 011	0.000 010 009	0.000 010 007
3.5	0.000 010 026	0.000 010 013	0.000 010 009	0.000 010 006	0.000 010 005	0.000 010 004
5.0	0.000 010 018	0.000 010 009	0.000 010 006	0.000 010 004	0.000 010 004	0.000 010 003

对于不同数值的 $\bar{\alpha}\sigma$, Ha 和 $\bar{\alpha}$, 利用公式

$$(\tau_{xy})_{y=-h} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=-h} = \frac{\bar{\alpha}\sigma Ha^2}{2h^2} \left[\frac{[n_f - 2hQ_1] \sinh(Ha)}{(Ha^2 - \bar{\alpha}\sigma) \sinh(Ha) + \bar{\alpha}\sigma Ha \cosh(Ha)} \right], \quad (26)$$

计算表面上名义的无量纲剪应力,结果在表4~表6中给出.表4给出了多孔参数和磁场对下壁面剪应力的影响。

表4 当 $\bar{\alpha} = 0.1$, $\bar{\alpha}\sigma$ 和 Ha 取不同数值时的剪应力

Table 4 Shear stress for different values of $\bar{\alpha}\sigma$ and Ha ($\bar{\alpha} = 0.1$)

$Ha \downarrow \bar{\alpha}\sigma \rightarrow$	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
0.0	-7.926 3	3.594 9	5.086 9	5.238 4	5.257 7	5.258 4
2.0	-13.374 6	0.436 2	2.318 0	2.513 0	2.532 6	2.532 7
3.5	-17.647 9	-1.213 6	1.216 6	1.471 3	1.496 9	1.497 0
5.0	-21.275 1	-2.359 4	0.691 5	1.015 4	1.048 0	1.048 1

表5 考虑 Darcy 速度, $\bar{\alpha}$ 和 Ha 取不同数值时的剪应力

Table 5 Shear stress for different values of $\bar{\alpha}$ and Ha in the presence of Darcy velocity

$Ha \downarrow \bar{\alpha} \rightarrow$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.0	-7.926 3	-9.643 7	-10.321 2	-10.679 5	-10.904 6	-11.060 4
2.0	-13.374 6	-15.619 7	-16.539 5	-17.040 0	-17.354 6	-17.570 6
3.5	-17.647 9	-21.166 6	-22.672 1	-23.507 8	-24.039 3	-24.407 1
5.0	-21.275 1	-26.366 8	-28.652 0	-29.949 7	-30.786 2	-31.370 4

很明显,对于所考虑到的多孔参数的所有可能值,磁场的作用使剪应力数值在减小.不管是否考虑磁场,多孔参数的作用使剪应力的增大.但是,当多孔参数 ($\bar{\alpha}\sigma$) 增加到超出 10^5 时,它对剪应力的影响将变得不那么明显.然而,当 Ha 和 $\bar{\alpha}\sigma$ 分别增加到超出 3.5 和 10^2 时,可以看出,剪应力变为正值,蕴含着应力是向上作用的,这是因为流动方向的逆转所引起的。

表6 不考虑 Darcy 速度, $\bar{\alpha}$ 和 Ha 取不同数值时的剪应力

Table 6 Shear stress for different values of $\bar{\alpha}$ and Ha in the absence of Darcy velocity

$Ha \downarrow \bar{\alpha} \rightarrow$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.0	5.257 7	5.257 7	5.257 7	5.257 7	5.258 4	5.258 4
2.0	2.532 6	2.532 6	2.532 6	2.532 7	2.532 7	2.532 7
3.5	1.496 9	1.496 9	1.497 0	1.497 0	1.497 0	1.497 0
5.0	1.048 0	1.048 1	1.048 1	1.048 1	1.048 1	1.048 1

由表5和表6可以看出,对于多孔参数取小值(考虑 Darcy 速度, $Q_1 = 0.001$ m/s)和取大值(不考虑 Darcy 速度, $Q_1 = 0.0$ m/s)时,随着滑动参数 ($\bar{\alpha}$) 和 Hartmann 数 (Ha) 的增加,剪应力在减小,而当滑动参数 $\bar{\alpha}$ 增加时,剪应力并没有明显的变化.表5和表6中所表示的剪应

力符号发生改变,是由于流动逆转现象引起的。

最后还可以看到,上壁面的剪应力和下壁面的剪应力,数值上是相同的,而符号发生了改变。这显示作用于上下两个壁面上的剪应力,大小相等方向相反现象。

4 结 论

研究了多孔介质包裹的等宽管道中, Darcy 速度、多孔参数、Hartmann 数和滑动参数,对粘性不可压缩导电流体稳定流动的影响。结果显示,流体的轴向速度随多孔参数、Hartmann 数和滑动参数而减小。还注意到,由于 Darcy 速度和滑动参数的改变,壁面附近的流动出现逆转。然而,剪应力随着多孔参数的增加出现增加的趋势,而随着 Hartmann 数的增加出现减小的趋势。

参考文献:

- [1] Makinde O D. Magneto-hydrodynamic stability of plane-Poiseuille flow using multideck asymptotic technique[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2003, **37**(3): 251-259.
- [2] Rao A R, Deshikachar K S. MHD oscillatory flow of blood through channels of variable cross section[J]. *Int J Engng Sci*, 1986, **24**(10): 1615-1628.
- [3] Berman A S. Laminar flow in channels with porous walls[J]. *J Appl Phys*, 1953, **24**(9): 1232-1235.
- [4] Sellars J R. Laminar flow in channels with porous walls at high suction Reynolds numbers [J]. *J Appl Phys*, 1955, **26**(4): 489-490.
- [5] Yuan S W. Further investigations of laminar flow in channels with porous walls[J]. *J Appl Phys*, 1956, **27**(3): 267-269.
- [6] Wallace W E, Pierce C I, Swayer W K. Experiments on the flow of mercury in porous media in a transverse magnetic field[R]. TN23, U7, No. 7259. Washington DC: US Bureau of Mines, 1969.
- [7] Rudraiah N, Ramaiah B K, Rajasekhar B M. Hartmann flow over a permeable bed[J]. *Int J Engng Sci*, 1975, **13**(1): 1-24.
- [8] Beavers G S, Joseph D D. Boundary conditions at a naturally permeable wall[J]. *J Fluid Mech*, 1967, **30**(1): 197-207.
- [9] Richardson S. A model for the boundary condition of a porous material—part 2 [J]. *J Fluid Mech*, 1971, **49**(2): 327-336.
- [10] Rajasekhar B M. Experimental and theoretical study of flow of fluids past porous media[D]. PhD Thesis. Bangalore Univ, 1974.
- [11] Rudraiah N, Veerabhadrar R. Temperature distribution in Couette flow past a permeable bed [J]. *Proc Mathematical Sciences*, 1977, **86**(6): 537-547.
- [12] Darcy H. *Les Fontaines Publique De La Ville De Dijon*[M]. Delmont, Paris, 1856.
- [13] Van Lankveld M A M. Validation of boundary conditions between a porous medium and a viscous fluid[R]. Report No. WFW 91.071. Eindhoven University of Technology, August, 1991.
- [14] Srivastava A C. Bull[J]. *Gauhati University Mathematics Association*, 1996, **3**:1.
- [15] Singh R, Lawrence L. Influence of slip velocity at a membrane surface on ultra-filtration performance—II: tube flow system[J]. *Int J Heat and Mass Transfer*, 1979, **22**(5): 731-737.
- [16] Pal D, Veerabhadrar R, Shivakumar P N, Rudraiah N. Longitudinal dispersion of tracer particles in a channel bounded by porous media using slip condition[J]. *Int J Math Math*

- Sci*, 1984, **7**(4): 755-764.
- [17] Khan M, Hayat T, Wang Y. Slip effects on shearing flows in a porous medium[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2008, **24**(1): 51-59.
- [18] Makinde O D, Osalusi E. MHD flow in a channel with slip at the permeable boundaries[J]. *Rom J Phys*, 2006, **51**(3): 319-328.
- [19] Ganesh S, Krishnambal S. Magnetohydrodynamic flow of viscous fluid between two parallel porous plates[J]. *J Appl Sci*, 2006, **6**(11): 2420-2425.
- [20] Chandrasekhara B D, Rudraiah N. MHD flow through a channel of varying gap[J]. *Indian J Pure and Appl Math*, 1980, **11**(8): 1105-1123.
- [21] Shivakumar P N, Nagaraj S, Veerabhadraiah R, Rudraiah N. Fluid movement in a channel of varying gap with permeable walls covered by porous media[J]. *Int J Engng Sci*, 1986, **24**(4): 479-492.
- [22] Sparrow E M, Cess R D. Magnetohydrodynamic flow and heat transfer about a rotating disc [J]. *J Appl Mech*, 1962, **29**: 181-187.
- [23] Roberts P H. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*[M]. London: Longmans Publications, 1967.
- [24] Langlois W F. Creeping viscous flow through a two dimensional channel[J]. *Proc Third U S Nat Cong Appl Mech*, 1958: 777-783.

Hydromagnetic Flow Through a Uniform Channel Bounded by Porous Media

K. Ramakrishnan¹, K. Shailendra²

(1. *Department of Mathematics, Sri Krishna College of Engineering and Technology, Sugunapuram, Kuniyathur, Coimbatore-641 008, Tamilnadu, India;*

2. *Department of Mathematics, Amirta School of Engineering, Amirta Vishva Vidyaapeetham, Coimbatore-641 105, Tamilnadu, India)*

Abstract: The combined effects of magnetic field, permeable walls, Darcy velocity and slip parameter on the steady flow of a fluid in a channel of uniform width were studied. The fluid flowing in the channel was assumed to be homogeneous, incompressible and Newtonian. Analytical solutions were constructed for the governing equations using Beavers-Joseph slip boundary conditions. Effects of the magnetic field, permeability, Darcy velocity and slip parameter on the axial velocity, slip velocity and shear stress were discussed in detail. It is seen that the Hartmann number, Darcy velocity, porous parameter and slip parameter play a vital role in altering the flow and in turn the shear stress.

Key words: uniform channel; permeable walls; magnetic field; slip velocity; shear stress