

纤维增强聚合物加固木柱的 非线性稳定性分析*

欧阳煜, 杨 骁, 包若涵

(上海大学 土木工程系, 上海 200072)

(陈伟球推荐)

摘要: 考虑加固层中纤维增强聚合物布(FRP布)拉伸与压缩时的不同弹性模量,基于梁大挠度变形假定,首先建立了FRP加固细长木梁非线性弯曲的一般数学模型,给出了考虑梁弯曲二阶效应的非线性控制方程.其次,研究了FRP布加固细长筒支木柱的非线性稳定性问题,得到了FRP加固筒支木柱的临界载荷公式.理论证明了其过屈曲解的存在性,并利用摄动法,得到了临界载荷附近过屈曲状态的渐近解析解.进行了参数分析,结果表明:FRP加固层对临界载荷有显著的影响,而对其无量纲过屈曲状态影响较小.

关键词: 纤维增强聚合物; 木柱; 加固; 非线性数学模型; 过屈曲分析; 拉压不同弹性模量

中图分类号: O343.9;O341 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.07.008

引 言

由于木结构具有造价低廉、施工方便、节能环保和抗震性能优越等特性,木结构不仅是我国传统建筑的主要结构形式之一,而且日本、欧洲和北美等国家中也存在大量木结构建筑.同时,近年来,国内轻型木结构建筑和中小型木结构桥梁建设亦日趋增多,发展前景良好^[1].由于木材弹性模量和强度低、蠕变大以及易腐蚀老化等,木结构中的部分构件必须进行增强处理,同时,我国现存有大量木结构古建筑物亦需加固修复.

木构件增强和修复的研究已有较长历史,早期的增强修复主要采用金属材料,如钢筋、钢绞线、钢板和铝板等^[2-3].由于纤维增强复合材料(FRP)具有优异的物理力学性能、良好的粘合性和抗腐蚀性等特点,近几十年来已广泛地应用于各类工程结构的加固修复中,最初主要用于钢筋混凝土结构和钢结构的增强和加固,并取得了丰富的研究成果和广泛的应用范围^[4-6].上世纪90年代起,人们开始研究FRP加固木结构,进行了一系列的理论分析和实验研究^[7-12],

* 收稿日期: 2011-01-07; 修订日期: 2011-04-18

基金项目: 国家高技术研究发展计划资助项目(2009AA032303-2)

作者简介: 欧阳煜(1968—),男,福建泉州人,副教授,博士(Tel:+86-21-56332265; E-mail: Oyy_wly@sina.com);

杨骁(1965—),男,山西运城人,教授,博士生导师(联系人.Tel:+86-21-56331519; E-mail: xyang@shu.edu.cn).

结果表明 FRP 能够显著改善木结构的力学性能。然而,这些研究主要集中在木梁抗弯性能的改善方面。近年来,人们开始关注 FRP 对木柱的加固效应,研究了 FRP 布加固对木柱横向变形约束以及由此提高木柱延性的效果^[13-17],而邵劲松等^[18]基于 Tsai-Wu 强度准则,建立了 FRP 加固木柱轴心受压的增量型应力-应变模型,并通过实验证明了相关模型的可靠性。基于组合梁理论,Taheri 等^[19]对 FRP 布加固细长层合木柱的线性稳定性问题进行了理论分析、有限元计算和实验研究,得到了不同边界条件和加固方式下 FRP 布加固胶合木柱的临界载荷。然而,作者尚未见到有关 FRP 加固木柱的非线性稳定性研究报道。

本文基于弹性梁大挠度弯曲理论,考虑 FRP 布加固层拉伸与压缩时的不同弹性模量,首先确定了 FRP 加固细长木梁弯曲时的中性轴位置,建立了 FRP 加固木梁大挠度弯曲的一般数学模型。在此基础上,通过简化给出了考虑梁弯曲二阶效应的非线性控制方程,基于此简化的控制方程,研究了 FRP 布加固细长简支木柱的非线性稳定性问题。通过在受压木柱平凡解处非线性控制方程的线性化,得到了简支 FRP 加固木柱的临界载荷,分析了 FRP 加固层材性对临界载荷的影响。利用分支理论,证明了临界载荷处 FRP 加固简支木柱必发生屈曲,并利用小参数摄动,给出了临界载荷附近过屈曲状态的渐近解析解,讨论了 FRP 加固简支木柱的过屈曲性态。研究表明:FRP 材性对木柱临界载荷有显著的影响,而对其无量纲过屈曲状态影响较小。

1 FRP 加固梁的大挠度非线性数学模型

设长为 L 的细长 FRP 加固梁承受横向载荷 $q(x)$ 的作用,其中木梁的弹性模量为 E_w 、横截面面积为 A_w ,而形心 C 距梁上、下表面的距离分别为 r_1 和 r_2 ,绕形心 C 主轴 z' 的惯性矩为 I 。木梁上、下表面分别粘贴厚度为 h_t 和 h_b 的 FRP 加固层,其弹性模量分别为 E_t 和 E_b ,而横截面面积分别为 A_t 和 A_b (图 1)。假定 $h_t, h_b \ll r_1, r_2$,且在载荷 $q(x)$ 作用下,FRP 加固梁的变形满足:

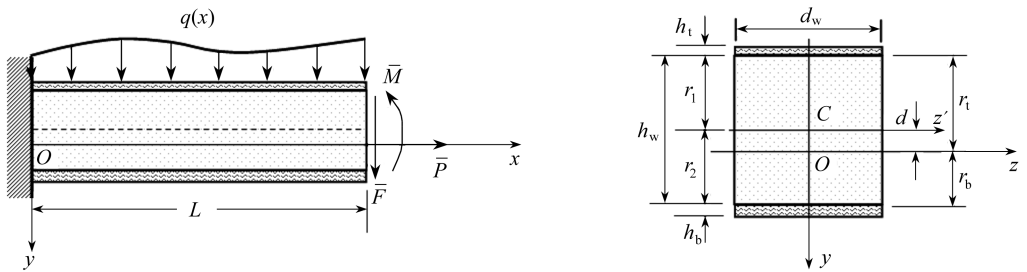


图 1 FRP 加固梁的几何尺寸

Fig. 1 Geometric parameters of the FRP reinforced beam

- a) 梁及 FRP 加固层为弹性体,变形为大转角、小应变,且梁变形过程中满足平截面假定;
- b) FRP 加固层仅发生均匀轴向拉伸和压缩变形,并且 FRP 加固层与梁紧密连接,两者间无脱落和滑移。

为保证 FRP 加固梁在轴力 \bar{P} 作用下仅发生轴向变形,设轴力 \bar{P} 作用线在形心 C 下 d 处,即与形心 C 的距离为 d ,其中

$$d = \frac{E_b A_b r_2 - E_t A_t r_1}{E_b A_b + E_w A_w + E_t A_t} \quad (1)$$

以轴力 \bar{P} 作用线为 Ox 轴,FRP 加固梁变形平面为 Oxy 平面,建立坐标系 $Oxyz$ 。记变形后梁

Ox 轴上点 $A(x, 0)$ 的水平位移和挠度分别为 $u(x)$ 和 $w(x)$, 横截面绕 Oz 轴的转角为 $\theta(x)$, 而 Ox 轴上微元段 dx 变形后的长度为 ds . 则根据 FRP 加固梁的上述变形假定, 梁横截面任一点 $B(x, y)$ 的轴向应变为^[20]

$$\varepsilon_w = \varepsilon - y \frac{d\theta}{dx}. \quad (2)$$

而梁上、下表面 FRP 加固层的轴向应变分别为

$$\varepsilon_t = \varepsilon + r_t \frac{d\theta}{dx}, \quad \varepsilon_b = \varepsilon - r_b \frac{d\theta}{dx}, \quad (3)$$

其中, ε 为梁 Ox 轴处的轴向应变, 即 $\varepsilon = ds/dx - 1$, 且 $r_t = r_1 + d$, $r_b = r_2 - d$.

根据梁的大挠度变形理论, 梁变形的几何关系为

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{ds} \frac{ds}{dx} = (1 + \varepsilon) \cos \theta - 1, \quad \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{ds} \frac{ds}{dx} = (1 + \varepsilon) \sin \theta. \quad (4)$$

于是, FRP 加固梁横截面上的轴力为

$$F_N = \iint_{A_t} E_t \varepsilon_t dA_t + \iint_{A_w} E_w \varepsilon_w dA_w + \iint_{A_b} E_b \varepsilon_b dA_w = (E_t A_t + E_w A_w + E_b A_b) \varepsilon = (EA)_e \varepsilon. \quad (5)$$

而弯矩为

$$M = E_b A_b \left(\varepsilon - r_b \frac{d\theta}{dx} \right) r_b + \iint_{A_w} E_w \varepsilon_w y dA_w - E_t A_t \left(\varepsilon + r_t \frac{d\theta}{dx} \right) r_t = - (E_b A_b r_b^2 + E_w I_w + E_t A_t r_t^2) \frac{d\theta}{dx} - (EI)_e \frac{d\theta}{dx}, \quad (6)$$

其中, I_w 为木梁横截面绕 Oz 轴的惯性矩, $I_w = I + A_w d^2$, $(EA)_e$ 和 $(EI)_e$ 分别为 FRP 加固梁的等效拉伸刚度和等效弯曲刚度, 且

$$(EA)_e = E_t A_t + E_w A_w + E_b A_b, \quad (EI)_e = E_b A_b r_b^2 + E_w I_w + E_t A_t r_t^2. \quad (7)$$

设加固梁横截面上的剪力为 F_s , 由加固梁单元体 dx 的平衡(图 2), 可得

$$\begin{cases} \frac{dM}{dx} - (1 + \varepsilon) F_s = 0, \\ \frac{dF_N}{dx} - F_s \frac{d\theta}{dx} + q \sin \theta = 0, \\ \frac{dF_s}{dx} + F_N \frac{d\theta}{dx} + q \cos \theta = 0. \end{cases} \quad (8)$$

由式(8)中第 1 式可得

$$F_s = \frac{1}{1 + \varepsilon} \frac{dM}{dx}. \quad (9)$$

利用本构方程(6)和表达式(9), 控制方程(8)进一步化为

$$\begin{cases} (EI)_e \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon} \frac{d^2 \theta}{dx^2} \right) - F_N \frac{d\theta}{dx} - q \cos \theta = 0, \\ \frac{dF_N}{dx} + \frac{(EI)_e}{1 + \varepsilon} \frac{d^2 \theta}{dx^2} \frac{d\theta}{dx} + q \sin \theta = 0. \end{cases} \quad (10)$$

至此, 得到 FRP 加固梁大挠度弯曲的基本控制方程, 它们是轴力本构方程(5)、几何方程

(4) 和平衡方程 (10), 而基本未知量为位移 $u(x)$ 和 $w(x)$ 、截面转角 $\theta(x)$ 、轴线应变 $\varepsilon(x)$ 和轴力 F_N 。可见, 方程是封闭的, 而弯矩 M 和剪力 F_S 分别由表达式 (6) 和 (9) 确定。

若忽略梁的轴向应变 ε , 即 $\varepsilon = 0$, 则控制方程可退化为轴线不可伸长梁的非线性弯曲控制方程^[20-21]。在工程应用中, 常简化基本控制方程以利于求解。为此, 一般仅考虑二阶效应, 即取如下近似:

$$\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2} \theta^2. \tag{11}$$

利用近似表达式 (11), 保留二阶小量, 则 FRP 加固梁非线性弯曲的控制方程可进一步化为

$$\begin{cases} (EI)_e \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{F_N}{(EA)_e} \right) \frac{d^3 w}{dx^3} \right] - F_N \frac{d^2 w}{dx^2} - q = 0, \\ \frac{dF_N}{dx} + (EI)_e \frac{d^3 w}{dx^3} \frac{d^2 w}{dx^2} + q \frac{dw}{dx} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

而

$$\begin{cases} \theta = \frac{dw}{dx}, \frac{du}{dx} = \frac{F_N}{(EA)_e} - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2, \\ M = - (EI)_e \frac{d^2 w}{dx^2}, F_S = - (EI)_e \left(1 - \frac{F_N}{(EA)_e} \right) \frac{d^3 w}{dx^3}. \end{cases} \tag{13}$$

2 简支 FRP 加固木柱的临界载荷

考虑图 3 所示端部承受压力 P 作用的简支 FRP 加固木柱, 此时, 载荷 $q = 0$, 则其非线性稳定性的控制方程为

$$\begin{cases} (EI)_e \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{F_N}{(EA)_e} \right) \frac{d^3 w}{dx^3} \right] - F_N \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \\ \frac{dF_N}{dx} + (EI)_e \frac{d^3 w}{dx^3} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

而边界条件为

$$\begin{cases} w = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, & x = 0, L, \\ F_N + (EI)_e \frac{d^3 w}{dx^3} \frac{dw}{dx} = -P, & x = L, \end{cases} \tag{15}$$

且

$$u = \int_0^x \left[\frac{F_N}{(EA)_e} - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] dx. \tag{16}$$

显然, 边值问题 (14) 和 (15) 有平凡零解

$$w(x) = 0, F_{N0}(x) = -P. \tag{17}$$

根据分支理论^[21], 边值问题 (14) 和 (15) 在平凡解 (17) 处发生分支, 即简支 FRP 加固木柱发生失稳

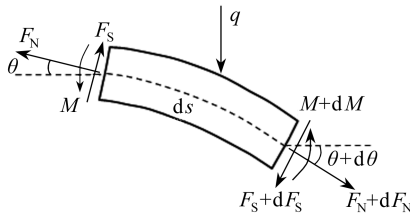


图 2 梁单元体 dx 的平衡

Fig. 2 Equilibrium of the beam's element dx

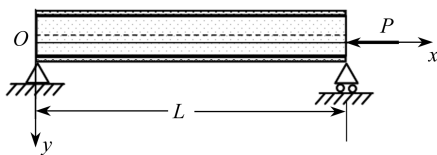


图 3 轴向压力 P 作用下的 FRP 加固梁简支梁

Fig. 3 Simply-supported FRP reinforced beam subjected to an axial compressive P

的必要条件为边值问题(14)和(15)在平凡解(17)处的线性化问题存在非零解,即求解下列特征值问题:

$$(EI)_e \left(1 + \frac{P}{(EA)_e} \right) \frac{d^4 \tilde{w}}{dx^4} + P \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} = 0, \quad \frac{d\tilde{F}_N}{dx} = 0; \quad (18)$$

$$\begin{cases} \tilde{w} = \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} = 0, & x = 0, L, \\ \tilde{F}_N = 0, & x = L. \end{cases} \quad (19)$$

利用细长压杆临界载荷分析的标准方法^[20],可得此边值问题的最小特征值为

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 (EI)_e}{L^2} \left(1 / \left(1 - \frac{\pi^2 (EI)_e}{(EA)_e L^2} \right) \right), \quad (20)$$

而相应的特征函数为

$$\tilde{w}(x) = w_0(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi}{L}\right)x, \quad \tilde{F}_N = 0. \quad (21)$$

式(20)即为简支 FRP 加固木柱的临界载荷.若忽略轴向力引起的压缩变形,即 $(EA)_e \rightarrow \infty$, 则临界载荷(20)化简为简支 FRP 加固柱的经典临界载荷^[19]

$$P'_{cr} = \frac{\pi^2 (EI)_e}{L^2}. \quad (22)$$

对于未加固的木柱,此时,有 $A_t = A_b = 0$ 和 $I_w = I$, 则式(20)退化为简支木柱的临界载荷

$$P_{wcr} = \frac{\pi^2 E_w I}{L^2} \left[1 / \left(1 - \frac{\pi^2 I}{A_w L^2} \right) \right] = \frac{\pi^2 E_w I}{L^2} \left(\frac{1}{1 - (\pi/\lambda_w)^2} \right), \quad (23)$$

其中, λ_w 为未加固木柱的长细比, $\lambda_w = L / \sqrt{I/A_w}$. 可见,考虑压缩效应的临界载荷(23)与经典临界载荷 $P'_{wcr} = \pi^2 E_w I / L^2$ 的误差为 $1 / ((\lambda_w / \pi)^2 - 1)$, 此值对于细长柱很小. 通常,对于工程中的加固木柱,由于 $(EI)_e / ((EA)_e L^2) \ll 1$, 临界载荷(20)与(22)很接近.

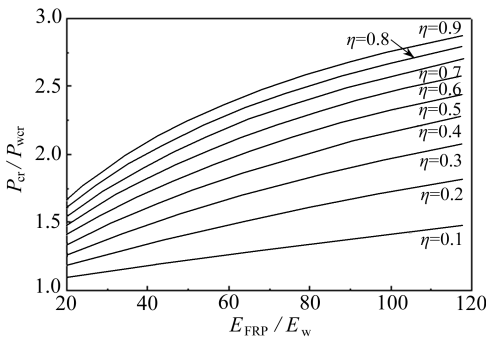


图4 当 $E_w = 7459.0$ MPa 时,简支 FRP 加固木柱临界载荷比 P_{cr}/P_{wcr} 随弹性模量比 E_{FRP}/E_w 的响应

Fig. 4 Critical load ratios P_{cr}/P_{wcr} of simply supported FRP-strengthened timber column vs the elastic modulus ratio E_{FRP}/E_w when $E_w = 7459.0$ MPa

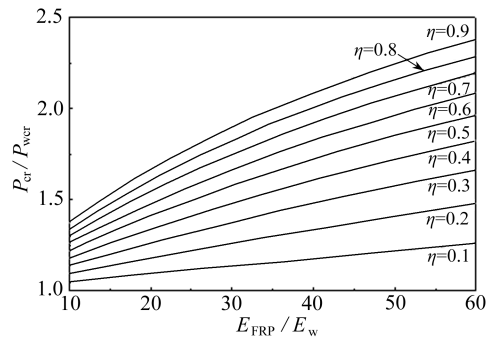


图5 当 $E_w = 13.90$ GPa 时,简支 FRP 加固木柱临界载荷比 P_{cr}/P_{wcr} 随弹性模量比 E_{FRP}/E_w 的响应

Fig. 5 Critical load ratios P_{cr}/P_{wcr} of simply supported FRP-strengthened timber column vs the elastic modulus ratio E_{FRP}/E_w when $E_w = 13.90$ GPa

对于屈曲模态(21),柱的上表面加固层 A_t 部分受压,下表面加固层 A_b 部分受拉.若两加固层构造相同,即 $h_t = h_b$,且FRP布的厚度为 h_{FRP} ,拉伸弹性模量为 E_{FRP} ,忽略其压缩弹性模量^[18,22],若粘结胶的弹性模量为 E_G ,则两加固层的等效弹性模量分别为

$$E_t = E_G(1 - \eta), E_b = E_G(1 - \eta) + E_{FRP}\eta, \tag{24}$$

其中 $\eta = h_{FRP}/h_t$ 为加固层中FRP布的含量.

表1 FRP加固矩形木柱几何和材料参数

Table 1 Geometry and material parameters of FRP reinforced wood column

| timber column | | | | cohesive glue | |
|---------------|----------|----------|-----------------|---------------|-------------------------|
| length | width | height | elastic modulus | height | elastic modulus of glue |
| L/mm | d_w/mm | h_w/mm | E_w/MPa | h_t/mm | E_G/MPa |
| 950.00 | 110.40 | 57.15 | 7 459.0 | 0.90 | 150.0 |

取文献[19]中FRP布加固矩形木柱的相关参数(见表1),图4给出了不同FRP布含量 η 时,简支FRP加固木柱临界载荷比 P_{cr}/P_{wcr} 随FRP弹性模量比 E_{FRP}/E_w 的关系.可见,随着FRP布含量 η 和弹性模量比 E_{FRP}/E_w 的增加,简支FRP加固木柱的临界载荷 P_{cr} 增加,并且,当含量 η 较小时,临界载荷 P_{cr} 与弹性模量比 E_{FRP}/E_w 成线性关系,但当 η 较大时,临界载荷 P_{cr} 随弹性模量比 E_{FRP}/E_w 非线性增加.几何尺寸仍取表1中的值,图5给出了简支FRP布加固红桦 ($E_w = 13.90$ GPa) 木柱临界载荷比 P_{cr}/P_{wcr} 随FRP弹性模量比 E_{FRP}/E_w 的关系.与图4相比可见,FRP加固效应对弹性模量 E_w 较低的木材效果明显.

若不考虑FRP布拉伸和压缩时的不同弹性模量,即取 $E_t = E_b$,则两加固层的等效弹性模量为 $E_t = E_b = E_G(1 - \eta) + E_{FRP}\eta$.图6给出了此情形下不同FRP布含量 η 时,简支FRP加固木柱临界载荷比 P_{cr0}/P_{wcr} 随FRP弹性模量比 E_{FRP}/E_w 的关系.可见,临界载荷 P_{cr0} 随弹性模量比 E_{FRP}/E_w 的增加线性增加.与图4相比可见,若忽略FRP布拉伸和压缩时的不同弹性模量,其临界载荷 P_{cr0} 大于考虑FRP布拉伸和压缩不同弹性模量时的临界载荷 P_{cr} ,并且,随着FRP布含量 η 和弹性模量比 E_{FRP}/E_w 的增加,这种现象更加突出.这是因为当取FRP布拉伸和压缩的弹性模量相同时,FRP布的受压部分亦抗弯,同时,中性轴位置发生变化,导致柱的抗弯能力增强,临界载荷提高.

3 简支FRP加固木柱的过屈曲分析

下面研究简支FRP加固木柱在临界载荷 P_{cr} 处的过屈曲状态,即寻求边值问题(14)和(15)在临界载荷(20)附近的分支解.首先,令

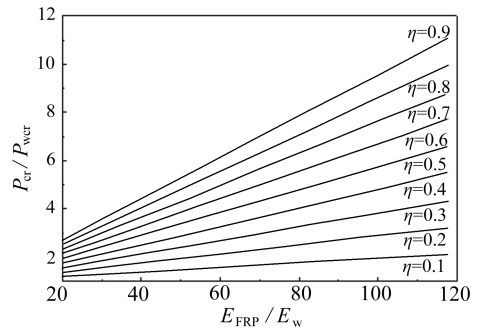


图6 忽略FRP的不同拉压弹性模量,当 $E_w = 7 459.0$ MPa 时,简支FRP加固木柱临界载荷比 P_{cr0}/P_{wcr} 随弹性模量比 E_{FRP}/E_w 的响应

Fig.6 Critical load ratios P_{cr0}/P_{wcr} of simply supported FRP-strengthened timber column vs the elastic modulus ratio E_{FRP}/E_w when $E_w = 7 459.0$ MPa and neglecting the different modulus of the FRP for tension and compression

$$\begin{cases} w(x) = \varepsilon w_0(x) + \varepsilon \bar{w}(x; \varepsilon), \\ P = P_{cr} + \bar{P}(\varepsilon), \\ F_N(x) = -P + \varepsilon \bar{F}_N(x; \varepsilon) = -P_{cr} - \bar{P}(\varepsilon) + \varepsilon \bar{F}_N(x; \varepsilon), \end{cases} \quad (25)$$

其中 ε 为小参数, 定义为

$$\varepsilon = \int_0^L w(x) w_0(x) dx.$$

由此可得

$$\int_0^L \bar{w}(x; \varepsilon) w_0(x) dx = 0. \quad (26)$$

将表达式(25)代入边值问题(14)和(15)得

$$\begin{cases} (EI)_e \left(1 + \frac{P_{cr}}{(EA)_e} \right) \frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} + P_{cr} \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + (\bar{P} - \varepsilon \bar{F}_N) \frac{d^2}{dx^2} (\bar{w} + w_0) + \\ (EI)_e \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{\bar{P} - \varepsilon \bar{F}_N}{(EA)_e} \right) \frac{d^3}{dx^3} (\bar{w} + w_0) \right] = 0, \end{cases} \quad (27)$$

$$\left[\frac{d \bar{F}_N}{dx} + \varepsilon (EI)_e \left[\frac{d^3}{dx^3} (\bar{w} + w_0) \right] \right] \left[\frac{d^2}{dx^2} (\bar{w} + w_0) \right] = 0;$$

$$\begin{cases} \bar{w} = \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} = 0, & x = 0, L, \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} \bar{F}_N + \varepsilon (EI)_e \left[\frac{d^3}{dx^3} (\bar{w} + w_0) \right] \left[\frac{d}{dx} (\bar{w} + w_0) \right] = 0, & x = L. \end{cases}$$

显然, 当 $\varepsilon = 0$ 时, 边值问题(26) ~ (28)有零解

$$\bar{w}(x) = 0, \quad \bar{P} = 0, \quad \bar{F}_N = 0. \quad (29)$$

边值问题(26) ~ (28)在零解(29)处的线性化问题为

$$\begin{cases} (EI)_e \left(1 + \frac{P_{cr}}{(EA)_e} \right) \frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} + P_{cr} \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + \bar{P} \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{(EI)_e}{(EA)_e} \frac{d^4 w_0}{dx^4} \right) = 0, \\ \frac{d \bar{F}_N}{dx} = 0; \end{cases} \quad (30)$$

$$\int_0^L \bar{w}(x; \varepsilon) w_0(x) dx = 0; \quad (31)$$

$$\begin{cases} \bar{w} = \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} = 0, & x = 0, L, \\ \bar{F}_N = 0, & x = L. \end{cases} \quad (32)$$

由此可得

$$\bar{F}_N = 0. \quad (33)$$

将线性化问题(30)中的第1个方程两边乘以 $w_0(x)$ 后在 $[0, L]$ 上积分, 利用分部积分法可得

$$\frac{\pi^2}{L^2} \left(1 - \frac{\pi^2 (EI)_e}{(EA)_e L^2} \right) \bar{P} = 0. \quad (34)$$

因此

$$\bar{P} = 0. \quad (35)$$

于是,有

$$\bar{w} = Cw_0(x). \tag{36}$$

由条件(31)得

$$\bar{w}(x) = 0. \tag{37}$$

可见,线性化问题(30) ~ (32) 只存在零解(33)、(35)和(37). 由分支理论^[21]可知,边值问题(14)和(15)的平凡解(17)在临界载荷 P_{cr} 处必发生分支,即简支 FRP 加固木柱在临界载荷 P_{cr} 处失稳.

下面求解临界载荷 P_{cr} 附近的分支解,设

$$\begin{cases} \bar{w}(x; \varepsilon) = \varepsilon w_1(x) + \varepsilon^2 w_2(x) + \dots, \\ \bar{P}(\varepsilon) = \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots, \\ \bar{F}_N(x; \varepsilon) = \varepsilon F_{N1}(x) + \varepsilon^2 F_{N2}(x) + \dots. \end{cases} \tag{38}$$

将式(38)代入边值问题(26) ~ (28)中,并比较 ε 同次幂的项,可得一系列线性边值问题.

由 ε^1 的项得边值问题(I):

$$\begin{cases} (EI)_e \left(1 + \frac{P_{cr}}{(EA)_e} \right) \frac{d^4 w_1}{dx^4} + P_{cr} \frac{d^2 w_1}{dx^2} + P_1 \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{(EI)_e}{(EA)_e} \frac{d^4 w_0}{dx^4} \right) = 0, \\ \frac{dF_{N1}}{dx} + (EI)_e \frac{d^3 w_0}{dx^3} \frac{dw_0}{dx^2} = 0; \end{cases} \tag{39}$$

$$\int_0^L w_1(x) w_0(x) dx = 0; \tag{40}$$

$$\begin{cases} w_1 = \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0, & x = 0, L, \\ F_{N1} + (EI)_e \frac{d^3 w_0}{dx^3} \frac{dw_0}{dx} = 0, & x = L. \end{cases} \tag{41}$$

而由 ε^2 的项得边值问题(II):

$$\begin{cases} (EI)_e \left(1 + \frac{P_{cr}}{(EA)_e} \right) \frac{d^4 w_2}{dx^4} + P_{cr} \frac{d^2 w_2}{dx^2} + (P_2 - F_{N1}) \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \\ P_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} + \frac{(EI)_e}{(EA)_e} \frac{d}{dx} \left((P_2 - F_{N1}) \frac{d^3 w_0}{dx^3} + P_1 \frac{d^3 w_1}{dx^3} \right) = 0, \\ \frac{dF_{N2}}{dx} + (EI)_e \left(\frac{d^3 w_0}{dx^3} \frac{d^2 w_1}{dx^2} + \frac{d^3 w_1}{dx^3} \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) = 0; \end{cases} \tag{42}$$

$$\int_0^L w_2(x) w_0(x) dx = 0; \tag{43}$$

$$\begin{cases} w_2 = \frac{d^2 w_2}{dx^2} = 0, & x = 0, L, \\ F_{N2} + (EI)_e \left(\frac{d^3 w_0}{dx^3} \frac{dw_1}{dx} + \frac{d^3 w_1}{dx^3} \frac{dw_0}{dx} \right) = 0, & x = L. \end{cases} \tag{44}$$

利用文献[21]中的相关方法,即类似于求解线性化问题(30) ~ (32)的方法,可求得边值问题(I)的解为

$$\begin{cases} w_1(x) = 0, P_1 = 0, \\ F_{N1}(x) = \frac{\pi^4(EI)_e}{2L^5} \left(3 + \cos \frac{2\pi}{L} x \right). \end{cases} \quad (45)$$

而边值问题(II)的解为

$$\begin{cases} F_{N2}(x) = 0, P_2 = \frac{5\pi^4(EI)_e}{4L^5} \left(1 - \frac{7\pi^2(EI)_e}{5(EA)_e L^2} \right) / \left(1 - \frac{\pi^2(EI)_e}{(EA)_e L^2} \right), \\ w_2(x) = - \left[\frac{\pi^4(EI)_e}{36L^5} \sqrt{\frac{2}{L}} \left(1 - \frac{3\pi^2(EI)_e}{(EA)_e L^2} \right) / \left(\frac{9\pi^2(EI)_e}{L^2} \left(1 + \frac{P_{cr}}{(EA)_e} \right) - P_{cr} \right) \right] \sin \frac{3\pi}{L} x. \end{cases} \quad (46)$$

由于 $P_1 = 0, P_2 > 0$, 因此, 分支解是右分叉的. 至此, 得到简支 FRP 加固木柱在临界载荷 P_{cr} 处分支的渐近解:

$$\begin{cases} P = P_{cr} + \varepsilon^2 P_2 + O(\varepsilon^3), \\ w(x) = \varepsilon w_0(x) + \varepsilon^3 w_2(x) + O(\varepsilon^4), \\ F_N(x) = -P_{cr} - \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^2 F_{N1}(x) + O(\varepsilon^3). \end{cases} \quad (47)$$

由此可得简支 FRP 加固木柱过屈曲状态中梁无量纲中心挠度 $w_{max} = w(L/2)/L$ 与无量纲压力 P/P_{cr} 的关系:

$$\begin{cases} \frac{P}{P_{cr}} \approx 1 + \frac{5\pi^4(EI)_e}{4L^2} \left(1 - \frac{7\pi^2(EI)_e}{5(EA)_e L^2} \right) \bar{\varepsilon}^2 / \left(\left(1 - \frac{\pi^2(EI)_e}{(EA)_e L^2} \right) P_{cr} \right), \\ w_{max} \approx \sqrt{2} \bar{\varepsilon} + \frac{\sqrt{2} \pi^4(EI)_e}{36L^2} \left(1 - \frac{3\pi^2(EI)_e}{(EA)_e L^2} \right) \bar{\varepsilon}^3 / \left(\frac{9\pi^2(EI)_e}{L^2} \left(1 + \frac{P_{cr}}{(EA)_e} \right) - P_{cr} \right), \end{cases} \quad (48)$$

其中 $\bar{\varepsilon} = \varepsilon/L^{3/2}$.

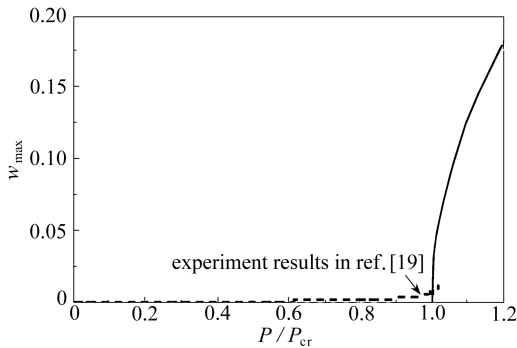


图7 当 $E_w = 7459.0$ MPa 时, FRP 加固简支木柱过屈曲最大挠度 w_{max} 随载荷 P/P_{cr} 的响应

Fig.7 Response of the maximum deflection w_{max} for post buckling of FRP reinforced simply supported timber column vs load P/P_{cr} when $E_w = 7459.0$ MPa

若忽略轴向力引起的压缩变形, 即 $(EA)_e \rightarrow \infty$, 则式(48)进一步化为

$$\begin{cases} \frac{P}{P_{cr}} \approx 1 + \frac{5\pi^2}{4} \bar{\varepsilon}^2, \\ w_{max} \approx \sqrt{2} \bar{\varepsilon} + \frac{\sqrt{2} \pi^2}{288} \bar{\varepsilon}^3. \end{cases} \quad (49)$$

可见, 在此无量纲意义下, FRP 加固层材性对简支 FRP 加固木柱过屈曲状态响应的影响很小. 对表 1 给定的简支 FRP 加固矩形木柱, 不同 FRP 布含量 η 时的无量纲的过屈曲状态(48)示于图 7 中. 由于 $(EI)_e / ((EA)_e L^2) \ll 1$, 不同 FRP 含量 η 的加固木柱无量纲过屈曲状态(48)几乎相同, 过屈曲曲线重合, 即过屈曲状态可近似为式(49). 同时, 图 7 亦给出了文献[19]中 GFRP 布加固木柱稳定性试验的无量纲结果. 可见, 由于木柱存在初始缺陷, 实验中 GFRP 加固木柱不呈现理想压杆

的失稳现象,但在临界载荷 P_{cr} 附近,随着压力 P 的增加,GFRP 加固木柱的挠度显著增大。

4 结 论

由于 FRP 布只抵抗拉伸,不抵抗压缩,因此,FRP 布加固层的拉伸与压缩具有不同的弹性模量(24),由此影响 FRP 加固梁的中性轴位置(1)。

在此基础上,基于考虑梁弯曲二阶效应的非线性控制方程,研究了简支 FRP 布加固木柱的非线性稳定性问题,得到了临界载荷(20),指出对于细长梁,轴向压缩效应对临界载荷影响很小。数值计算表明,FRP 加固可明显提高木柱的稳定性,且随着 FRP 弹性模量提高和含量增大,简支 FRP 加固木柱的临界载荷增大。随后,严格证明了简支 FRP 加固木柱在临界载荷处必发生分支,并得到了简支 FRP 加固木柱在临界载荷附近过屈曲状态的渐近解析解。结果表明:在本文无量纲的意义下,FRP 加固层对简支 FRP 加固对木柱过屈曲状态的影响很小。

参考文献:

- [1] 张青萍,陈军. 中国现代木结构建筑发展之策略[J]. 中国科学, E 辑, 2009, **39**(5): 874-877. (ZHANG Qing-ping, CHEN Jun. Development strategy of modern wooden architecture in China[J]. *Science in China, Series E*, 2009, **39**(5): 874-877. (in Chinese))
- [2] Bulleit W M, Sandberg L B, Woods G J. Steel-reinforced glue laminated timber[J]. *J Journal of Structural Engineering, ASCE*, 1989, **115**(2): 433-444.
- [3] Sliker A. Reinforced wood laminated beams[J]. *Forest Products Journal*, 1962, **12**(1): 91-96.
- [4] Zhao X L, Zhang L. State-of-the-art review on FRP strengthened steel structures[J]. *Engineering Structures*, 2007, **29**(8): 1808-1823.
- [5] Waldron P, Byars E A, Dejke V. Durability of FRP in concrete: a state of the art[C]//*Proceedings of the International Workshop on. Specialty Workshop of Composites in Construction*. Capri, Italy: American Society of Civil Engineers, 20-21, July, 2001.
- [6] 段世昌,徐千军. FRP 与混凝土组合结构研究综述[J]. 水力发电学报, 2005, **24**(5): 55-59. (DUAN Shi-chang, XU Qian-jun. State-of-the-art review of composite structure of FRP and concrete[J]. *Journal of Hydroelectric Engineering*, 2005, **24**(5): 55-59. (in Chinese))
- [7] Plevis N, Triantafillou T. FRP-reinforced wood as structural material[J]. *Journal of Materials in Civil Engineering, ASCE*, 1992, **4**(3): 300-317.
- [8] Triantafillou T, Deskovic N. Prestressed FRP sheets as external reinforcement of wood members[J]. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 1992, **118**(5): 1270-1284.
- [9] 杨会峰,刘伟庆,邵劲松,周钟宏. FRP 加固木梁的受弯性能研究[J]. 建筑材料学报, 2008, **11**(5): 591-597. (YANG Hui-feng, LIU Wei-qing, SHAO Jin-song, ZHOU Zhong-hong. Study on flexural behavior of timber beams strengthened with GRP[J]. *Journal of Building Materials*, 2008, **11**(5): 591-597. (in Chinese))
- [10] Gómez S, Svecova D. Behavior of Split timber stringers reinforced with external GFRP sheets [J]. *Journal of Composites for Construction*, 2008, **12**(2): 202-211.
- [11] Gezer H, Aydemir B. The effect of the wrapped carbon fiber reinforced polymer material on

- fir and pine woods[J]. *Materials and Design*, 2010, **31**(7): 3564-3567.
- [12] Kim Y J, Harries K A. Modeling of timber beams strengthened with various CFRP composites [J]. *Engineering Structures*, 2010, **32**(10): 3225-3234.
- [13] 马建勋, 胡平, 蒋湘闽, 胡明. 碳纤维布加固木柱轴心抗压性能试验研究[J]. 工业建筑, 2005, **35**(8): 40-44. (MA Jian-xun, HU Ping, JIANG Xiang-min, HU Ming. Experimental research on axial compressive behaviors for timer column strengthened with CFRP [J]. *Industrial Construction*, 2005, **35**(8): 40-44. (in Chinese))
- [14] 周钟宏, 刘伟庆. 碳纤维布加固木柱的轴心受压试验研究[J]. 工程抗震和加固改造, 2006, **28**(3): 44-48. (ZHOU Zhong-hong, LIU Wei-qing. Experimental study on timber columns strengthened by CFRP subjected to axial compression [J]. *Earthquake Resistant Engineering and Retrofitting*, 2006, **28**(3): 44-48. (in Chinese))
- [15] Taheri F, Nagaraj M, Cheraghi N. FRP-reinforced glulam columns[J]. *FRP International*, 2005, **2**(3): 10-12.
- [16] 许清风, 朱雷. CFRP 维修加固局部受损木柱的试验研究[J]. 土木工程学报, 2007, **40**(8): 41-46. (XU Qing-feng, ZHU Lei. An experimental study on partially-damaged wood columns repaired and strengthened with CFRP [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2007, **40**(8): 41-46. (in Chinese))
- [17] Najm H, Secaras J, Balaguru P. Compression tests of circular timber column confined with carbon fibers using inorganic matrix[J]. *Journal of Materials in Civil Engineering*, ASCE, 2007, **19**(2): 198-204.
- [18] 邵劲松, 刘伟庆, 蒋桐, 王署光, 周叮. FRP 加固轴心受压木柱应力-应变模型[J]. 工程力学, 2008, **25**(25): 183-187. (SHAO Jin-song, LIU Wei-qing, JIANG Tong, WANG Shu-guang, ZHOU Ding. Stress-strain model for FRP-Strengthened wood column under axial compression [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, **25**(25): 183-187. (in Chinese))
- [19] Taheri F, Nagaraj M, Khosravi P. Buckling response of glue-laminated columns reinforced with fiber-reinforced plastic sheets[J]. *Composite Structures*, 2009, **88**(3): 481-490.
- [20] Gere J M, Timoshenko S P. *Mechanics of Materials*[M]. 2nd SI ed. New York: Van Nostrand Reinhold, 1984.
- [21] 程昌钧, 朱正佑. 结构的屈曲与分叉[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1991. (CHENG Chang-jun, ZHU Zheng-you. *Buckling and Bifurcation of Structures*[M]. Lanzhou: Lanzhou University Press, 1991. (in Chinese))
- [22] 陆新征, 冯鹏, 叶列平. FRP 布约束混凝土方柱轴心受压性能的有限元分析[J]. 土木工程学报, 2003, **136**(12): 46-51. (LU Xin-zheng, FENG Peng, YE Lie-ping. Behavior of FRP-confined concrete square columns under uniaxial load [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2003, **136**(12): 46-51. (in Chinese))

Nonlinear Stability of Timber Column Strengthened With Fiber Reinforced Polymer

OUYANG Yu, YANG Xiao, BAO Ruo-han

(Department of Civil Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract: Taking effect of the bi-modulus for tension and compression, of the fiber reinforced polymer sheet (FRP Sheet) in the reinforcement layer into consideration, a general mathematical model for the nonlinear bending of a slender timber beam strengthened with FRP sheet was established under the hypothesis of the large deflection deformation of the beam, and nonlinear governing equations with the second order effect of the beam bending were derived. Then, the nonlinear stability of a simply-supported slender timber column strengthened with FRP sheet was investigated, and the expression of the critical load of the simply-supported FRP-strengthened timber beam was obtained. The existence of postbuckling solution of the timber column was proved theoretically, and the asymptotic analytical solution of the postbuckling state in the vicinity of the critical load was obtained with the perturbation method. Parameter study was conducted, and it was shown that FRP reinforcement layer had a great influence on the critical load of the timber column, and a little influence on the dimensionless postbuckling state.

Key words: fiber reinforced polymer; timber column; reinforcement; nonlinear mathematical model; postbuckling analysis; bi-modulus