

柔性梁内平衡模型降阶与 主动控制的实验研究*

谢永, 赵童, 蔡国平

(上海交通大学 工程力学系 海洋工程国家重点实验室,上海 200240)

摘要: 内平衡降阶方法能够有效地解决柔性结构的模型降阶问题,尤其是对于频率密集结构.然而由于存在如何从物理传感器测量中提取内平衡模态坐标的问题,目前关于内平衡降阶方法的研究大多是在理论上进行探索,少有实验研究和工程应用报道.该文以柔性梁为对象,开展内平衡降阶方法的理论与实验研究,并且基于降阶模型进行主动控制的设计.文中介绍了一个基于 DSP TMS320F2812 芯片的实验系统,提出了一个从物理传感器测量中提取内平衡模态坐标的近似方法,并且通过仿真与实验验证了该方法的可行性和有效性,基于降阶模型的控制设计能够有效地抑制梁的弹性振动.

关键词: 柔性梁; 内平衡模型降阶; 主动控制; 实验

中图分类号: O328 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.08.005

引 言

随着科技的发展,柔性附件在实际工程中大量使用,构成当今所谓的柔性结构系统.柔性附件的引入为动力学建模与控制带来了困难,为了准确描述结构系统的动力学行为,必须在建模过程中充分考虑其柔性特征,这就使得所建模型的自由度数目通常很大,而控制的设计与实现则要求模型阶数应尽可能地低.这就要求进行模型降阶处理,而且降阶后的模型既要能真实地反映出系统的主要动力学特性,阶数也要足够低,以便控制设计.另外,从动力学仿真的角度看,为了提高仿真效率,模型的阶数也不应太高.由于柔性结构在航空航天、机器人等许多高科技领域有着广泛的工程应用背景,因此对其模型降阶与主动控制的研究具有重要的理论意义和工程价值.

模型降阶一般可以从两方面予以考虑^[1]:一是从建模的角度进行降阶,即根据经典的假设模态法,选择具有良好正交性的模态集,截取少数低阶模态以构成降阶系统;二是选择合适的降阶准则进行降阶,即根据系统价值函数的大小,确定出那些对系统特性贡献较大的少数主要模态,并以这些模态组成降阶系统,目前常采用的降阶准则有惯性完备性准则^[2]、模态价值

* 收稿日期: 2011-01-14; 修订日期: 2011-06-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11072146;11002087)

作者简介: 谢永(1987—),男,河北人,硕士生(E-mail: ghostxy@sjtu.edu.cn);

蔡国平(1965—),男,河南人,教授,博士,博士生导师(联系人. Tel: +86-21-34204798;

E-mail: caigp@sjtu.edu.cn).

分析准则^[3-4]、内平衡准则^[5]等,其中内平衡方法能够有效地解决柔性结构的模型降阶问题,尤其是适用于频率密集结构,因此该方法自 Moore^[5]提出以来,众多学者对此开展了大量研究.例如, Gregory^[6]将内平衡思想应用到了柔性结构的模型降阶中,推导了弱阻尼结构的内平衡坐标的近似表达式; Jonckheere^[7-8]采用内平衡降阶准则讨论了弱阻尼结构的模型降阶问题,结果表明,当阻尼趋于0时,内平衡坐标是解耦的,并等同于常规的模式坐标; Gawronski 等和 Williams^[9-10]将内平衡准则应用到了密频空间结构的模型降阶中,并给出了详细的计算步骤,其中文献[9]的结果指出,对于弱阻尼、频率足够分离的系统,内平衡降阶准则和模态价值分析基本上等价; Zhou 等^[11]通过引入新的可观、可控矩阵,提出了一个不稳定系统内平衡降阶的实现方法,所提出的可观、可控矩阵与控制能量最小和估计误差最小相关联.上述研究结果显示,内平衡方法能够有效地处理柔性结构系统的模型降阶问题.然而,目前对于该方法的研究大多是在理论上进行探索,少有实验研究和工程应用报道,其主要原因是无法解决如何从物理传感器测量中提取出内平衡模态坐标的问题.基于降阶模型所设计的控制律是内平衡模态坐标的函数,而内平衡模态坐标无法直接从物理传感器测量中得到.该问题的良好解决将能促进内平衡方法的工程应用.

本文以柔性梁为对象,开展内平衡模型降阶与主动控制的研究,给出了一个从物理传感器测量中提取内平衡模态坐标的近似方法,并且开展了实验验证工作.本文结构如下:第1节给出梁的动力学方程和状态空间模型;第2节介绍内平衡模型降阶方法;第3节给出最优控制律的设计方法;第4节介绍内平衡模态空间与物理空间的转换关系;第5节给出数值仿真与实验结果;第6节得出本文结论.

1 动力学方程

考虑如图1所示的柔性悬臂梁,采用有限元法可得系统的动力学方程为

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}_d\mathbf{q} + \bar{\mathbf{C}}_v\dot{\mathbf{q}}, \end{cases} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{q} \in R^n$ 为物理坐标列向量, n 为系统自由度; $\mathbf{M} \in R^{n \times n}$, $\mathbf{D} \in R^{n \times n}$, $\mathbf{K} \in R^{n \times n}$ 分别为系统质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; $\mathbf{u} \in R^{r_1}$ 为控制力列阵, r_1 为作动器的个数; $\bar{\mathbf{B}} \in R^{n \times r_1}$ 为作动器的分布矩阵; $\mathbf{y} \in R^{r_2 \times 1}$ 是系统的输出向量, r_2 为传感器的个数; $\bar{\mathbf{C}}_d \in R^{r_2 \times n}$ 和 $\bar{\mathbf{C}}_v \in R^{r_2 \times n}$ 分别为位移观测矩阵和速率观测矩阵.

采用正则模态矩阵 \mathbf{T} , 可将式(1)变换到正则模态空间:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \text{diag}(2\zeta_i\omega_i)\boldsymbol{\eta} + \text{diag}(\omega_i^2)\boldsymbol{\eta} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_d\boldsymbol{\eta} + \mathbf{C}_v\dot{\boldsymbol{\eta}}, \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\boldsymbol{\eta}$ 为模态坐标列向量, ω_i, ζ_i 分别为第 i 阶模态的固有频率和阻尼比, $\mathbf{C}_d = \bar{\mathbf{C}}_d\mathbf{T}$, $\mathbf{C}_v = \bar{\mathbf{C}}_v\mathbf{T}$, $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^T\bar{\mathbf{B}}$.

将方程(2)转到状态空间,有

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{cases} \quad (3)$$

式中

$$\mathbf{x} = [\dot{\eta}_1, \omega_1\eta_1, \dots, \dot{\eta}_n, \omega_n\eta_n]^T,$$

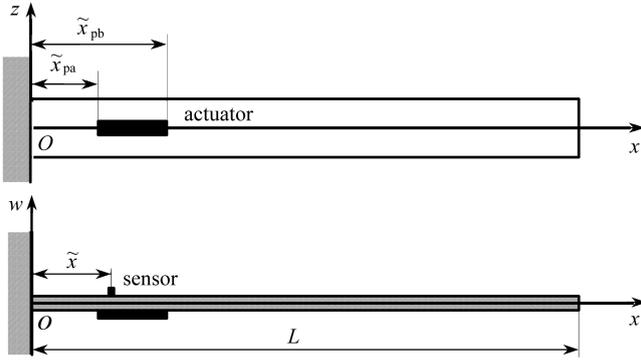


图1 悬臂梁模型

Fig. 1 Cantilever beam model

$$A = \text{diag}(A_i), A_i = \begin{bmatrix} -2\zeta_i\omega_i & -\omega_i \\ \omega_i & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = [B_1^T, \dots, B_n^T]^T, B_i = \begin{bmatrix} b_i \\ 0 \end{bmatrix},$$

b_i 是 \hat{B} 的第 i 行; $C = [C_1, \dots, C_n]$, $C_i = [C_{vi}, C_{di}/\omega_i]$, C_{vi}, C_{di} 分别为 C_v, C_d 的第 i 列。

2 内平衡降阶

内平衡方法最早是在 1981 年由 Moore^[5] 提出来的,它是利用内平衡变换,使得系统的可控性和可观性 Gram 矩阵具有对角阵结构,从而保留对角线上较大值所对应的状态分量以构成降阶系统。

方程(3)的可控和可观 Gram 矩阵 W_c, W_o 可由如下两个 Liapunov 方程得到^[5]:

$$AW_c + W_c A^T + BB^T = 0, \quad (4a)$$

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = 0. \quad (4b)$$

采用非奇异线性变换 T_b 对系统(3)进行变换:

$$x = T_b \bar{x}, \quad (5)$$

可得

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u, \\ y = \bar{C}\bar{x}, \end{cases} \quad (6)$$

式中, $\bar{A} = T_b^{-1}AT_b$, $\bar{B} = T_b^{-1}B$, $\bar{C} = CT_b$. 系统(6)的可控和可观 Gram 矩阵满足

$$\bar{W}_c = \bar{W}_o = \bar{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_i), \quad (7)$$

其中, $\bar{\Sigma}$ 为对角矩阵,其对角元素 σ_i 为第 i 个奇异值. 系统(6)称为内平衡系统,相应的变换系统(5)称为内平衡变换. 文献[5]证明了,所有线性时不变的渐近稳定系统都可以通过线性变换转换成内平衡形式。

由方程(4a)可知,内平衡系统(6)的可控 Gram 矩阵 \bar{W}_c 满足

$$\bar{A} \bar{W}_c + \bar{W}_c \bar{A}^T + \bar{B} \bar{B}^T = 0, \quad (8)$$

将 $\bar{A} = T_b^{-1}AT_b$ 和 $\bar{B} = T_b^{-1}B$ 代入上式,并且分别左乘和右乘 T_b, T_b^T , 可得

$$\mathbf{A}(\mathbf{T}_b \bar{\mathbf{W}}_c \mathbf{T}_b^T) + (\mathbf{T}_b \bar{\mathbf{W}}_c \mathbf{T}_b^T) \mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}. \quad (9)$$

将方程(4a)与方程(9)比较可得到

$$\mathbf{W}_c = \mathbf{T}_b \bar{\mathbf{W}}_c \mathbf{T}_b^T, \bar{\mathbf{W}}_c = \mathbf{T}_b^{-1} \mathbf{W}_c (\mathbf{T}_b^T)^{-1}. \quad (10)$$

对于可观矩阵,同理可以得到

$$\bar{\mathbf{W}}_o = \mathbf{T}_b^T \mathbf{W}_o \mathbf{T}_b. \quad (11)$$

由方程(7)、(10)和(11)可知

$$\boldsymbol{\Sigma}^2 = \bar{\mathbf{W}}_c \bar{\mathbf{W}}_o = \mathbf{T}_b^{-1} (\mathbf{W}_c \mathbf{W}_o) \mathbf{T}_b. \quad (12)$$

式(12)表明,内平衡变换矩阵 \mathbf{T}_b 的每一列都是矩阵 $\mathbf{W}_c \mathbf{W}_o$ 的特征向量,而 σ_i^2 即为其对应的特征值.

Laub^[12] 和 Bartels 等^[13] 提出了一种计算 \mathbf{T}_b 的有效方法:

$$\mathbf{T}_b = \mathbf{L}_c \mathbf{U} \mathbf{A}, \quad (13)$$

其中, \mathbf{L}_c 为系统可控 Gram 矩阵 \mathbf{W}_c 的 Cholesky 分解,即 $\mathbf{W}_c = \mathbf{L}_c \mathbf{L}_c^T$; \mathbf{U} 是正交模态阵,即 $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$; \mathbf{A} 是对角阵,且满足^[12-13]:

$$\mathbf{U}^T (\mathbf{L}_c^T \mathbf{W}_o \mathbf{L}_c) \mathbf{U} = \mathbf{A}^2, \mathbf{A} = \text{diag}(\sigma_i). \quad (14)$$

对于内平衡系统(6),奇异值 σ_i 代表着系统模态的可控性和可观性,因而可以根据系统的“最可控、最可观”即较大的 σ_i 值进行模态截断.为了区别,称系统(3)对应的坐标基 \mathbf{x} 为标准模态坐标,内平衡系统(6)的坐标基 $\bar{\mathbf{x}}$ 称为内平衡模态坐标.假设保留了 r 阶内平衡模态,则降阶系统($\bar{\mathbf{A}}_r, \bar{\mathbf{B}}_r, \bar{\mathbf{C}}_r$)为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_r = \bar{\mathbf{A}}_r \bar{\mathbf{x}}_r + \bar{\mathbf{B}}_r \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}_r \bar{\mathbf{x}}_r. \end{cases} \quad (15)$$

3 主动控制设计

方程(15)给出了基于内平衡降阶方法的系统低维模型,然后基于该低维模型进行控制设计.根据最优控制理论,取性能指标:

$$J = \int_0^{+\infty} [\bar{\mathbf{x}}_r^T(t) \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{x}}_r(t) + \mathbf{u}^T(t) \bar{\mathbf{R}} \mathbf{u}(t)] dt, \quad (16)$$

式中, $\bar{\mathbf{Q}} \in R^{r \times r}$ 为半正定增益矩阵, $\bar{\mathbf{R}} \in R^{1 \times r_1}$ 为正定矩阵.进而得到最优控制律为

$$\mathbf{u}(t) = -\bar{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{B}}_r^T \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{x}}_r(t), \quad (17)$$

其中,正定对称矩阵 $\bar{\mathbf{S}} \in R^{r \times r}$, 为如下 Riccati 矩阵方程的解:

$$\bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{A}}_r + \bar{\mathbf{A}}_r^T \bar{\mathbf{S}} - \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{B}}_r \bar{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{B}}_r^T \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}. \quad (18)$$

4 内平衡模态空间与物理空间的转换

由方程(17)可知,控制律 $\mathbf{u}(t)$ 为内平衡模态坐标 $\bar{\mathbf{x}}_r(t)$ 的函数,而内平衡模态坐标是无法通过传感器的测量直接得到的.本文在此给出一个从物理传感器测量值估计出内平衡模态坐标的近似方法.本文实验中采用应变片作为传感器,因此以下阐述如何由应变片的物理测量提取出内平衡模态坐标.梁的 x 方向的弯曲应变与挠度的关系为^[14]

$$\varepsilon_x = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}, \quad (19)$$

其中, ε_x 为梁 x 方向的弯曲应变, h 和 w 分别为梁的厚度和挠度。

采用假设模态法, 梁上任意点的挠度可表示为

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i(x) \eta_i(t),$$

其中 $W_i(x)$ 为悬臂梁的模态函数。由于梁的响应主要由低阶模态组成, 因此本文采用

$$w(x,t) \approx \sum_{i=1}^r W_i(x) \eta_i(t),$$

其中 r 为所保留的内平衡模态的个数。另外, 假设传感器的个数也与内平衡模态的个数相等, 则正则模态位移和速度可以表示为

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_r \end{bmatrix} \approx \frac{2}{h} [W_1(x) \quad \cdots \quad W_r(x)] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W_1(\tilde{x}_1)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial^2 W_r(\tilde{x}_1)}{\partial x^2} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 W_1(\tilde{x}_r)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial^2 W_r(\tilde{x}_r)}{\partial x^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x_1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{x_r} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\eta}_r \end{bmatrix} \approx \frac{2}{h} [W_1(x) \quad \cdots \quad W_r(x)] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W_1(\tilde{x}_1)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial^2 W_r(\tilde{x}_1)}{\partial x^2} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 W_1(\tilde{x}_r)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial^2 W_r(\tilde{x}_r)}{\partial x^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{x_1} \\ \vdots \\ \dot{\varepsilon}_{x_r} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

其中, \tilde{x}_i 为第 i 个传感器在梁上的位置, $i = 1, \dots, r$ 。

取变换矩阵 T_b 的前 $2r$ 行和前 $2r$ 列构成矩阵 T_r , 根据方程(5)可以近似得到内平衡模态位移和模态速度为

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_r \\ \tilde{x}_r \end{bmatrix} \approx T_r^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \dot{\eta}_r \\ \eta_r \end{bmatrix}. \quad (22)$$

在下节中, 将通过实验对以上所给出的内平衡模态坐标的近似处理方法的可行性进行验证。

5 数值仿真与实验研究

本节进行数值仿真与实验验证。柔性梁为铝合金梁, 尺寸为 $900 \text{ mm} \times 35 \text{ mm} \times 1.5 \text{ mm}$, 弹性模量为 69.0 GPa , Poisson 比为 0.3 , 密度为 2766 kg/m^3 。数值计算得到梁的前两阶固有频率分别为 1.4940 Hz 和 9.3631 Hz , 由实验测得的频率为 1.4947 Hz 和 9.3679 Hz , 前两阶阻尼比由实验测得为 0.012 和 0.0055 。

5.1 数值仿真

首先采用内平衡降阶方法对柔性梁进行模型降阶。由于梁的响应主要由其低阶模态构成, 本文采用梁的前 6 阶模态来模拟真实响应。由前 6 阶模态构成的动力学模型称为原系统, 而由内平衡方法得到的模型称为降阶系统。系统前 6 阶内平衡模态对应的 12 个奇异值分别为

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1.5810 & 1.5435 & 0.1247 & 0.1218 \\ 0.0163 & 0.0160 & 0.0139 & 0.0134 \\ 0.0129 & 0.0128 & 0.0062 & 0.0061 \end{bmatrix},$$

其中,1阶模态对应2个奇异值.可看出,第1阶内平衡模态对应的奇异值(前2个奇异值)较大,其余的奇异值与其比较则很小,因此取第1阶内平衡模态组成降阶系统,则方程(15)中状态向量 \bar{x}_r 的维数为2,进而可得 $\bar{A}_r, \bar{B}_r, \bar{C}_r$ 分别为

$$\bar{A}_r = \begin{bmatrix} -0.1105 & 9.3869 \\ 9.3869 & -0.1148 \end{bmatrix}, \bar{B}_r = \begin{bmatrix} 0.5912 \\ 0.5953 \end{bmatrix}, \bar{C}_r = [-0.5912 \quad 0.5953].$$

以下验证降阶模型的可靠性.假定梁自由端存在0.02 m的初始位移,初始速度为0,梁在该条件下自由振动.图2为梁的自由端响应对比图,其中实线表示原系统模型,虚线表示降阶系统模型,图2(b)为图2(a)的局部放大图.从图2中可看出,降阶系统与原系统的响应吻合很好.图3(a)和图3(b)分别为原系统和降阶系统的频率响应,可以看出降阶系统能够较好地逼近原系统.

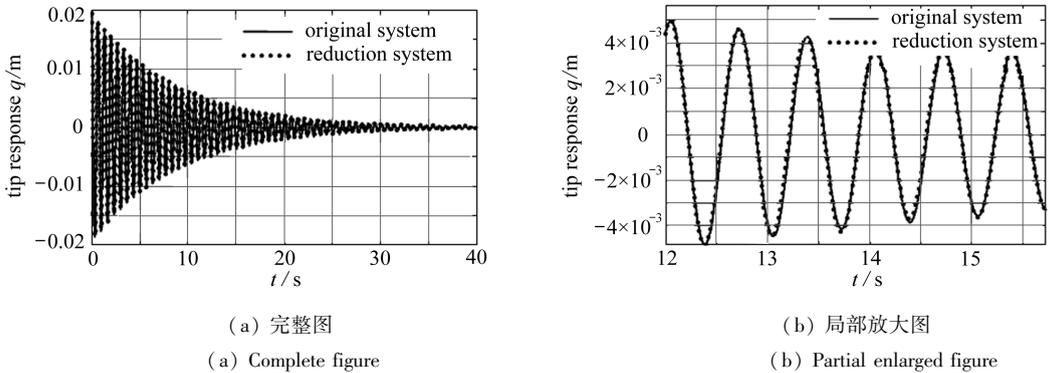


图2 原系统和降阶系统梁的端部响应

Fig. 2 Tip response of the beam using the original system model and the reduced-order model

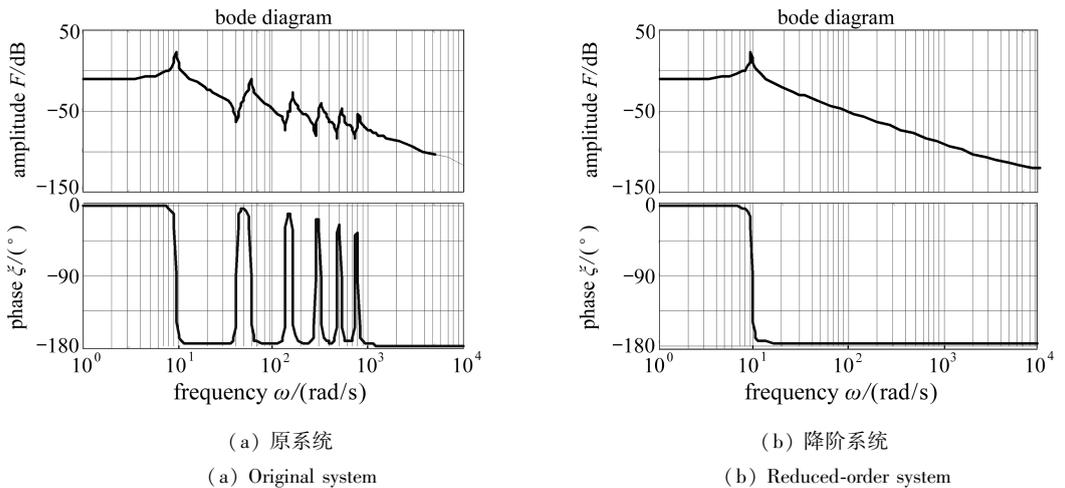


图3 频率响应

Fig. 3 Frequency response

然后进行主动控制仿真.由于降阶模型只由第1阶内平衡模态组成,因此采用一片压电片

作为作动器对梁的振动进行控制. 初始条件与自由振动仿真时相同. 压电片的尺寸为 $60 \text{ mm} \times 15 \text{ mm} \times 0.5 \text{ mm}$, 用环氧树脂粘贴在梁的根部, 位置为 $\tilde{x}_{pa} = 77 \text{ mm}$, $\tilde{x}_{pb} = 137 \text{ mm}$ (如图 1 所示). 压电材料弹性模量 63.0 GPa , Poisson 比为 0.35 , 压电应变常数为 $1.75 \times 10^{-10} \text{ m/V}$. 控制设计中, 取式 (16) 中的增益矩阵为 $\bar{Q} = \text{diag}([100, 1])$, $\bar{R} = 60$. 利用压电作动器对梁的振动进行控制, 其端部响应如图 4 (a) 所示, 其中虚线表示未施加控制的响应, 实线表示施加控制的响应. 图 4 (b) 为压电作动器上的控制电压的时间历程. 从图 4 可看出, 梁的振动可以得到有效抑制.

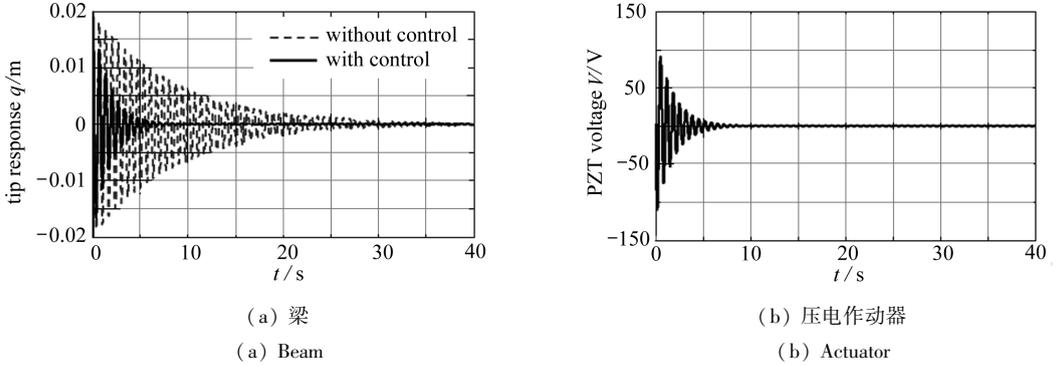


图 4 梁的端部响应和压电作动器控制电压时间历程
Fig. 4 Tip response of the beam and applied voltage of the PZT actuator

5.2 实验结果

实验用柔性梁照片如图 5 所示. 实验中, 采用 1 片应变片作为传感器, 测量梁的振动信号. 由于梁的最大应变位于根部, 因此将应变片贴在该位置, 应变片在梁上的位置为 $\tilde{x} = 37 \text{ mm}$ (如图 1 所示).



图 5 实验用柔性梁照片
Fig. 5 Photo of experiment beam

实验系统基于 DSP TMS320F2812 控制卡进行构建, DSP 负责控制器的在线计算. 根据应变片的反馈信号, 计算得到压电作动器的控制电压. 图 6 为实验流程, 具体信号流程如下:

- 1) 反馈信号回路 应变片的应变信号经过应变放大仪放大后, 进入 DSP 的 ADC 模块;
- 2) 控制信号回路 从 DAC 模块通道输出的电压信号, 通过压电陶瓷驱动电源放大后, 施加到压电作动器上;
- 3) DSP 通过 SCI 模块与计算机进行数据交互, 实现实验数据的输出、保存与图像生成.

主动控制中, 需要用到位移和速度 (即系统的状态) 作为控制反馈信号. 然而, 速度信号 (也称为微分信号) 无法由应变片传感器测量直接得到. 因此, 必须由物理传感器测量值来估计出速度信号, 进而将其用于控制律的计算. 由于实验系统的机电干扰, 应变片所采集的信号中夹杂着高频噪声, 使得采用传统的插值法所得到的微分信号可靠性不好. 本文采用文献 [15] 给出的微分-跟踪器来估计微分信号. 该跟踪器能够快速地跟踪输入信号, 并且能够给出较高品质的微分信号. 微分-跟踪器的离散形式如下^[15]:

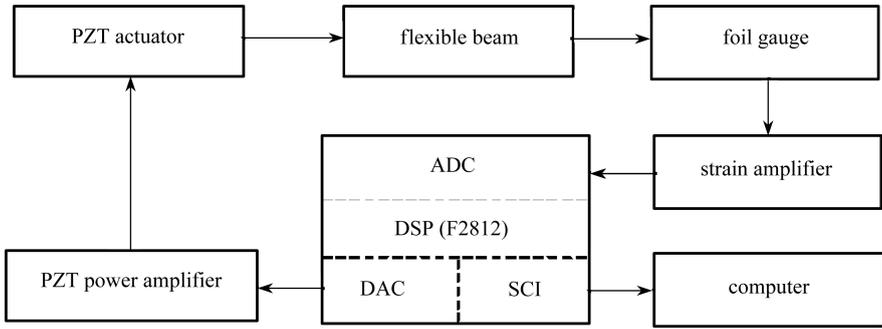


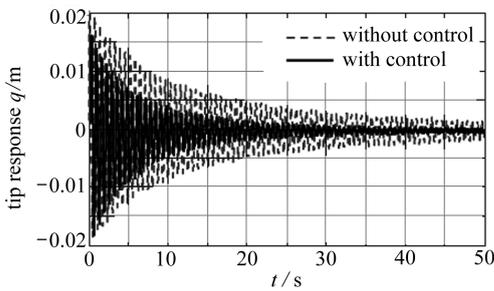
图6 实验系统流程图

Fig.6 Flow chart of experiment system

$$\begin{cases} \hat{x}_1(k+1) = \hat{x}_1(k) + T\hat{x}_2(k), \\ \hat{x}_2(k+1) = \hat{x}_2(k) + T \text{fst}(\hat{x}_1(k), \hat{x}_2(k), \bar{u}(k), \bar{r}, \bar{h}), \end{cases} \quad (23)$$

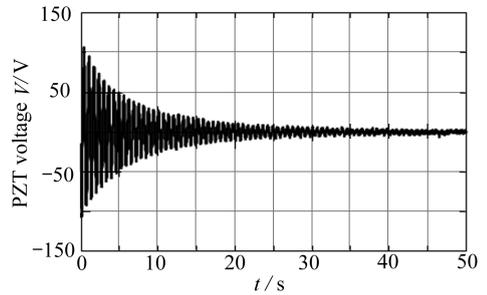
式中, $\bar{u}(k)$ 为第 k 时刻的输入信号, \hat{x}_1 为输入信号 $\bar{u}(k)$ 的跟踪信号, \hat{x}_2 为跟踪信号 \hat{x}_1 的近似微分信号, T 为采样周期, \bar{r} 为决定跟踪快慢的参数, \bar{h} 为输入信号被噪声污染时, 决定滤波效果的参数. fst 函数描述如下:

$$\text{fst} = \begin{cases} -\bar{r}\bar{a}/\delta, & |\bar{a}| \leq \delta, \\ -\bar{r}\text{sign}(\bar{a}), & |\bar{a}| > \delta, \end{cases} \quad (24)$$



(a) 梁

(a) Beam



(b) 压电作动器

(b) Actuator

图7 梁的端部响应和压电作动器控制电压时间历程

Fig.7 Tip response of the beam and applied voltage of the PZT actuator

其中

$$\bar{a} = \begin{cases} \hat{x}_2 + \bar{y}/\bar{h}, & |\bar{y}| \leq \delta_0, \\ \hat{x}_2 + 0.5(a_0 - \delta) \text{sgn}(\bar{y}), & |\bar{y}| > \delta_0, \end{cases}$$

$$\delta = \bar{r}\bar{h}, \delta_0 = \delta\bar{h}, \bar{y} = \hat{x}_1 - \bar{u} + \bar{h}\hat{x}_2, a_0 = \sqrt{\delta^2 + 8\bar{r}|\bar{y}|},$$

$$\text{sgn}(\bar{a}) = \begin{cases} 1, & \bar{a} > 0, \\ 0, & \bar{a} = 0, \\ -1, & \bar{a} < 0. \end{cases}$$

Chen 等^[16]曾采用该微分-跟踪器用于柔性板的振动控制实验, 结果显示效果很好. 本文中, 取微分-跟踪器参数为: $\bar{r} = 1\ 000, \bar{h} = 0.008, \bar{T} = 0.001\ \text{s}$.

在控制设计时,方程(16)中增益矩阵和系数的选择都与数值仿真时相同,即 $\bar{Q} = \text{diag}([100, 1])$, $\bar{R} = 60$. 压电作动器的参数如前所述. 施加外力使得梁末端产生 2 cm 的初始位移,初始速度为 0. 去掉外力,梁呈现出自由振动,利用压电作动器对梁的振动进行控制. 图 7 为梁末端的响应时程和压电作动器的控制电压时程. 可见,梁的振动得到了有效抑制. 与图 4 的仿真结果进行对比可看出,仿真和实验吻合较好.

6 结 论

本文以柔性梁为对象,开展了内平衡模型降阶方法的理论与实验研究,并且基于降阶模型进行了主动控制设计. 文中提出了一个从物理传感器测量中提取内平衡模态坐标的近似方法,介绍了一个基于 DSP TMS320F2812 的实验系统. 研究结果表明,内平衡方法能够有效地对柔性结构进行模型降阶,本文所提出的内平衡模态坐标的近似处理方法是可行的和有效的.

参考文献:

- [1] 缪炳祺, 曲广吉, 程道生. 柔性航天器的动力学建模问题[J]. 中国空间科学技术, 1999, **19**(5): 35-40. (MIAO Bing-qi, QU Guang-ji, CHENG Dao-sheng. A study on dynamics modeling of flexible spacecraft[J]. *Chinese Space Science and Technology*, 1999, **19**(5): 35-40. (in Chinese))
- [2] Hughes P C. Modal identities for elastic bodies with application to vehicle dynamics and control[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1980, **47**(1): 177-184.
- [3] Skelton R E, Yousuff A. Component cost analysis of large scale systems[J]. *International Journal of Control*, 1983, **37**(2): 285-304.
- [4] Skelton R E, Gregory C Z. Measurement feedback and model reduction by modal cost analysis[C]//*Proceedings of the Joint Automatic Control Conference*. USA: Denver, 1979: 211-218.
- [5] Moore B C. Principal component analysis in linear system: controllability, observability and model reduction[J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1981, **26**(1): 17-31.
- [6] Gregory C Z. Reduction of large flexible model using internal balancing theory[J]. *Journal of Guidance*, 1984, **7**(6): 725-732.
- [7] Jonckheere E A, Opdencker Ph. Singular value analysis balancing and model reduction of large space structures[C]//*American Control Conference*. San Diego, CA, USA, 1984: 141-149.
- [8] Jonckheere E A. Principal component analysis of flexible system—open-loop case[J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1984, **29**(12): 1059-1097.
- [9] Gawronski W, Williams T. Model reduction for flexible space structures[J]. *Journal of Guidance*, 1991, **14**(1): 68-76.
- [10] Williams T. Closed-form grammians and model reduction for flexible space structures[J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1990, **35**(3): 379-382.
- [11] Zhou K, Salomon G, Wu E. Balanced realization and model reduction for unstable system [J]. *International Journal Robust Nonlinear Control*, 1999, **9**(3): 183-198.
- [12] Laub A J. Computation of balancing transformations[C]//*Proceedings of the Joint Automatic Control Conference*. San Francisco, CA, USA, FA8-E, 1980.
- [13] Bartels R H, Stewart G W. Solution of the matrix equation $AX+XB=C$ [J]. *Communications*

- of the ACM*, 1972, **15**(9): 820-826.
- [14] 陈龙祥. 柔性结构振动的时滞反馈控制及其实验研究[D]. 博士学位论文. 上海: 上海交通大学, 2008. (CHEN Long-xiang. Delayed feedback control and experiment study of flexible structures[D]. PhD Dissertation. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2008. (in Chinese))
- [15] 韩京清, 袁露林. 跟踪微分器的离散形式[J]. 系统科学与数学, 1999, **19**(3): 268-273. (HAN Jing-qing, YUAN Lu-lin. The discrete form of tracking-differentiator[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 1999, **19**(3): 268-273. (in Chinese))
- [16] CHEN Long-xiang, CAI Guo-ping, PAN Ji. Experimental study of delayed feedback control for a flexible plate[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, **322**(4/5): 629-651.

Model Reduction and Active Control of a Flexible Beam Using Internal Balance Technique

XIE Yong, ZHAO Tong, CAI Guo-ping

(*Department of Engineering Mechanics, State Key Laboratory of Ocean Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, P. R. China*)

Abstract: The internal balance technique was effective for model reduction in flexible structures, especially ones with dense frequencies. However, due to the difficulty in extracting internal balance modal coordinates from physical sensor readings, research so far on this topic has been mostly theoretic and little on experiment or engineering applications. The internal balance method theoretically as well as experimentally was studied, and further an active controller based on the reduction model was designed. The research works on a DSP TMS320F2812-based experiment system with a flexible beam and brings forward an approximating approach to access internal balance modal coordinates. Simulation and test results have proven the proposed approximating approach feasible and effective, and the designed controller successful in restraining the beam vibration.

Key words: flexible beam; internal balance model reduction; active control; experiment