

热传导的微极固体和流体介质 界面上波的传播*

R·库玛¹, M·考尔², S·C·冉吉范西³

- (1. 古鲁格舍德拉大学 数学系,古鲁格舍德拉 136119,印度;
2. 古鲁那纳克开发工程学院 应用科学系,卢迪亚纳,旁遮普 141008,印度;
3. (联合)工程与技术学院 应用科学系,旁遮普 140601,印度)

(傅衣铭推荐)

摘要: 研究微极广义热弹性固体半空间和热传导微极流体半空间界面上波的传播.讨论微极广义热弹性固体半空间和热传导微极流体半空间之间平面界面上,斜向入射平面波的反射和透射现象.假设入射波穿过微极广义热弹性固体,射向平面界面后传播.得到了封闭形式的、不同反射和透射波的波幅比,它们是入射角、频率的函数,并为介质的弹性性质所影响.对一些特定的类型,显示出微极和热松弛对波幅比的影响.还从本文的研究中推演出一些早期工作的结果.

关键词: 微极固体; 微极流体; 热弹性; 反射系数; 透射系数; 半空间

中图分类号: O345;O11 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.07.007

引 言

微极流体理论是由 Eringen^[1]提出的.微极流体除了经典的、由速度场表示的平动自由度之外,还为3个旋转的矢量场所控制. Eringen 提出了微极流体^[2],作为流体的一个子类,允许局部的流体单元,作没有伸长的刚性旋转.微极流体能够承受应力偶、体力偶、非对称的应力张量,并且能够控制一个不依赖于流体速度的转动场.一大类流体,例如各向异性的流体、带有刚性分子结晶的液体、磁流体、尘埃云、浑浊的液体、生物学热带流体、流过翼面的是被尘土弄脏了的空气或雪水等,都可以实际地被模拟为微极流体.众多作者,特别是 Ariman 等^[3-4], Riha^[5], Eringen 和 Kafadar^[6], Brulin^[7], Aggarwal 和 Dhanapal^[8], Payne 和 Straughan^[9], Gorla^[10], Eringen^[11], Aydemir 和 Venart^[12], Yerofeyev 和 Soldatov^[13], Yeremeyev 和 Zubov^[14], Hsia 和 Cheng^[15], Hsia, Chiu, Su 和 Chen^[16]等,研究了不同类型的微极流体和热传导微极流体问题.

由 Eringen^[17]提出并发展了的微极弹性理论,近年来受到了广泛地关注,使得固体变形性质的研究成为可能,而仅用经典理论研究是不够充分的.在条形状材料的研究中,微极理论被认为特别有用,如同分子,可以展示其微转动的影响,还能够承受体力偶和面力偶的作用.一个

* 收稿日期: 2010-11-16; 修订日期: 2011-05-09

作者简介: Rajneesh Kumar(联系人. E-mail:rajneesh kuk@rediffmail.com).

本文原文为英文,由吴承平译,张禄坤校.

微极的连续体,就是一个互相连接的、小型刚体颗粒组成的集合,同时进行平动和转动两种运动.由这些材料组成的、靠近固体表面单元的力,就可以完全由该点的应力向量来表示.

热弹性理论涉及到弹性体上的力学和热学效应.非耦合的热弹性理论,由独立于力学效应的传热方程和含有温度(作为一个已知函数)的运动方程所组成. Biot^[18]建立了耦合的热弹性理论,消除了经典的非耦合理论中固有的悖论:弹性变化对温度没有影响.两种理论的热方程均呈抛物型,热传导波以无限大的速度传播,与物理上的观测正相反.为了纠正这一错误,提出了两个更为一般的耦合理论.第1个更一般的耦合理论由 Lord 和 Shulman^[19]提出,他们提出了一个新的热传导定律,取代经典的 Fourier 定律,得到波动形式的传热方程.它包含了热通量矢量及其对时间的导数,还含有一个担当松弛时间的新常数.因此该理论建立的控制方程是波动型的,确保热传导波和弹性波以有限的速度传播.该理论的其他控制方程,如像运动方程和本构关系,仍保持着耦合的热弹性理论和非耦合的热弹性理论相同的关系.

第2个更一般的弹性耦合理论,就是所谓带两个松弛时间的热弹性理论,或者称为温度变化率依赖于热弹性的理论. Muller^[20]在审阅热弹性固体的热动力学时,提出了一个熵不等式,他利用该不等式,为一类本构方程设置了约束条件. Green 和 Laws^[21]对该不等式作了推广. Green 和 Lindsay^[22]得到了另一种版本的本构方程(G-L理论). Suhubi 独立地并且更为明确地得到了上述结果,参看文献[23].这一理论包含两个常量,担当松弛时间,并且修正了所有的耦合理论方程.如果考虑中的介质中心对称,那么经典的 Fourier 热传导定律并不违反.

众多学者在微极/微极弹性半空间界面上,研究了平面波的反射和透射问题. Tomar 和 Gogna^[24-26], Kumar, Sharma 和 Ram^[27-28], Singh 和 Tomar^[29]在一个微极流体/微极固体半空间界面上,讨论了纵波问题.

本文在一个微极广义热弹性固体半空间和热传导微极流体半空间的界面上,研究了平面波的反射和透射问题.以图形的形式,给出了微极和热松弛效应各种平面入射波(纵向位移波(LD波)、热波(T波)、耦合的横向波(CD-I波和CD-II波)时的波幅比.

1 基本方程

不计体力、体力偶和热源时,均匀、各向同性、微极弹性介质的广义热弹性理论的场方程组,由 Eringen^[17], Lord 和 Shulman^[19]及 Green 和 Lindsay^[22]给出如下:

$$(\lambda + 2\mu + \kappa) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\mu + \kappa) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \kappa(\nabla \times \boldsymbol{\phi}) - \nu \left(1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla T = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma) \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}) - \gamma \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\phi}) + \kappa \nabla \times \mathbf{u} - 2\kappa \boldsymbol{\phi} = \rho \hat{J} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\phi}}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$K^* \nabla^2 T = \rho c^* \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right) + \nu T_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \eta_0 \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) (\nabla \cdot \mathbf{u}), \quad (3)$$

其本构关系为

$$t_{ij} = \lambda u_{r,r} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \kappa(u_{j,i} - \varepsilon_{ijr} \phi_r) - \nu \left(T + \tau_1 \frac{\partial T}{\partial t}\right), \quad (4)$$

$$m_{ij} = \alpha \phi_{r,r} \delta_{ij} + \beta \phi_{i,j} + \gamma \phi_{j,i}, \quad i, j, r = 1, 2, 3, \quad (5)$$

其中, λ 和 μ 为 Lamé 常数; κ, α, β 和 γ 为微极常数; t_{ij} 为应力张量分量; m_{ij} 为应力偶张量分量; \mathbf{u} 为位移向量, $\boldsymbol{\phi}$ 为微转动向量; ρ 为密度; \hat{J} 为微惯性; K^* 为热传导率; c^* 为常应变时的比热

容; T_0 为均衡的温度; T 为温度的改变; $\nu = (3\lambda + 2\mu + \kappa)\alpha_T$, 这里 α_T 为热的线膨胀系数; δ_{ij} 为 Kronecker δ 符号; ϵ_{ijr} 为交变张量. 对于 Lord-Shulman (L-S) 理论, $\eta_0 = 1$, $\tau_1 = 0$; 对于 Green-Lindsay (G-L) 理论, $\eta_0 = 0$, $\tau_1 > 0$. 对于 G-L 理论, 热松弛时间 τ_0 和 τ_1 满足不等式 $\tau_0 \geq \tau_1 \geq 0$.

不计体力、体力偶和热源时, Ciarletta^[30] 给出的热传导微极流体的场方程和本构关系为

$$D_1 \mathbf{v} + (\lambda^f + \mu^f) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \kappa^f (\nabla \times \boldsymbol{\Psi}) - b \nabla T^f - c_0 \nabla \phi^{*f} = 0, \quad (6)$$

$$D_2 \boldsymbol{\Psi} + (\alpha^f + \beta^f) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\Psi}) + \kappa^f (\nabla \times \mathbf{v}) = 0, \quad (7)$$

$$K_1^* \nabla^2 T^f - b T_0^f (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \rho^f a T_0^f \frac{\partial T^f}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\rho^f \frac{\partial \phi^{*f}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} D_1 = (\mu^f + \kappa^f) \Delta - \rho^f \frac{\partial}{\partial t}, \\ D_2 = \gamma^f \Delta - I \frac{\partial}{\partial t} - 2\kappa^f, \\ D_3 = \kappa^f \Delta - \rho^f a T_0^f \frac{\partial}{\partial t}, \Delta g = g_{,ii}, \end{cases} \quad (10)$$

这里, 角标 f 表示与流体有关的物理量和材料常数.

本构关系为

$$\begin{cases} t_{ij}^f = -p \delta_{ij} + \sigma_{ij}^f, p = b T^f + c_0 \phi^{*f}, \\ \sigma_{ij}^f = \lambda^f \gamma_{rr} \delta_{ij} + (\mu^f + \kappa^f) \gamma_{ij} + \mu^f \gamma_{ji}, \\ m_{ij}^f = \alpha^f \nu_{rr} \delta_{ij} + \beta^f \nu_{ij} + \gamma^f \nu_{ji}, \end{cases} \quad (11)$$

其中, $\gamma_{ij} = v_{j,i} + \epsilon_{jir} \Psi_r$, $\nu_{ij} = \Psi_{j,i}$, 且 $\lambda^f, \mu^f, \kappa^f, \alpha^f, \beta^f, \gamma^f$ 和 c_0 为与流体有关的材料常数. σ_{ij}^f 为流体中的应力张量分量, m_{ij}^f 为流体中的应力偶张量分量. \mathbf{v} 为速度向量, $\boldsymbol{\Psi}$ 为微转动速度向量, ρ^f 为密度, I 为单位质量惯性矩量纲的标量常数, p 为压力, K_1^* 为热传导率, αT_0^f 为常应变时的比热容, T_0^f 为绝对温度, T^f 为温度的变化, ϕ^{*f} 为比体积的变化, $b = (3\lambda^f + 2\mu^f + \kappa^f)\alpha_{T^f}$, 这里 α_{T^f} 为热的线膨胀系数.

2 问题的公式化及其边界条件

考虑一个均匀、各向同性、微极的广义热弹性固体半空间 (介质 M_1), 与之相接触的、微极、热传流体半空间 (介质 M_2). 取 Cartesian 直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$, 原点在两介质的界面 $x_3 = 0$ 上, x_1 轴沿两个半空间的界面, 即 $M_1 (0 < x_3 < \infty)$ 和 $M_2 (-\infty < x_3 < 0)$, x_3 轴垂直指向介质 M_1 . 问题的几何关系见图 1.

考虑 x_1x_3 平面中的二维问题, 于是, 固体介质 M_1 中的位移向量 \mathbf{u} 和微转动向量 $\boldsymbol{\phi}$, 以及流体介质 M_2 中的速度向量 \mathbf{v} 和微转动向量 $\boldsymbol{\Psi}$ 取下列形式:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = (u_1(x_1, x_3), 0, u_3(x_1, x_3)), \\ \boldsymbol{\phi} = (0, \phi_2(x_1, x_3), 0), \\ \mathbf{v} = (v_1(x_1, x_3), 0, v_3(x_1, x_3)), \\ \boldsymbol{\Psi} = (0, \Psi_2(x_1, x_3), 0), \end{cases} \quad (12)$$

为了方便,引入如下无量纲量:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{\omega^* x_1}{c_1}, z' = \frac{\omega^* x_3}{c_1}, u'_1 = \frac{\rho \omega^* c_1}{\nu T_0} u_1, \\ u'_3 = \frac{\rho \omega^* c_1}{\nu T_0} u_3, v'_1 = \frac{\rho c_1}{\nu T_0} v_1, v'_3 = \frac{\rho c_1}{\nu T_0} v_3, \\ \phi'_2 = \frac{\rho c_1^2}{\nu T_0} \phi_2, \psi'_2 = \frac{\rho c_1^2}{\omega^* \nu T_0} \psi_2, t' = \omega^* t, \\ \tau'_1 = \omega^* \tau_1, T' = \frac{T}{T_0}, t'_{ij} = \frac{1}{\nu T_0} t_{ij}, \\ m'_{ij} = \frac{\omega^*}{c_2 \nu T_0} m_{ij}, t'_{ij} = \frac{1}{\nu T_0} t_{ij}^f, \\ m'_{ij} = \frac{\omega^*}{c_2 \nu T_0} m_{ij}^f, \\ \phi^{*f} = \rho \phi^{*f}, T^{*f} = \frac{T^f}{T_0}, \end{array} \right.$$

(13)

其中

$$\omega^* = \frac{\rho c^* c_1^2}{K^*}, c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu + \kappa}{\rho}.$$

位移分量 u_1, u_3 和速度分量 v_1, v_3 , 可以用无量纲形式的势函数 $\phi^s, \phi^f, \psi^s, \psi^f$ 表达为

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{\partial \phi^s}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi^s}{\partial x_3}, u_3 = \frac{\partial \phi^s}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi^s}{\partial x_1}, \\ v_1 = \frac{\partial \phi^f}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi^f}{\partial x_3}, v_3 = \frac{\partial \phi^f}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi^f}{\partial x_1}, \end{array} \right. \quad (14)$$

将方程(13)代入方程(1)~(3)和(6)~(9),并考虑到方程(12)和(14),省略上标“'”后,得到

$$\nabla^2 \phi^s - \left(1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) T - \frac{\partial^2 \phi^s}{\partial t^2} = 0, \quad (15)$$

$$\nabla^2 \psi^s - a_1 \phi_2 - a_2 \frac{\partial^2 \psi^s}{\partial t^2} = 0, \quad (16)$$

$$\nabla^2 \phi_2 - a_3 \nabla^2 \psi^s - a_4 \phi_2 - a_5 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} = 0, \quad (17)$$

$$\nabla^2 T = \left(1 + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial T}{\partial t} + \epsilon_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \eta_0 \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \nabla^2 \phi^s, \quad (18)$$

$$\nabla^2 \phi^f - b_1 T^f - b_2 \phi^{*f} - b_3 \frac{\partial \phi^f}{\partial t} = 0, \quad (19)$$

$$\nabla^2 \psi^f + b_4 \Psi_2 - b_5 \frac{\partial \psi^f}{\partial t} = 0, \quad (20)$$

$$\nabla^2 \Psi_2 - b_6 \nabla^2 \psi^f - b_7 \Psi_2 - b_8 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = 0, \quad (21)$$

$$\nabla^2 T^f - b_9 \nabla^2 \phi^f - b_{10} \frac{\partial T^f}{\partial t} = 0, \quad (22)$$

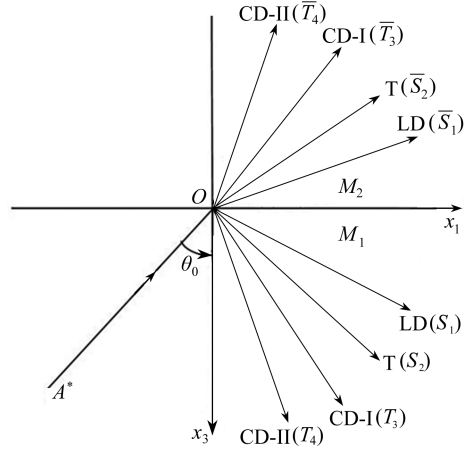


图1 问题的几何关系
Fig. 1 Geometry of the problem

$$b_{11} \nabla^2 \phi^f - \frac{\partial}{\partial t} \phi^{*f} = 0, \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\kappa}{\mu + \kappa}, \quad a_2 = \frac{\rho c_1^2}{\mu + \kappa}, \quad a_3 = \frac{\kappa c_1^2}{\gamma \omega^{*2}}, \quad a_4 = 2a_3, \\ a_5 &= \frac{\rho \hat{J} c_1^2}{\gamma}, \quad \epsilon_1 = \frac{\nu^2 T_0}{K^* \omega^* \rho}, \quad b_1 = \frac{b \rho c_1^2}{(\lambda^f + 2\mu^f + \kappa^f) \omega^* \nu}, \\ b_2 &= \frac{c_0 c_1^2}{(\lambda^f + 2\mu^f + \kappa^f) \omega^* \nu T_0}, \quad b_3 = \frac{\rho^f c_1^2}{(\lambda^f + 2\mu^f + \kappa^f) \omega^*}, \quad b_4 = \frac{\kappa^f}{\mu^f + \kappa^f}, \\ b_5 &= \frac{\rho^f c_1^2}{(\mu^f + \kappa^f) \omega^*}, \quad b_6 = \frac{\kappa^f c_1^2}{\gamma^f \omega^{*2}}, \quad b_7 = 2b_6, \quad b_8 = \frac{I c_1^2}{\gamma^f \omega^*}, \\ b_9 &= \frac{b \nu T_0^f}{K_1^* \rho \omega^*}, \quad b_{10} = \frac{\rho^f a T_0^f c_1^2}{K_1^* \omega^*}, \quad b_{11} = \frac{\nu T_0}{\rho^f c_1^2}, \end{aligned}$$

且 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ 为 Laplace 算子。

界面 $x_3 = 0$ 上的边界条件是, 正应力、切应力、切应力偶、法向速度、切向速度、微转动速度、温度和温度梯度的分量连续, 它们的数学表达式为

$$\begin{cases} T_{33} = T_{33}^f, \quad T_{31} = T_{31}^f, \quad m_{32} = m_{32}^f, \quad T = T^f, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = v_3, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = v_1, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \Psi_2, \quad K^* \frac{\partial T}{\partial x_3} = K_1^* \frac{\partial T^f}{\partial x_3}. \end{cases} \quad (24)$$

3 反射和透射

考虑通过介质 M_1 , 与界面 $x_3 = 0$ 垂直方向成 θ_0 角的入射波, 所产生的纵向位移波(LD波)、热波(T波)、横向位移和微转动的耦合波(CD-I波, CD-II波)的传播. 对应于每个入射波, 给出介质 M_1 中反射的 LD波、T波、CD-I波和 CD-II波, 以及, 介质 M_2 中透射的 LD波、T波、CD-I波和 CD-II波, 见图 1.

为求解方程组(15)~(23), 假设解为如下形式:

$$\begin{aligned} \{ \phi^s, T, \psi^s, \phi_2, \phi^f, \phi^{*f}, T^f, \bar{\psi}^f, \Psi_2 \} = \\ \{ \bar{\phi}^s, \bar{T}, \bar{\psi}^s, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}^f, \bar{\phi}^{*f}, \bar{T}^f, \bar{\psi}^f, \bar{\Psi}_2 \} e^{i \{ k(\sin \theta - x_3 \cos \theta) - \omega t \}}, \end{aligned} \quad (25)$$

其中, k 为波数, ω 为角频率, $\bar{\phi}^s, \bar{T}, \bar{\psi}^s, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}^f, \bar{\phi}^{*f}, \bar{T}^f, \bar{\psi}^f, \bar{\Psi}_2$ 为任意常数.

将方程(25)代入方程组(15)~(23), 得

$$V^4 + DV^2 + E = 0, \quad (26)$$

$$V^4 + D_1 V^2 + E_1 = 0, \quad (27)$$

$$V^4 + D_2 V^2 + E_2 = 0, \quad (28)$$

$$V^4 + D_3 V^2 + E_3 = 0, \quad (29)$$

其中

$$D = - \frac{[1 + (1 - i\omega\tau_1)\epsilon_1(i/\omega + \eta_0\tau_0)]}{(i/\omega + \tau_0)} + 1, \quad E = \frac{1}{(i/\omega + \tau_0)},$$

$$D_1 = \left(\frac{a_1 a_3}{\omega^2 a_2} - 1 \right) \frac{1}{(a_5 - a_4/\omega^2)} - \frac{1}{a_2}, \quad E_1 = \frac{1}{(a_5 - a_4/\omega^2) a_2},$$

$$D_2 = \frac{\omega^2}{b_3} \left(1 - \frac{ib_2 b_{11}}{\omega} \right) + \frac{i\omega}{b_{10}} \left(-1 + \frac{b_1 b_9}{b_3} \right), \quad E_2 = \frac{\omega^3}{b_3 b_{10}} \left(1 - \frac{ib_2 b_{11}}{\omega} \right),$$

$$D_3 = \frac{\omega}{b_5} + i\omega \frac{(1 - ib_4 b_6 / (\omega b_5))}{(b_8 + ib_7 / \omega)}, \quad E_3 = -\frac{\omega^2}{(b_8 + ib_7 / \omega) b_5},$$

且 $V^2 = \omega^2 / k^2$.

方程(26)和(27)是 V^2 的二次方程,因此,这些方程有4个 V 根. 对应于 V^2 的每个值,在固体介质中有两种类型的波,它们的速度依次递减,即 LD 波, T 波和 CD-I 波, CD-II 波. 设在介质 M_1 中, V_1 表示反射的 LD 波的速度, V_2 表示反射的 T 波的速度; V_3 表示反射的 CD-I 波速度, V_4 表示反射的 CD-II 波的速度. 类似地,方程(28)~(29)给出了介质 M_2 中,透射耦合的 LD 波, T 波和 CD-I 波, CD-II 波的4个波速依次为 $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3, \bar{V}_4$.

由方程(25)可见,介质 M_1 和 M_2 中,方程组(15)~(23)的渐近解可取如下形式:

介质 M_1 中

$$\{\phi^s, T\} = \sum_{i=1}^2 \{1, f_i\} (S_{0i} e^{i(k_i(x_1 \sin \theta_{0i} - x_3 \cos \theta_{0i}) - \omega_i t)} + P_i), \quad (30)$$

$$\{\psi^s, \phi_2\} = \sum_{j=3}^4 \{1, f_j\} (T_{0j} e^{i(k_j(x_1 \sin \theta_{0j} + x_3 \cos \theta_{0j}) - \omega_j t)} + P_j), \quad (31)$$

其中

$$f_i = \frac{i\omega(1 - 1/V_i^2)}{(i/\omega + \tau_1)}, \quad f_j = \frac{\omega^2(a_2 - 1/V_j^2)}{a_1}$$

和

$$P_i = S_i e^{i(k_i(x_1 \sin \theta_{0i} + x_3 \cos \theta_{0i}) - \omega_i t)}, \quad P_j = T_j e^{i(k_j(x_1 \sin \theta_{0j} + x_3 \cos \theta_{0j}) - \omega_j t)}.$$

介质 M_2 中

$$\{\phi^f, T^f, \phi^{*f}\} = \sum_{i=1}^2 \{1, \bar{f}_i, \bar{g}_i\} \bar{S}_i e^{i(\bar{k}_i(x_1 \sin \bar{\theta}_i - x_3 \cos \bar{\theta}_i - \bar{\omega}_i t))}, \quad (32)$$

$$\{\psi^f, \Psi_2\} = \sum_{j=3}^4 \{1, \bar{f}_j\} \bar{T}_j e^{i(\bar{k}_j(x_1 \sin \bar{\theta}_j - x_3 \cos \bar{\theta}_j) - \bar{\omega}_j t)}, \quad (33)$$

其中

$$\bar{f}_i = \frac{(b_9/V_5^2)}{(1/\bar{V}_i^2 - b_{10}(i/\omega))}, \quad \bar{f}_j = \frac{\omega^2}{b_4} \left(\frac{1}{\bar{V}_j^2} - b_5 \frac{i}{\omega} \right), \quad \bar{g}_i = \frac{-ib_{11}}{\bar{V}_i^2},$$

S_{0i}, T_{0j} 分别为入射的(LD 波, T 波)和(CD-I 波, CD-II 波)的波幅. S_i, T_j 分别为反射的(LD 波, T 波)和(CD-I 波, CD-II 波)的波幅. \bar{S}_i, \bar{T}_j 分别为透射的(LD 波, T 波)和(CD-I 波, CD-II 波)的波幅.

根据 Singh 和 Tomar 的文献[29],由广义的 Snell 定律,得到

$$\frac{\sin \theta_0}{V_0} = \frac{\sin \theta_1}{V_1} = \frac{\sin \theta_2}{V_2} = \frac{\sin \theta_3}{V_3} = \frac{\sin \theta_4}{V_4} = \frac{\sin \bar{\theta}_1}{\bar{V}_1} = \frac{\sin \bar{\theta}_2}{\bar{V}_2} = \frac{\sin \bar{\theta}_3}{\bar{V}_3} = \frac{\sin \bar{\theta}_4}{\bar{V}_4}, \quad (34)$$

其中

$$V_j = \frac{\omega}{k_j}, \quad \bar{V}_j = \frac{\omega}{\bar{k}_j} \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad \text{在 } x_3 = 0 \text{ 处.} \quad (35)$$

将 $\phi^s, \psi^s, \phi^f, \psi^f$ 代入边界条件(24),并利用方程(34)和(35),得到8个非齐次方程组成的方程组:

$$\sum_{j=1}^8 a_{ij} Z_j = Y_j \quad (i = 1, 2, \dots, 8), \quad (36)$$

其中

$$a_{11} = \left(d_1 + d_2 \left(1 - \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 \right) \right) + \left(\frac{V_1^2}{\omega^2} - \tau_1 i \frac{V_1}{\omega} \right) f_1,$$

$$a_{12} = \left(d_1 + d_2 \left(1 - \frac{V_2^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 \right) \right) \frac{V_2^2}{V_1^2} + \left(\frac{V_1^2}{\omega^2} - \tau_1 i \frac{V_1}{\omega} \right) f_2,$$

$$a_{1j} = d_2 \frac{V_1^2}{V_j V_0} \sin \theta_0 \sqrt{1 - \frac{V_j^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0},$$

$$a_{15} = - \left[\left(d_2^f + d_3^f \left(1 - \frac{\bar{V}_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 \right) \right) \frac{V_1^2}{\bar{V}_1^2} + \left(d_1^f \bar{f}_1 + d_1^f \bar{g}_1 \right) \frac{V_1^2}{\omega^2} \right],$$

$$a_{16} = - \left[\left(d_2^f + d_3^f \left(1 - \frac{\bar{V}_2^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 \right) \right) \frac{V_1^2}{\bar{V}_2^2} + \left(d_1^f \bar{f}_2 + d_1^f \bar{g}_2 \right) \frac{V_1^2}{\omega^2} \right],$$

$$a_{17} = d_3^f \frac{V_1^2}{\bar{V}_3 V_0} \sin \theta_0 \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_3^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \quad a_{18} = d_3^f \frac{V_1^2}{\bar{V}_4 V_0} \sin \theta_0 \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_4^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0},$$

$$a_{21} = - (2d_4 + d_5) \frac{V_1}{V_0} \sin \theta_0 \sqrt{1 - \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0},$$

$$a_{22} = - (2d_4 + d_5) \frac{V_1^2}{V_2 V_0} \sin \theta_0 \sqrt{1 - \frac{V_2^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0},$$

$$a_{2j} = d_4 \frac{V_1^2}{V_j^2} \left(1 - 2 \frac{V_j^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 \right) - d_5 \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 - d_5 \frac{V_1^2}{\omega^2} f_j,$$

$$a_{25} = - (2d_4^f + d_5^f) \frac{V_1^2}{\bar{V}_1 V_0} \sin \theta_0 \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0},$$

$$a_{26} = - (2d_4^f + d_5^f) \frac{V_1^2}{\bar{V}_2 V_0} \sin \theta_0 \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_2^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0},$$

$$a_{27} = - \left[d_4^f \frac{V_1^2}{\bar{V}_3^2} \left(1 - 2 \frac{\bar{V}_3^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 \right) + d_5^f \left(\frac{V_1^2}{\bar{V}_3^2} \left(\sqrt{1 - \frac{\bar{V}_3^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0} \right) - \frac{V_1^2}{\omega^2} \bar{f}_3 \right) \right],$$

$$a_{28} = - \left[d_4^f \frac{V_1^2}{\bar{V}_4^2} \left(1 - 2 \frac{\bar{V}_4^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 \right) + d_5^f \left(\frac{V_1^2}{\bar{V}_4^2} \left(\sqrt{1 - \frac{\bar{V}_4^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0} \right) - \frac{V_1^2}{\omega^2} \bar{f}_4 \right) \right],$$

$$a_{3i} = 0, \quad a_{33} = i \sqrt{1 - \frac{V_3^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0} f_3, \quad a_{34} = i \frac{V_3}{V_4} \sqrt{1 - \frac{V_4^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0} f_4, \quad a_{35} = 0,$$

$$a_{36} = 0, \quad a_{37} = ip_1 \frac{V_3}{\bar{V}_3} \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_3^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0} \bar{f}_3, \quad a_{38} = ip_1 \frac{V_3}{\bar{V}_4} \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_4^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0} \bar{f}_4,$$

$$a_{41} = \omega_1 \frac{V_1}{V_0} \sin \theta_0, \quad a_{42} = \omega_2 \frac{V_1}{V_0} \sin \theta_0, \quad a_{4j} = -\omega_j \frac{V_1}{V_j} \sqrt{1 - \frac{V_j^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0},$$

$$\begin{aligned}
a_{45} &= a_{46} = -i \frac{V_1}{V_0} \sin \theta_0, \quad a_{47} = -i \frac{V_1}{\bar{V}_3} \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_3^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \\
a_{48} &= -i \frac{V_1}{\bar{V}_4} \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_4^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \quad a_{51} = \omega_1 \sqrt{1 - \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \\
a_{52} &= \omega_2 \frac{V_2}{V_1} \sqrt{1 - \frac{V_2^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \quad a_{5j} = \omega_j \frac{V_1}{V_0} \sin \theta_0, \\
a_{55} &= i \frac{V_1}{\bar{V}_1} \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \quad a_{56} = i \frac{V_1}{\bar{V}_4} \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_4^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \\
a_{57} &= a_{58} = -i \frac{V_1}{V_0} \sin \theta_0, \quad a_{6i} = f_i, \quad a_{6j} = 0, \quad a_{65} = -\bar{f}_1, \\
a_{66} &= -\bar{f}_2, \quad a_{67} = a_{68} = 0, \quad a_{7i} = 0, \quad a_{73} = i\omega_3 f_3, \quad a_{74} = i \frac{V_3}{V_4} \omega_4 f_4, \\
a_{75} &= 0, \quad a_{76} = 0, \quad a_{77} = \frac{V_3}{\omega} \bar{f}_3, \quad a_{78} = \frac{V_3}{\omega} \bar{f}_4, \quad a_{81} = i f_1 \sqrt{1 - \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \\
a_{82} &= i f_2 \frac{V_1}{V_2} \sqrt{1 - \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \quad a_{8j} = 0, \quad a_{85} = i p_2 \frac{V_1}{\omega} \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \\
a_{86} &= i p_2 \frac{V_1}{\omega} \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_2^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \quad a_{87} = 0, \quad a_{88} = 0 \quad (i = 1, 2; j = 3, 4),
\end{aligned} \tag{37}$$

这里

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\lambda}{\rho c_1^2}, \quad d_2 = \frac{(2\mu + \kappa)}{\rho c_1^2}, \quad d_4 = \frac{2\mu}{\rho c_1^2}, \quad d_5 = \frac{d_2}{2}, \\
d_1^f &= \frac{b}{\nu}, \quad d_1^f = \frac{c_0}{\rho \nu T_0}, \quad d_2^f = \frac{\lambda^f \omega^*}{\rho c_1^2}, \quad d_3^f = \frac{(2\mu^f + \kappa^f) \omega^*}{\rho c_1^2}, \\
d_4^f &= \frac{\mu^f \omega^*}{\rho c_1^2}, \quad d_5^f = \frac{\kappa^f \omega^*}{\rho c_1^2}, \quad p_1 = \frac{\gamma^f \omega^*}{\gamma}, \quad p_2 = \frac{K_1^*}{K^*}.
\end{aligned}$$

对于入射的 LD 波、T 波、CD-I 波和 CD-II 波, 利用方程(34)和(35), 能够写出反射波的相位,

$$\frac{\cos \theta_i}{V_i} = \frac{1}{V_0} \left[\left(\frac{V_0}{V_i} \right)^2 - \sin^2 \theta_0 \right]^{1/2}, \quad \frac{\cos \theta_j}{V_j} = \frac{1}{V_0} \left[\left(\frac{V_0}{V_j} \right)^2 - \sin^2 \theta_0 \right]^{1/2}.$$

根据 Schoenberg 的文献[34], 假如我们记

$$\frac{\cos \theta_i}{V_i} = \frac{\cos \theta_i'}{V_i'} + \frac{c_i}{V_0 2\pi} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

则

$$\frac{\cos \theta_i'}{V_i'} = \frac{1}{V_0} \operatorname{Re} \left\{ \left[\left(\frac{V_0}{V_i} \right)^2 - \sin^2 \theta_0 \right]^{1/2} \right\}, \quad c_i = 2\pi \operatorname{Im} \left\{ \left[\left(\frac{V_0}{V_i} \right)^2 - \sin^2 \theta_0 \right]^{1/2} \right\},$$

其中, V_i' 为实际的相速度, 反射角 θ_i' 可以由下式给出:

$$\frac{V_i'}{V_0} = \frac{\sin \theta_i'}{\sin \theta_0} \left[\sin^2 \theta_0 + \left[\operatorname{Re} \left[\left(\frac{V_0}{V_i} \right)^2 - \sin^2 \theta_0 \right]^{1/2} \right]^2 \right]^{-1/2},$$

c_i 为沿深度的衰减, 等于入射波的波长, 即 $2\pi V_0/\omega$.

1) 入射的 LD 波

$$A^* = S_{01}, S_{02} = T_{03} = T_{04} = 0, Y_1 = -a_{11}, Y_2 = a_{21}, Y_3 = a_{31} = 0, \\ Y_4 = -a_{41}, Y_5 = a_{51}, Y_6 = -a_{61}, Y_7 = a_{71} = 0, Y_8 = a_{81};$$

2) 入射的 T 波

$$A^* = S_{02}, S_{01} = T_{03} = T_{04} = 0, Y_1 = -a_{12}, Y_2 = a_{22}, Y_3 = a_{32} = 0, \\ Y_4 = -a_{42}, Y_5 = a_{52}, Y_6 = -a_{62}, Y_7 = a_{72} = 0, Y_8 = a_{82};$$

3) 入射的 CD-I 波

$$A^* = T_{03}, S_{01} = S_{02} = T_{04} = 0, Y_1 = a_{13}, Y_2 = -a_{23}, Y_3 = a_{33}, \\ Y_4 = a_{43}, Y_5 = -a_{53}, Y_6 = a_{63} = 0, Y_7 = -a_{73}, Y_8 = a_{83} = 0;$$

4) 入射的 CD-II 波

$$A^* = T_{04}, S_{01} = S_{02} = T_{03} = 0, Y_1 = a_{14}, Y_2 = -a_{24}, Y_3 = a_{34}, \\ Y_4 = a_{44}, Y_5 = -a_{54}, Y_6 = a_{64} = 0, Y_7 = -a_{74}, Y_8 = a_{84} = 0.$$

同时

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{S_1}{A^*}, Z_2 = \frac{S_2}{A^*}, Z_3 = \frac{T_3}{A^*}, Z_4 = \frac{T_4}{A^*}, \\ Z_5 = \frac{\bar{S}_1}{A^*}, Z_6 = \frac{\bar{S}_2}{A^*}, Z_7 = \frac{\bar{T}_3}{A^*}, Z_8 = \frac{\bar{T}_4}{A^*}, \end{cases} \quad (38)$$

其中, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 为介质 M_1 中, 反射的 LD 波、T 波、耦合的 CD-I 波和 CD-II 波的复数的波幅比; Z_5, Z_6, Z_7, Z_8 为介质 M_2 中, 透射的 LD 波、T 波、耦合的 CD-I 波和 CD-II 波的复数的波幅比.

4 特殊情况

i) 若式(36)中 $\eta_0 = 1, \tau_1 = 0$, 得到带 1 个松弛时间的微极热弹性固体和微极热传导流体半空间界面上相应的波幅比;

ii) 若式(36)中 $\eta_0 = 0, \tau_1 > 0$, 得到带 2 个松弛时间的微极热弹性固体和微极热传导流体半空间界面上相应的波幅比;

iii) 略去介质 M_2 中微极的影响, 即令 $K^f \rightarrow 0$, 就得到微极广义热弹性固体半空间和热传导流体半空间界面上的波幅比:

$$\sum_{j=1}^7 a_{ij} Z_j = Y_i \quad (i = 1, 2, \dots, 7).$$

1) 入射的 LD 波

$$A^* = S_{01}, S_{02} = T_{03} = T_{04} = 0, Y_1 = -a_{11}, Y_2 = a_{21}, Y_3 = a_{31} = 0, \\ Y_4 = -a_{41}, Y_5 = a_{51}, Y_6 = -a_{61}, Y_7 = a_{71} = 0;$$

2) 入射的 T 波

$$A^* = S_{02}, S_{01} = T_{03} = T_{04} = 0, Y_1 = -a_{12}, Y_2 = a_{22}, Y_3 = a_{32} = 0, \\ Y_4 = -a_{42}, Y_5 = a_{52}, Y_6 = -a_{62}, Y_7 = a_{72} = 0;$$

3) 入射的 CD-I 波

$$A^* = T_{03}, S_{01} = S_{02} = T_{04} = 0, Y_1 = a_{13}, Y_2 = -a_{23}, Y_3 = a_{33}, \\ Y_4 = a_{43}, Y_5 = -a_{53}, Y_6 = a_{63} = 0, Y_7 = a_{73} = 0;$$

4) 入射的 CD-II 波

$$A^* = T_{04}, S_{01} = S_{02} = T_{03} = 0, Y_1 = a_{14}, Y_2 = -a_{24}, Y_3 = a_{34}, \\ Y_4 = a_{44}, Y_5 = -a_{54}, Y_6 = a_{64} = 0, Y_7 = a_{74} = 0.$$

其中由式(37)给出的 a_{ij} 值, 有如下变化:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{25} = -2d_4^f \frac{V_1^2}{\bar{V}_1 V_0} \sin \theta_0 \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, a_{26} = -2d_4^f \frac{V_1^2}{\bar{V}_2 V_0} \sin \theta_0 \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_2^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \\ a_{27} = - \left[d_4^f \frac{V_1^2}{\bar{V}_3^2} \left(1 - 2 \frac{\bar{V}_3^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 \right) \right], a_{37} = 0, a_{71} = i \sqrt{1 - \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0} f_1, \\ a_{72} = i \frac{V_1}{V_2} \sqrt{1 - \frac{V_2^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0} f_2, a_{7j} = 0, \\ a_{75} = ip_2 \cos \bar{\theta}_1 \bar{f}_1 \frac{V_1}{\omega}, a_{76} = ip_2 \cos \bar{\theta}_2 \bar{f}_2 \frac{V_1}{\omega}, a_{77} = 0 \quad (i = 1, 2; j = 3, 4); \end{array} \right. \quad (39)$$

iv) 在介质 M_1 和 M_2 中, 略去热效应, 就得到微极弹性固体半空间和流体半空间界面上的波幅比:

$$\sum_{j=1}^6 a_{ij} Z_j = Y_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

其中 a_{ij} 的值为

$$a_{11} = \left(d_1 + d_2 \left(1 - \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 \right) \right), a_{12} = d_2 \frac{V_1^2}{V_3 V_0} \sin \theta_0 \sqrt{1 - \frac{V_3^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \\ a_{13} = d_2 \frac{V_1^2}{V_4 V_0} \sin \theta_0 \sqrt{1 - \frac{V_4^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, a_{14} = - \left[\left(d_2^f + d_3^f \left(1 - \frac{\bar{V}_2^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 \right) \right) \frac{V_1^2}{\bar{V}_2^2} \right], \\ a_{15} = d_3^f \frac{V_1^2}{\bar{V}_3 V_0} \sin \theta_0 \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_3^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, a_{16} = d_3^f \frac{V_1^2}{\bar{V}_4 V_0} \sin \theta_0 \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_4^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \\ a_{21} = - (2d_4 + d_5) \frac{V_1}{V_0} \sin \theta_0 \sqrt{1 - \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \\ a_{22} = d_4 \frac{V_1^2}{V_3^2} \left(1 - 2 \frac{V_3^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 \right) - d_5 \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 - d_5 \frac{V_1^2}{\omega^2} f_3, \\ a_{23} = d_4 \frac{V_1^2}{V_4^2} \left(1 - 2 \frac{V_4^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 \right) - d_5 \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 - d_5 \frac{V_1^2}{\omega^2} f_4, \\ a_{24} = - (2d_4^f + d_5^f) \frac{V_1^2}{\bar{V}_2 V_0} \sin \theta_0 \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_2^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \\ a_{25} = - \left[d_4^f \frac{V_1^2}{\bar{V}_3^2} \left(1 - 2 \frac{\bar{V}_3^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 \right) + d_5^f \left(\frac{V_1^2}{\bar{V}_3} \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_3^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0} - \frac{V_1^2}{\omega^2} \bar{f}_3 \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
a_{26} &= - \left[d_4^f \frac{V_1^2}{\bar{V}_4^2} \left(1 - 2 \frac{\bar{V}_4^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 \right) + d_5^f \left(\frac{V_1^2}{\bar{V}_4^2} \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_4^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0} - \frac{V_1^2}{\omega^2} \bar{f}_4 \right) \right], \\
a_{31} &= 0, \quad a_{32} = i \sqrt{1 - \frac{V_3^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0} f_3, \quad a_{33} = i \frac{V_3}{V_4} \sqrt{1 - \frac{V_4^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0} f_4, \quad a_{34} = 0, \\
a_{35} &= i p_1 \frac{V_3}{\bar{V}_3} \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_3^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0} \bar{f}_3, \quad a_{36} = i p_1 \frac{V_3}{\bar{V}_4} \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_4^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0} \bar{f}_4, \\
a_{41} &= \omega_1 \frac{V_1}{V_0} \sin \theta_0, \quad a_{42} = -\omega_3 \frac{V_1}{V_3} \sqrt{1 - \frac{V_3^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \quad a_{43} = -\omega_4 \frac{V_1}{V_4} \sqrt{1 - \frac{V_4^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \\
a_{44} &= -i \frac{V_1}{V_0} \sin \theta_0, \quad a_{45} = -i \frac{V_1}{\bar{V}_3} \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_3^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \quad a_{46} = -i \frac{V_1}{\bar{V}_4} \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_4^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \\
a_{51} &= \omega_1 \sqrt{1 - \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \quad a_{52} = \omega_3 \frac{V_1}{V_0} \sin \theta_0, \quad a_{53} = \omega_4 \frac{V_1}{V_0} \sin \theta_0, \\
a_{54} &= i \frac{V_1}{\bar{V}_1} \sqrt{1 - \frac{\bar{V}_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \quad a_{55} = a_{56} = -i \frac{V_1}{V_0} \sin \theta_0, \quad a_{61} = 0, \\
a_{62} &= i \frac{V_1}{V_3} \omega_3 f_3, \quad a_{63} = i \frac{V_1}{V_4} \omega_4 f_4, \quad a_{64} = 0, \quad a_{65} = \frac{V_1}{\omega} \bar{f}_3, \quad a_{66} = \frac{V_1}{\omega} \bar{f}_4,
\end{aligned} \tag{40}$$

且

$$Z_1 = \frac{S_1}{A^*}, \quad Z_2 = \frac{T_3}{A^*}, \quad Z_3 = \frac{T_4}{A^*}, \quad Z_4 = \frac{\bar{S}_1}{A^*}, \quad Z_5 = \frac{\bar{T}_3}{A^*}, \quad Z_6 = \frac{\bar{T}_4}{A^*},$$

其中, Z_1, Z_2, Z_3 为介质 M_1 中, 反射的 LD 波、耦合的 CD-I 波和 CD-II 波的复数的波幅比; Z_4, Z_5, Z_6 为介质 M_2 中, 透射的 LD 波、耦合的 CD-I 波和 CD-II 波的复数的波幅比。

将上面无量纲量的结果, 变为有量纲的物理量后, 与 Singh 和 Tomar 在文献[29]中得到的结果相类似;

v) 若上部介质, 即 M_2 略去不计, 则得到微极广义热弹性固体半空间自由表面处的波幅比

$$\sum_{j=1}^4 a_{ij} Z_j = Y_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

其中 a_{ij} 的值为

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \left(d_1 + d_2 \left(1 - \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 \right) \right) + \left(\frac{V_1^2}{\omega^2} - \tau_1 i \frac{V_1}{\omega} \right) f_1, \\
a_{12} &= \left(d_1 + d_2 \left(1 - \frac{V_2^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 \right) \right) \frac{V_2^2}{V_1^2} + \left(\frac{V_1^2}{\omega} - \tau_1 i \frac{V_1}{\omega} \right) f_2, \\
a_{1j} &= d_2 \frac{V_j^2}{V_0^2} \sin \theta_j \sqrt{1 - \frac{V_j^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \\
a_{21} &= - (2d_4 + d_5) \frac{V_1}{V_0} \sin \theta_0 \sqrt{1 - \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{22} &= -(2d_4 + d_5) \frac{V_1^2}{V_2 V_0} \sin \theta_0 \sqrt{1 - \frac{V_2^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \\
a_{2j} &= d_4 \frac{V_1^2}{V_j^2} \left(1 - 2 \frac{V_j^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0\right) - d_5 \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 - d_5 \frac{V_1^2}{\omega^2} f_j, \\
a_{3i} &= 0, \quad a_{33} = i \sqrt{1 - \frac{V_3^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0} f_3, \quad a_{34} = i \frac{V_3}{V_4} \sqrt{1 - \frac{V_4^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0} f_4, \\
a_{41} &= i f_1 \sqrt{1 - \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \quad a_{42} = i f_2 \frac{V_1}{V_2} \sqrt{1 - \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \quad a_{4j} = 0 \quad (j = 3, 4)
\end{aligned} \tag{41}$$

且 $Z_1 = \frac{S_1}{A^*}, Z_2 = \frac{S_2}{A^*}, Z_3 = \frac{T_3}{A^*}, Z_4 = \frac{T_4}{A^*},$

其中, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 为介质 M_1 中, 反射的 LD 波、T 波和耦合的 CD-I 波和 CD-II 波的复数的波幅比。

将上面无量纲量的结果, 变换为有量纲的物理量后, 与 Kumar 和 Singh 在文献[33]中得到的结果相类似。

情况 V) 的子情况 (a) 若略去热效应, 则得到微极弹性固体半空间自由表面处的波幅比

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \left(d_1 + d_2 \left(1 - \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0\right)\right) + \left(\frac{V_1^2}{\omega^2} - \tau_1 i \frac{V_1^2}{\omega}\right) f_1, \\
a_{12} &= \left(d_1 + d_2 \left(1 - \frac{V_2^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0\right)\right) \frac{V_2^2}{V_1^2}, \\
a_{1j} &= d_2 \frac{V_j^2}{V_0^2} \sin \theta_j \sqrt{1 - \frac{V_j^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \\
a_{21} &= -(2d_4 + d_5) \frac{V_1}{V_0} \sin \theta_0 \sqrt{1 - \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \\
a_{22} &= -(2d_4 + d_5) \frac{V_1^2}{V_2 V_0} \sin \theta_0 \sqrt{1 - \frac{V_2^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0}, \\
a_{2j} &= d_4 \frac{V_1^2}{V_j^2} \left(1 - 2 \frac{V_j^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0\right) - d_5 \frac{V_1^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0 - d_5 \frac{V_1^2}{\omega^2} f_j, \quad a_{31} = a_{32} = 0, \\
a_{33} &= i \sqrt{1 - \frac{V_3^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0} f_3, \quad a_{34} = i \frac{V_1}{V_3} \sqrt{1 - \frac{V_4^2}{V_0^2} \sin^2 \theta_0} f_4 \quad (j = 3, 4)
\end{aligned} \tag{42}$$

和 $Z_1 = \frac{S_1}{A^*}, Z_2 = \frac{T_3}{A^*}, Z_3 = \frac{T_4}{A^*},$

其中, Z_1, Z_2, Z_3 为介质 M_1 中, 反射的 LD 波、耦合的 CD-I 波和 CD-II 波的复数的波幅比。

将上面的无量纲量, 变换成有量纲的物理量后, 与 Parfit 和 Eringen 在文献[31]中的结果相类似。

5 数值结果和讨论

数值计算时要用到两个半空间相关的参数值。

根据 Singh 和 Tomar 的文献[29], 介质 M_1 的微极常数取为

$$\begin{aligned} \lambda &= 0.209\,730 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad \mu = 0.918\,22 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \\ \kappa &= 0.229\,56 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \quad \gamma = 0.000\,042\,3 \times 10^5 \text{ N}, \\ \hat{J} &= 0.037 \times 10^{-2} \text{ m}^2, \quad \rho = 0.003\,4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3. \end{aligned}$$

根据 Dhaliwal 和 Singh 的文献[32], 介质 M_1 的热学参数取为

$$\begin{aligned} \nu &= 0.268 \times 10^7 \text{ N}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}), \quad c^* = 1.04 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}/(\text{kg} \cdot \text{K}), \\ T_0 &= 0.298 \text{ K}, \quad K^* = 1.7 \times 10^2 \text{ N}/(\text{s} \cdot \text{K}), \\ \tau_0 &= 0.613 \times 10^{-12} \text{ s}, \quad \tau_1 = 0.813 \times 10^{-12} \text{ s}, \quad \omega = 1. \end{aligned}$$

根据 Singh 和 Tomar 的文献[29], 介质 M_2 的微极常数取为

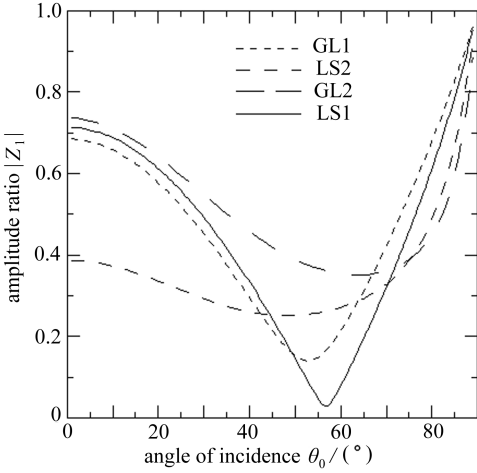


图 2(a) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_1|$ 的变化

Fig. 2(a) Amplitude ratios $|Z_1|$ at different angles of incidence θ_0

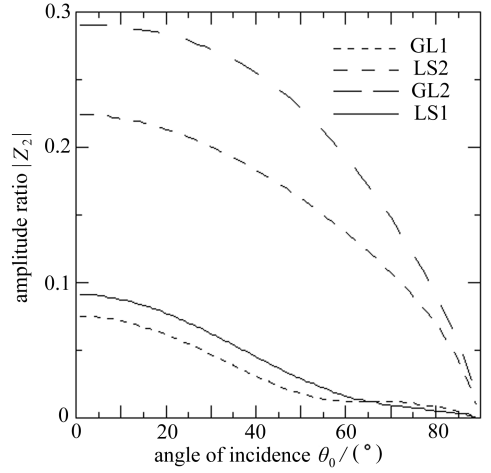


图 2(b) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_2|$ 的变化

Fig. 2(b) Amplitude ratios $|Z_2|$ at different angles of incidence θ_0

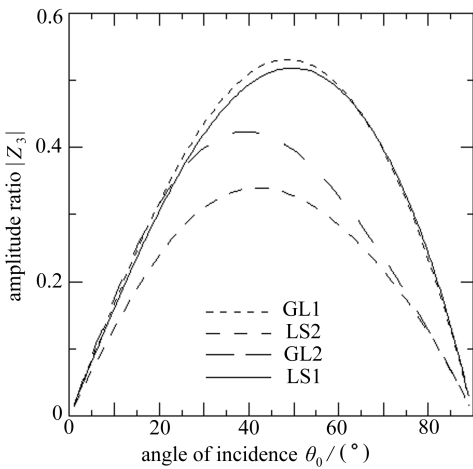


图 2(c) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_3|$ 的变化

Fig. 2(c) Amplitude ratios $|Z_3|$ at different angles of incidence θ_0

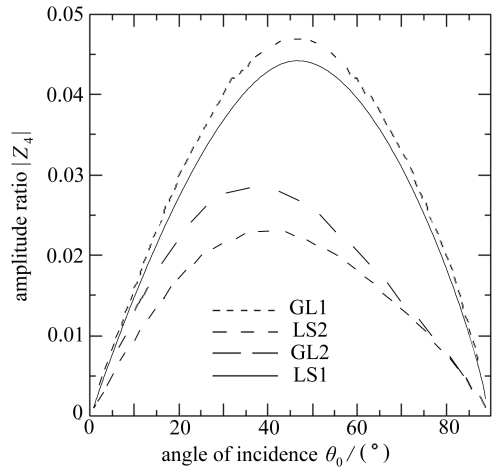


图 2(d) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_4|$ 的变化

Fig. 2(d) Amplitude ratios $|Z_4|$ at different angles of incidence θ_0

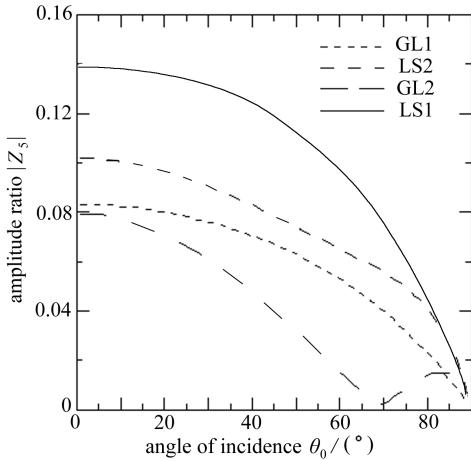
图 2(e) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_5|$ 的变化

Fig. 2(e) Amplitude ratios $|Z_5|$ at different angles of incidence θ_0

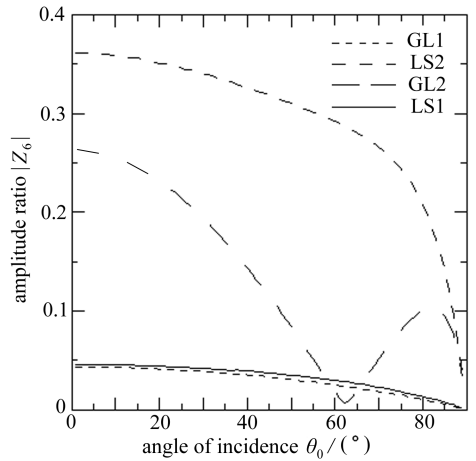
图 2(f) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_6|$ 的变化

Fig. 2(f) Amplitude ratios $|Z_6|$ at different angles of incidence θ_0

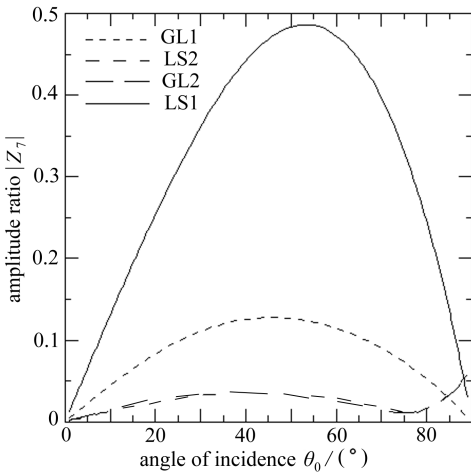
图 2(g) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_7|$ 的变化

Fig. 2(g) Amplitude ratios $|Z_7|$ at different angles of incidence θ_0

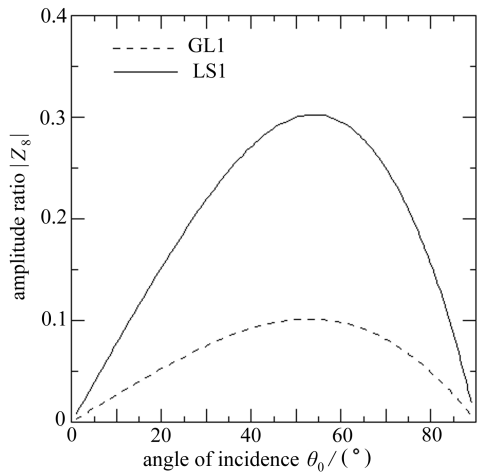
图 2(h) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_8|$ 的变化

Fig. 2(h) Amplitude ratios $|Z_8|$ at different angles of incidence θ_0

图 2 入射 LD 波, 在不同入射角 θ_0 时的波幅比 $|Z_i|$ 的变化

Fig. 2 Amplitude ratios $|Z_i|$ at different angles of incidence θ_0 , when incident LD wave

$$\begin{aligned} \lambda^f &= 0.15 \times 10^8 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2, \mu^f = 0.03 \times 10^8 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2, \\ \kappa^f &= 0.000\,223 \times 10^8 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2, \gamma^f = 0.000\,022\,2 \times 10^8 \text{ N}\cdot\text{s}, \\ \rho^f &= 0.8 \times 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3, I = 0.004\,00 \times 10^{-16} \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^2. \end{aligned}$$

介质 M_2 的热学参数取为

$$\begin{aligned} T_0^f &= 0.196 \text{ K}, K_1^* = 0.89 \times 10^2 \text{ N}/(\text{s}\cdot\text{K}), \\ c_0 &= 0.005 \times 10^{11} \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^6, a = 1.5 \times 10^5 \text{ m}^2/(\text{s}^2\text{K}^2). \end{aligned}$$

在不同入射角下, 计算波幅比的值。

图 2 ~ 图 4 中, 实线 (LS1) 表示对入射波应用 L-S 理论, 短虚线 (GL1) 表示对入射波应用 G-L 理论, 中虚线 (LS2) 表示对入射波应用不考虑微极效应时的 L-S 理论, 长虚线 (GL2) 表示

对入射波应用不考虑微极效应时 G-L 理论的.

5.1 入射 LD 波

图 2(a) ~ 图 2(h) 示出了入射角为 θ_0 , 入射 LD 波时, 波幅比 $|Z_i|$ ($1 \leq i \leq 8$) 的变化.

图 2(a) 描绘了波幅比 $|Z_1|$ 的变化情况: LS1 与 GL1 相比较, LS2 与 GL2 相比较, 它们在整个区域内变化是类似的. 在 $\theta_0 < 50^\circ$ 的其他区域内, LS1 的波幅比都大于 GL1 的波幅比; 而当 $\theta_0 \geq 50^\circ$ 时, 情况恰好相反. 除了贴近 90° 附近的入射区域, GL2 的波幅比均大于 LS2 的波幅比, 而在 90° 附近, 情况正相反.

图 2(b) 描绘了波幅比 $|Z_2|$ 的变化情况: 在整个区域内, 随着 θ 角的增大, LS1、GL1、LS2、GL2 都在减小. 除贴近 90° 附近的入射区域, LS1 的波幅比都大于 GL1 的波幅比, 而在 90° 附近, 情况正好相反. 同时, 在整个区域内, GL2 的波幅比均大于 LS1、GL1 和 LS2 的波幅比.

图 2(c) 描绘了波幅比 $|Z_3|$ 的变化情况: 在整个区域内, LS1、GL1、LS2 和 GL2 的 $|Z_3|$ 值, 先逐渐增大, 然后逐渐减小. 在 $0^\circ < \theta_0 < 64^\circ$ 区域内, GL1 的波幅比大于 LS1 的波幅比, 在其他区域内, 情况正好相反. 在整个区域, GL2 值都大于 LS2 值, 显示出热松弛效应的作用, 在 $\theta_0 = 50^\circ$ 附近, GL1 值达到最大值.

图 2(d) 显示, LS1、GL1、LS2 和 GL2 的 $|Z_4|$ 值, 在量值上都非常小. 在整个区域, GL2 的波幅比都大于 LS2 的波幅比. 在区域 $0^\circ < \theta_0 < 72^\circ$ 中, GL1 值均大于 LS1 值, 在其他区域, 情况正好相反. 图中 LS1 和 GL1 的波幅比值, 被放大了 10^5 倍, LS2 和 GL2 的值, 被放大了 10^4 倍.

图 2(e) 表明, 当 $\theta_0 = 0^\circ$ 时, LS1 和 GL1 的 $|Z_5|$ 值达到最大值, 随着 θ 的增加, 波幅比值在减少. 整个区域上, LS1 值都比 GL1 值大, LS2 值都比 GL2 值大. 图中 LS2 和 GL2 的波幅比值被放大了 10 倍.

图 2(f) 显示, LS1 和 GL1 的 $|Z_6|$ 值, 小于 LS2 和 GL2 的值. 在整个区域, LS1 值大于 GL1 值. 同时, 在整个区域, LS2 值, 比 LS1、GL1 和 GL2 值都大. 图中 LS2 和 GL2 的波幅比值被放大了 10 倍.

图 2(g) 表明, 在整个区域, LS1 的波幅比 $|Z_7|$ 值, 在 $\theta_0 = 55^\circ$ 附近达到最大值, LS1 值都比 GL1 值大. LS2 和 GL2 的波幅比值, 在入射区域 ($\theta_0 = 90^\circ$) 附近达到最大值. 图中 LS1 和 GL1 的波幅比值, 被放大了 10^7 倍, LS2 和 GL2 的波幅比值, 被放大了 10 倍.

图 2(h) 显示, 在 $0^\circ < \theta < 56^\circ$ 区间, LS1 和 GL1 的 $|Z_8|$ 值, 随着入射角的增加而增加, 然后逐渐减小. 在整个区域中, LS1 的波幅比值, 比 GL1 的波幅比值大得多. 图中 LS1 和 GL1 的波幅比值, 被放大了 10^5 倍.

5.2 入射 T 波

图 3(a) ~ 图 3(h) 示出了入射角为 θ_0 , 入射 T 波时, 波幅比 $|Z_i|$ ($1 \leq i \leq 8$) 的变化.

图 3(a) 表明, 在整个区域, LS1 和 GL1 的 $|Z_1|$ 值, 都在减小, LS1 值都比 GL1 值大. 但是, LS2 和 GL2 的数值, 在整个区域里振荡. GL2 在 $35^\circ < \theta_0 < 55^\circ$ 区域达到最大. 还可以看到, 除了 $0^\circ < \theta_0 < 20^\circ$ 外, 在整个区域内 GL2 值都大于 LS2 值, $0^\circ < \theta_0 < 20^\circ$ 时, 情况正相反. 图中 LS1 和 GL1 的波幅比值, 被缩小了 10 倍.

图 3(b) 表明, LS1 和 GL1 的 $|Z_2|$ 值, 小于 LS2 和 GL2 值. 在整个区域, GL2 和 LS2 的波幅比值, 在 90° 附近达到最大值; LS2 值则均大于 GL2 值. 同时, 除了 $0^\circ < \theta_0 < 52^\circ$ 以外, 整个区域中 LS1 值比 GL1 值更大, 反之, 则相反.

请注意图 3(c), 在整个区域, LS1 的 $|Z_3|$ 值, 都比 GL1 值大. 在 $0^\circ < \theta_0 < 45^\circ$ 范围内, GL2 的波幅比值, 比 LS2 的波幅比值大得多, 而在其他区域, 情况正好相反. LS2 在大入射角附

近达到最大值. 图中 LS1 和 GL1 的波幅比值, 被缩小了 10 倍.

图 3(d) 表明, $|Z_4|$ 的变化与 $|Z_3|$ 相类似, 仅仅振荡的幅值不同. 在这种情况下, LS1 和 GL1 的值, 比 LS2 和 GL2 值大得多. 图中 LS1 和 GL1 的波幅比值乘了 10^5 , LS2 和 GL2 的波幅比值乘了 10^4 .

图 3(e) 显示, 在整个区域中, LS1 和 GL1 的 $|Z_5|$ 值, 在逐渐减小, 且 LS1 的值在整个区域里, 都比 GL1 值大. 同时, 在整个区域, 除开 $0^\circ < \theta_0 < 24^\circ$ 范围, GL2 值都比 LS2 值大, 而在 $0^\circ < \theta_0 < 24^\circ$ 范围内, LS2 值比 GL2 值大. 此时, LS1 的最大值出现在坐标原点.

图 3(f) 描绘了 $|Z_6|$ 的变化, 与 $|Z_5|$ 类似, 但震荡幅度不同.

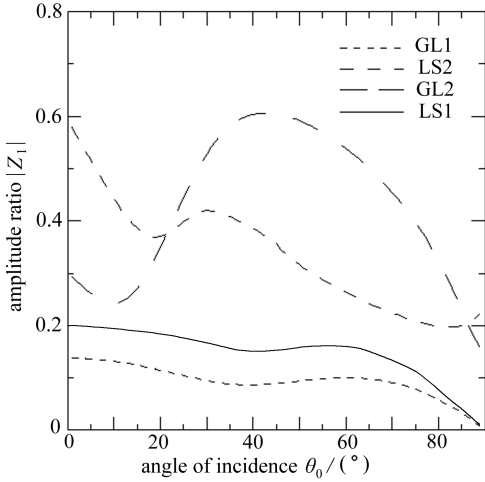


图 3(a) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_1|$ 的变化

Fig. 3(a) Amplitude ratios $|Z_1|$ at different angles of incidence θ_0

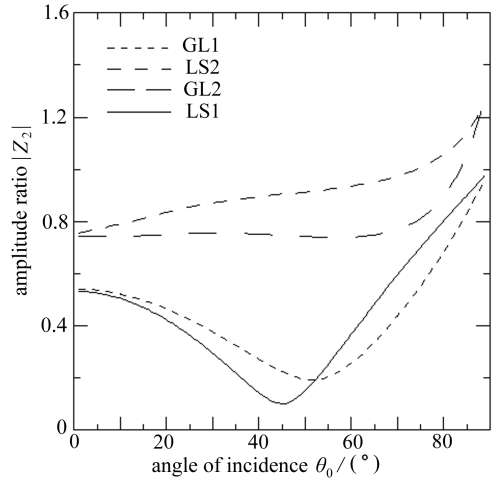


图 3(b) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_2|$ 的变化

Fig. 3(b) Amplitude ratios $|Z_2|$ at different angles of incidence θ_0

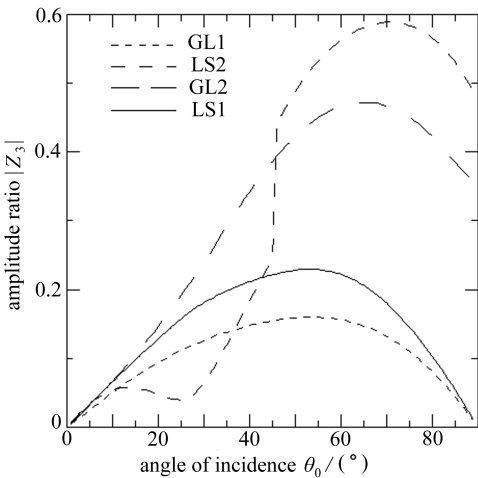


图 3(c) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_3|$ 的变化

Fig. 3(c) Amplitude ratios $|Z_3|$ at different angles of incidence θ_0

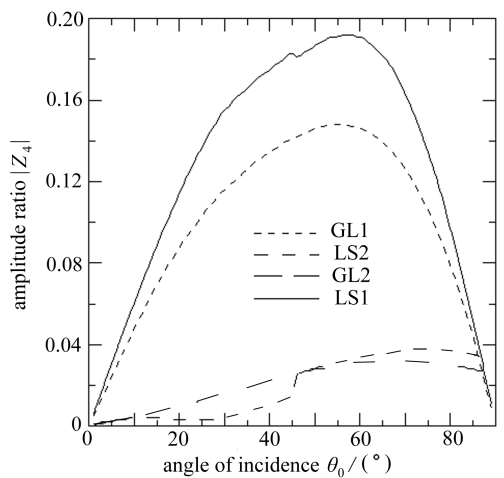


图 3(d) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_4|$ 的变化

Fig. 3(d) Amplitude ratios $|Z_4|$ at different angles of incidence θ_0

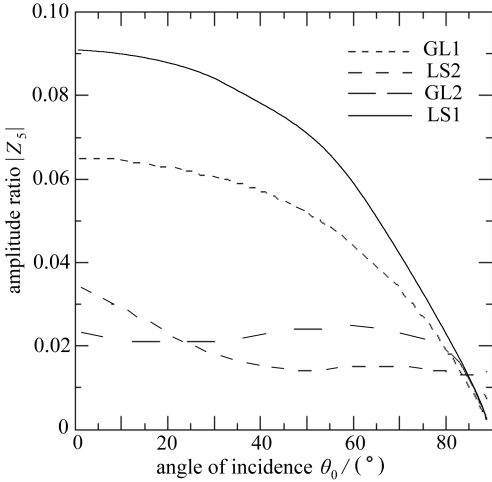


图 3(e) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_5|$ 的变化

Fig. 3(e) Amplitude ratios $|Z_5|$ at different angles of incidence θ_0

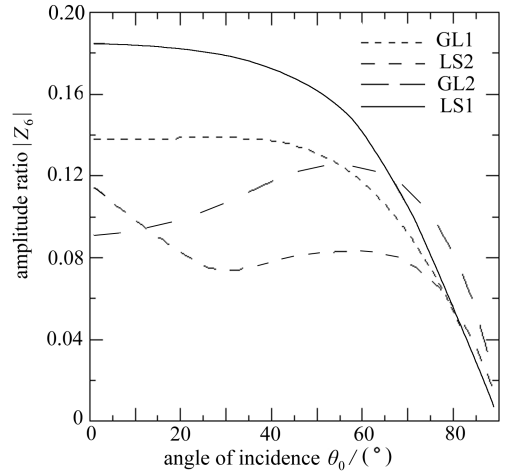


图 3(f) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_6|$ 的变化

Fig. 3(f) Amplitude ratios $|Z_6|$ at different angles of incidence θ_0

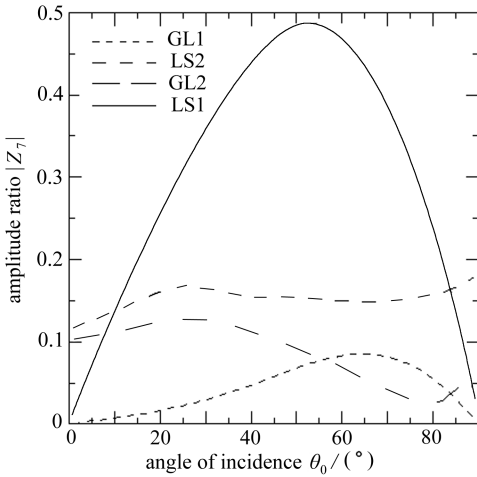


图 3(g) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_7|$ 的变化

Fig. 3(g) Amplitude ratios $|Z_7|$ at different angles of incidence θ_0

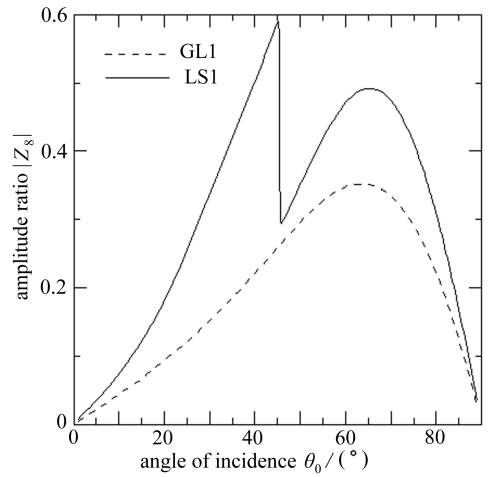


图 3(h) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_8|$ 的变化

Fig. 3(h) Amplitude ratios $|Z_8|$ at different angles of incidence θ_0

图 3 入射 T 波, 在不同入射角 θ_0 时的波幅比 $|Z_i|$ 的变化

Fig. 3 Amplitude ratios $|Z_i|$ at different angles of incidence θ_0 , when incident T wave

图 3(g) 描绘了波幅比 $|Z_7|$ 的变化情况: 在整个区域中, LS1 和 GL1 先逐渐增大, 然后逐渐减小, 且 LS1 值, 在整个区域中始终大于 GL1 值。同时, LS2 值, 在整个区域都大于 GL2 值。图中 LS1 和 GL1 的波幅比值乘了 10^6 , LS2 和 GL2 的波幅比值乘了 10。

请注意图 3(h), 在整个区域, LS1 的波幅比 $|Z_8|$, 都比 GL1 更振荡, LS1 值比 GL1 值更大。图中 LS1 和 GL1 的波幅比值已乘了 10^6 。

5.3 入射 CD-I 波

入射 CD-I 波时, 波幅比 $|Z_i|$ ($1 \leq i \leq 8$) 随入射角 θ_0 的变化示于图 4(a) ~ 图 4(h)。

图 4(a) 示出波幅比 $|Z_1|$ 的变化情况: LS1 在区间 $0^\circ < \theta_0 < 35^\circ$ 中, 随着 θ_0 的增大而增

大, GL1 在 $0^\circ < \theta_0 < 40^\circ$ 中, 随着 θ_0 的增大而增大, 然后, 它们逐渐减小. 除了 $0^\circ < \theta_0 < 35^\circ$ 区间外, GL1 的波幅比值始终大于 LS1 的波幅比值, 而在 $0^\circ < \theta_0 < 35^\circ$ 区间内, 情况正相反. LS2 和 GL2 的值, 比 LS1 和 GL1 的值振荡得多. GL2 在 $\theta_0 = 35^\circ$ 时达到峰值. LS1, GL1, LS2 和 GL2 的波幅比值, 被缩小了 10 倍.

图 4(b) 示出了波幅比 $|Z_2|$ 的变化情况: LS1 与 GL1 的变化类似, LS2 与 GL2 的变化类似. 在整个区域, LS1 的波幅比值, 比 GL1 的波幅比值大, LS2 的波幅比值, 比 GL2 的波幅比值大.

图 4(c) 示出了波幅比 $|Z_3|$ 的变化情况: LS1 在 $0^\circ < \theta_0 < 30^\circ$ 区间内逐渐减小, 然后逐渐增大. GL1 在 $0^\circ < \theta_0 < 33^\circ$ 区间内逐渐减小, 然后逐渐增大. LS2 和 GL2 的值, 比 LS1 和 GL1 值要小得多. 同时, LS2 和 GL2 值, 随着 θ_0 的增大而振荡. 图中 LS1 和 GL1 的波幅比值被缩小了 10 倍.

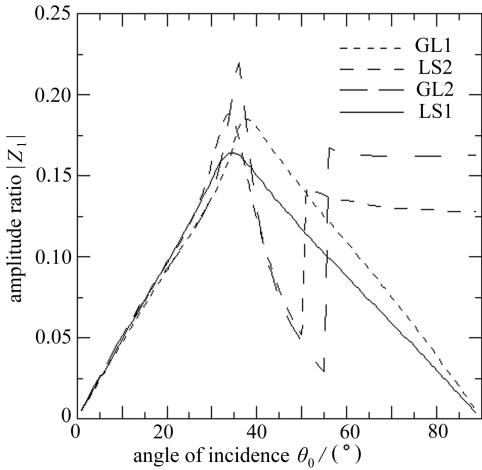


图 4(a) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_1|$ 的变化

Fig. 4(a) Amplitude ratios $|Z_1|$ at different angles of incidence θ_0

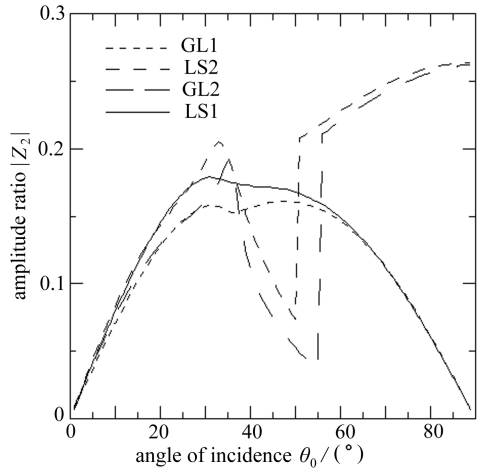


图 4(b) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_2|$ 的变化

Fig. 4(b) Amplitude ratios $|Z_2|$ at different angles of incidence θ_0

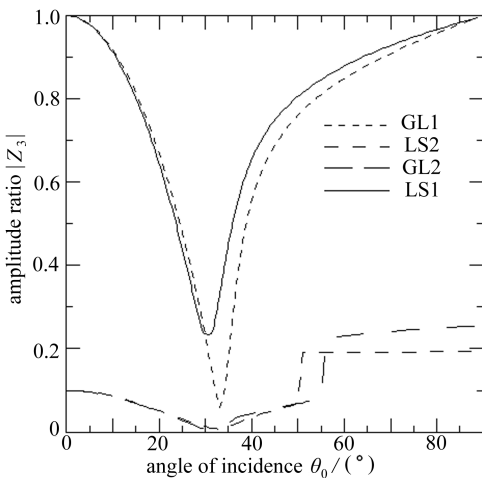


图 4(c) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_3|$ 的变化

Fig. 4(c) Amplitude ratios $|Z_3|$ at different angles of incidence θ_0

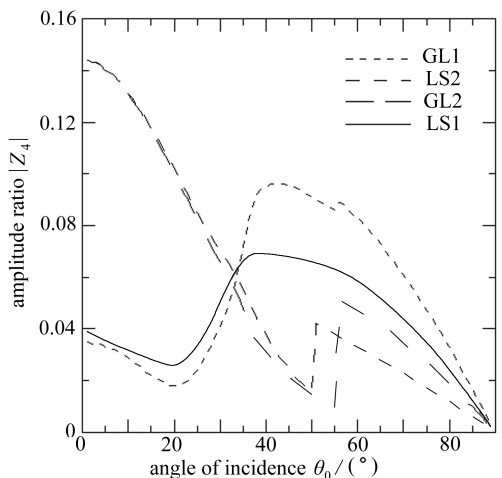


图 4(d) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_4|$ 的变化

Fig. 4(d) Amplitude ratios $|Z_4|$ at different angles of incidence θ_0

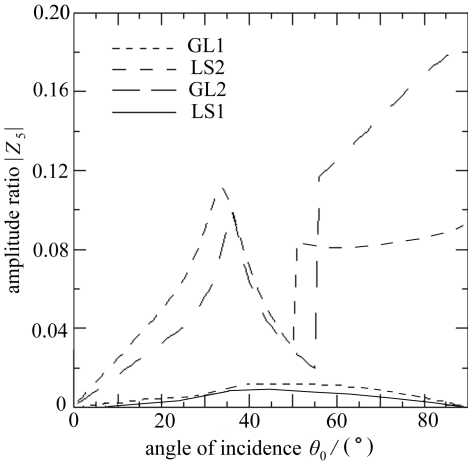


图 4(e) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_5|$ 的变化

Fig. 4(e) Amplitude ratios $|Z_5|$ at different angles of incidence θ_0

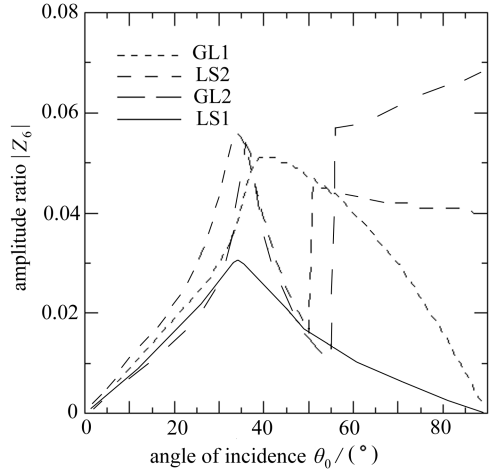


图 4(f) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_6|$ 的变化

Fig. 4(f) Amplitude ratios $|Z_6|$ at different angles of incidence θ_0

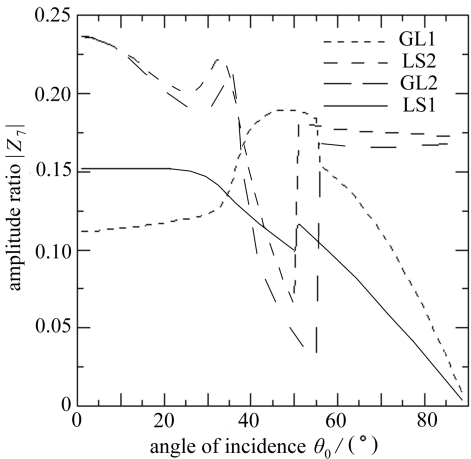


图 4(g) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_7|$ 的变化

Fig. 4(g) Amplitude ratios $|Z_7|$ at different angles of incidence θ_0

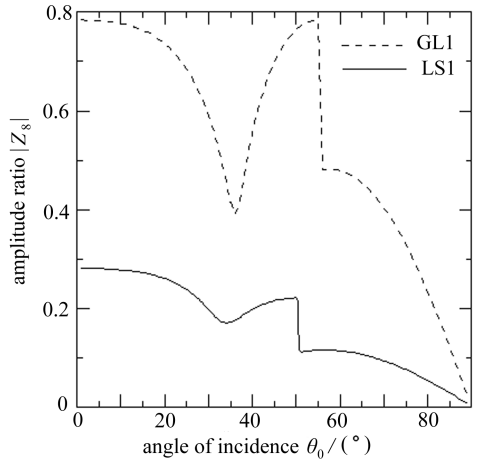


图 4(h) 不同入射角 θ_0 时波幅比 $|Z_8|$ 的变化

Fig. 4(h) Amplitude ratios $|Z_8|$ at different angles of incidence θ_0

图 4 入射 CD-I 波, 在不同入射角 θ_0 时的波幅比 $|Z_i|$ 的变化

Fig. 4 Amplitude ratios $|Z_i|$ at different angles of incidence θ_0 , when incident CD-I wave

图 4(d) 示出了波幅比 $|Z_4|$ 的变化情况: 在整个区域中, LS1, GL1, LS2 和 GL2 值都出现振荡. 在整个区域中, 除了 $0^\circ < \theta_0 < 33^\circ$ 外, GL1 值都大于 LS1 值, 而在 $0^\circ < \theta_0 < 33^\circ$ 中, 则相反. 除了 $\theta_0 > 55^\circ$ 外, LS2 值都大于 GL2 值, 而在 $\theta_0 > 55^\circ$ 中, 则相反. 图中 LS1 和 GL1 的波幅比值已乘以 10^5 , LS2 和 GL2 的波幅值比值已乘以 10^4 .

图 4(e) 示出了波幅比 $|Z_5|$ 的变化情况: 在整个区域中, LS1 和 GL1 的值, 随着 θ_0 的增大, 先是增大, 然后是减小; GL1 值比 LS1 值更大. 在区域 $0^\circ < \theta_0 < 56^\circ$ 中, LS2 值比 GL2 值更大, 在其他区域, 则刚好相反. 在整个区域中, LS2 值比 LS1 值大得多, GL2 值比 GL1 值大得多. 图中 LS2 和 GL2 的波幅比值已乘了 10.

图 4(f) 显示的波幅比 $|Z_6|$ 与 $|Z_5|$ 的变化相类似, 但震荡幅度不同.

图 4(g) 示出了波幅比 $|Z_7|$ 的变化情况:在整个域中,LS1 和 GL1 值在振荡.除了 $0^\circ < \theta_0 < 35^\circ$ 范围外,GL1 值始终大于 LS1 值,而在 $0^\circ < \theta_0 < 35^\circ$ 范围,情况正好相反.LS2 和 GL2 的波幅比,随着 θ_0 的增大,而出现振荡;除了中间部分区域外,LS2 的波幅比,在整个区域内均大于 GL2 的波幅比值.图中 LS1 和 GL1 的波幅比值已乘了 10^6 ,且 LS2 和 GL2 的波幅比值也乘了 10.

图 4(h) 示出了波幅比 $|Z_8|$ 的变化情况:LS1 和 GL1 随着 θ_0 的增大,都出现振荡;在整个区域中,GL1 值比 LS1 值更大.图中 LS1 和 GL1 的波幅比已在原值上乘了 10^6 .

6 讨 论

本文以平面表面为模型,入射波为 LD 波、T 波、CD-I 波时,进行详细地数值计算.评估微极和热松弛对不同平面入射波(LD 波、T 波、CD-I 波)波幅比的影响.得出结论:入射波为 LD 波和 T 波时,LS1 和 GL1 的 $|Z_4|$ 、 $|Z_5|$ 值,大于 LS2 和 GL2 的 $|Z_4|$ 、 $|Z_5|$ 值.还可以看到,入射波为 LD 波、T 波和 CD-I 波时,LS2 和 GL2 的波幅比 $|Z_i|$ ($1 \leq i \leq 8$) 值,比 LS1 和 GL1 值振荡得更利害,这一现象与微极效应相符合.

参考文献:

- [1] Eringen A C. Simple microfluids[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1964, **2** (2): 205-217.
- [2] Eringen A C. Theory of microfluids[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1966, **16**(1): 1-18.
- [3] Ariman T, Sylvester N D, Turk M A. Microcontinuum fluid mechanics — a review[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1973, **11**(8): 905-930.
- [4] Ariman T, Turk M A, Sylvester N D. Applications of microcontinuum fluid mechanics[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1974, **12**(4): 273-293.
- [5] Riha P. On the theory of heat-conducting micropolar fluid with microtemperature[J]. *Acta Mechanica*, 1975, **23**(1/2): 1-8.
- [6] Eringen A C, Kafadar C B. Polar field theories[C]//Eringen A C. *Continuum Physics*. Vol 4. New York:Academic Press, 1976.
- [7] Brulin O. Linear micropolar media[C]//Brulin O, Hsieh R K T. *Mechanics of Micropolar Media*. Singapore:World Scientific, 1982.
- [8] Aggarwal R S, Dhanapal C. Flow and heat transfer in a micropolar fluid past a flate plate with suction and heat sources[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1988, **26**(12): 1257-1266.
- [9] Payne L E, Straughan B. Critical Rayleigh numbers for oscillatory and non linear convection in an isotropic thermomicropolar fluid[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1989, **27**(7): 827-836.
- [10] Gorla R S R. Combined forced and free convection in the boundary layer flow of a micropolar fluid on a continuous moving vertical cylinder[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1989, **27**(1): 77-86.
- [11] Eringen A C. Theory of micro-stretch and bubbly liquids[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1990, **28**(2): 133-143.
- [12] Aydemir N U, Venart J E S. Flow of a thermomicropolar fluid with stretch[J]. *International*

- Journal of Engineering Science*, 1990, **28**(12): 1211-1222.
- [13] Yerofeyev V I, Soldatov I N. A shear surface wave at the interface of an elastic body and a micropolar liquid[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1999, **63**(2): 277-281.
- [14] Yeremeyev V A, Zubov L M. The theory of elastic and viscoelastic micropolar liquids[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1999, **63**(5): 755-767.
- [15] Hsia S Y, Cheng J W. Longitudinal plane waves propagation in elastic micropolar porous media[J]. *Japanese Journal of Applied Physics*, 2006, **45**: 1743-1748.
- [16] Hsia S Y, Chiu S M, Su C C, Chen T H. Propagation of transverse waves in elastic micropolar porous semispaces[J]. *Japanese Journal of Applied Physics*, 2007, **46**: 7399-7405.
- [17] Eringen A C. Linear theory of micropolar elasticity[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1966, **15**: 909-923.
- [18] Biot M. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics[J]. *Journal of Applied Physics*, 1956, **27**(3): 240-253.
- [19] Lord H, Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1967, **15**(5): 299-309.
- [20] Muller I M. The coldness, a universal function in thermoelastic bodies[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1971, **41**(5): 319-332.
- [21] Green A E, Laws N. On the entropy production inequality[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1972, **45**(1): 47-53.
- [22] Green A E, Lindsay K A. Thermoelasticity[J]. *Journal of Elasticity*, 1972, **2**(1): 1-7.
- [23] Suhubi E S. Thermoelastic solids[C]// Eringen A C. *Continuum Physics. 2. Part 2, Chapter 2*. New York: Academic Press, 1975.
- [24] Tomar S K, Gogna M L. Reflection and refraction of a longitudinal microrotational wave at an interface between two micropolar elastic solids in welded contact[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1992, **30**(11): 1637-1646.
- [25] Tomar S K, Gogna M L. Reflection and refraction of a longitudinal displacement wave at an interface between two micropolar elastic solids in welded contact[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1995, **97**: 827-830.
- [26] Tomar S K, Gogna M L. Reflection and refraction of a coupled transverse and micro-rotational waves at an interface between two different micropolar elastic media in welded contact [J]. *International Journal of Engineering Science*, 1995, **33**(4): 485-496.
- [27] Kumar R, Sharma N, Ram P. Reflection and transmission of micropolar elastic waves at an imperfect boundary[J]. *Multidiscipline Modelling in Materials and Structures*, 2008, **4**(1): 15-36.
- [28] Kumar R, Sharma N, Ram P. Interfacial imperfection on reflection and transmission of plane waves in anisotropic micropolar media [J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2008, **49**(3): 305-312.
- [29] Singh D, Tomar S K. Longitudinal waves at a micropolar fluid/solid interface[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, **45**(1): 225-244.
- [30] Ciarletta M. Spatial decay estimates for heat conducting micropolar fluids[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, **39**(6): 655-668.
- [31] Parfit V R, Eringen A C. Reflection of plane waves from the flat boundary of a micropolar elastic half space[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1969, **45**(5): 1258-1272.

- [32] Dhaliwal R S, Singh A. *Dynamic Coupled Thermoelasticity* [M]. New Delhi, India: Hindustan Publication Corporation, 1980.
- [33] Singh B, Kumar R. Reflection of plane waves from the flat boundary of a micropolar generalized thermoelastic half-space [J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1998, **36** (7/8): 865-890.
- [34] Schoenberg M. Transmission and reflection of plane waves at an elastic-viscoelastic interface [J]. *Geophysics Journal of Royal Astronomical Society*, 1971, **25** (1/3): 35-47.

Wave Propagation at an Interface of Heat Conducting Micropolar Solid and Fluid Media

Rajneesh Kumar¹, Mandeep Kaur², S. C. Rajvanshi³

(1. *Department of Mathematics, Kurukshetra University, Kurukshetra 136119, India;*

2. *Department of Applied Sciences, Guru Nanak Dev Engineering College, Ludhiana, Punjab 141008, India;*

3. *Department of Applied Sciences, Gurukul Vidyapeeth, Institute of Engineering and Technology, Banur, Sector 7, District Patiala, Punjab 140601, India)*

Abstract: Wave propagation at an interface of micropolar generalized thermoelastic solid half space and heat conducting micropolar fluid half space was investigated. Reflection and transmission phenomenon of plane waves impinging obliquely at a plane interface between a micropolar generalized thermoelastic solid half space and heat conducting micropolar fluid half space were investigated. The incident wave was assumed to be striking at the plane interface after propagating through the micropolar generalized thermoelastic solid. Amplitude ratios of the various reflected and transmitted waves were obtained in closed form and it was found that these were functions of angle of incidence, frequency and were affected by the elastic properties of the media. Micropolarity and thermal relaxation effects are shown on these amplitude ratios for a specific model. Results of some earlier workers have also been deduced from the present investigation.

Key words: micropolar solid; micropolar fluid; thermoelastic; reflection coefficient; transmission coefficient half space