

# 静电场驱动下液体薄膜的几何形状\*

E·M·田, T·P·斯沃博德内, J·D·菲利普斯

(莱特州立大学 数学与统计学院,代顿,俄亥俄州 45435 美国)

摘要: 利用六边形-俯视图的弱非线性稳定性分析和数值仿真,在电场作用下,研究高分子薄膜表面静态模式的发展过程.在无限空间域上,空间和高分子薄膜之间的界面,由薄膜方程给出其随时间的演变,综合考虑了电力的驱动和表面张力的传播.非线性界面的增长包括:波幅方程的增长,以及在准对规律方向上,一维结构的叠合.模式的选择由亚临界不稳定性机理确定,高分子薄膜的相对厚度在其中起着决定性的作用.

关键词: 薄膜; 模式的形成; 电流体动力学不稳定性

中图分类号: O357.1 文献标志码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.08.008

## 引言

在现代平版印刷术的自感应组装工艺中,电流体动力学(EHD)的不稳定性起着决定性的作用<sup>[1-2]</sup>.在亚微米的长度数量级上,在导向性的形成中,将横向结构复制到高分子薄膜的表面上.在一个平坦的硅质基层上,覆盖着一层光滑的高分子薄膜,薄膜上方放置一个没有图案的屏蔽罩.在基层和屏蔽罩上外加一个电场,产生一个驱动力,用来平衡薄膜界面上的表面张力,出现一个长波长的扰动.在相似的临界值下,出现了这样的不稳定性,常在界面上观察到一个六边形次序为特征<sup>[2-3]</sup>的决定性模式.在模式形成的早期阶段,重力、分子引力和斥力的影响无关紧要,因此在该模型中忽略不计<sup>[3]</sup>.其物理构造可以用图1表示.

大量的分析成果是探究这种令人惊奇现象的机理<sup>[4-11]</sup>.线性稳定性分析发现,空隙与薄膜层之间的厚度比 $\xi$ ,在确定界面模式中起着决定性作用<sup>[12-14]</sup>.在电场驱动下的薄膜,绝对是不稳定的,在所有可能的二维模式中,六边形模式占有增长率优势(见文献[3]).

Tian 应用一维弱非线性稳定性分析,找到了可以清楚地看到模式时 $\xi$ 值的范围<sup>[9]</sup>.本文深入地研究出现六边形模式的条件,并检查该模式出现后,这种特殊的、周期性几何形状的稳定性的.文中用到的方法论是二维的、六边形-俯视图弱非线性稳定性分析.在上世纪60年代,

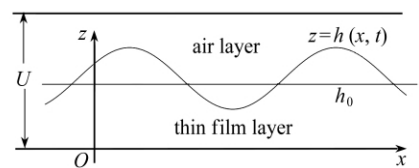


图1 物理构造: 常电位作用下, 两基层之间涂上一层薄膜

Fig. 1 The physical configuration of thin film coated in between two substrates, with a constant electric potential applied

\* 收稿日期: 2011-01-17; 修订日期: 2011-05-24

作者简介: Emily M. Tian, 副教授, 博士(联系人. E-mail: etian@math.wright.edu).

本文原文为英文, 黄雅意译, 张禄坤校.

研究热对流过程的六边形单元,是由 Segel 等<sup>[15-17]</sup>,Busse<sup>[18]</sup>和 Palm<sup>[19]</sup>等提出来的。后来被成功地应用到界面的研究中,如形成合金凝固图案、形成“图灵机”图案、形成自然薄膜图案等等<sup>[20-22]</sup>。

由于弱非线性相互作用,出现在一个不稳定的基本 Fourier 方式和一个稳定的二谐波之间,初始激励的指数增长,迅速地被非线性影响所抑制,同时,有限次谐波的波数达到一个临界值。一个调整的非线性修正项,取代了线性的指数增长;长波长的波动,从而被慢慢地演化成相对稳定的二维特征。这样的周期性有限波幅的扰动,能够带走临界波数附近的波,出现一个统一的波特特性场,显现在表面上方。规则的有限波幅模式是长时间固定的。当波幅最终接触到上方带电的基层时,分子力开始影响界面的几何形状,同时,由于子谐波的不稳定性,邻近的波在断断续续位置上结合,在其他的统一波场中,造成缺失的碎片<sup>[3, 23]</sup>。当  $t \rightarrow \infty$ , 出现在表面上的模式将渐渐地结合在一起,并遭受到“熵的丢失”;然而,本研究聚焦在重要的中间时段,即六边形占支配地位的时期。

就长波长来说,薄膜厚度  $z = h(x, y, t)$  随时间和空间的变化,可以由下面的薄膜方程来描述<sup>[20, 24]</sup>:

$$3\mu \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot [h^3 \nabla P] = 0, \quad (1)$$

在该方程中,  $\mu$  为聚合体材料的粘度常数,  $P$  为界面上的压力分布。在我们的模型中,压力  $P$  包括大气压、表面张力和静电压力<sup>[9, 25-26]</sup>:

$$P = p_0 - \gamma \nabla^2 h - \frac{\epsilon_0 \epsilon_p (\epsilon_p - 1) U^2}{2 [\epsilon_p d - (\epsilon_p - 1) h]^2}, \quad (2)$$

其中,  $\epsilon_0$  为真空的介电常数,  $\epsilon_p$  为高分子薄膜的介电常数,  $\gamma$  为表面张力系数,  $U$  为常静电势,  $d$  为两基层之间的距离。

对薄膜的长度和层厚,引入初始平均厚度  $h_0$ ,同时引入时间比例尺  $\mu h_0^2 / (\epsilon_0 U^2)$ ,将控制方程变为无量纲形式:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \alpha \nabla \cdot [H^3 \nabla (\nabla^2 H)] + \beta \nabla \cdot [H^3 (\epsilon_p \xi + \epsilon_p - (\epsilon_p - 1) H)^{-3} \nabla H] = 0, \quad (3)$$

其中,  $\alpha = \gamma d / [3\epsilon_0 U^2 (\xi + 1)] > 0$ ,  $\beta = \epsilon_p (\epsilon_p - 1)^2 / 3 > 0$ 。参数  $\xi = (d - h_0) / h_0$  为空隙与薄膜的厚度比,  $\xi$  值越大,表示空隙越大,因此,静电驱动力越弱,被认为不稳定性越弱。

在方程(3)的线性分析中,认为  $H$  在形式为  $H(x, t) - 1 \sim f(x, t) = A(t) \cos(kx)$  中扰动,用  $dA/dt \sim \sigma A$  描述其波幅函数,其中线性增长率  $\sigma$  如下给出:

$$\sigma = \beta (\epsilon_p \xi + 1)^{-3} k^2 - \alpha k^4. \quad (4)$$

临界波数  $k_c$  使线性增长率  $\sigma$  从正值向负值转变,由方程(4),可以确定如下:

$$k_c(\xi) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha (\epsilon_p \xi + 1)^3}}, \quad (5)$$

其中,  $\xi$  与  $\alpha$ ,  $\beta$  和  $\epsilon_p$  一样,为控制参数,并保持不变<sup>[9]</sup>。

当增长率  $\sigma$  取正值时,根据线性理论,波幅  $A(t)$  将随时间呈指数增长。实验观测显示,在一段较长的时间后,将得到一个简单,且高度规则的六边形模式。这种规律性是无法由线性指数增长理论得到的,必须考虑非线性的影响。希望通过模型方程的二维分析,对  $\xi$  在模式的形成和选择机理中的作用,提供一套完整的分析。

一维的弱非线性研究,归结为界面扰动这单一因素,增长率分析<sup>[9]</sup>可以通过下面的波幅

方程来考虑:

$$\frac{dA}{dt} \sim \sigma A - a_1 A^3 = -\frac{\partial V}{\partial A}, \tag{6}$$

其中

$$V = -\frac{1}{2}\sigma A^2 + \frac{1}{4}a_1 A^4 \tag{7}$$

表示波数  $k$  时的势能  $\sigma$  为其线性增长率, Landau 常数  $a_1$  衡量非线性对其的影响. 当势能  $V$  达到最小值, 波幅  $A$  达到非平凡平衡  $A_c^2 = \sigma/a_1$ , 当  $\sigma/a_1 > 0$  时为超临界稳定, 或者, 当  $\sigma/a_1 < 0$  时为亚稳定. 事实上, 由于 Landau 常数  $a_1$  通常为负值, 正如文献 [9] 中所指出的, 由于扰动, 初始平面界面 (当  $A = 0$  时) 通常是不稳定的, 因为开始阶段线性增长率  $\sigma$  为正值, 驱使高分子薄膜从不稳定平衡  $A = 0$  增长到下一个平衡  $A_c^2 = \sigma/a_1$ , 这里的  $\sigma$  转变成为负值. 由于  $a_1 < 0$ , 亚稳定性继续驱使一维结构, 使波幅  $A_c$  呈现出二维的特征<sup>[3, 20, 27]</sup>. Tian<sup>[9]</sup> 预测, 当厚度比  $\xi$  在 0.6 ~ 1 之间时, 出现最多的可分辨波 (临界长度  $\lambda_c = 2\pi/k_c$ ), 取文献 [8, 14] 中所使用的典型数值:  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ ,  $U = 70 \text{ V}$ ,  $\epsilon_p = 2.5$ ,  $\gamma = 3.8 \text{ mN/m}$ ,  $d = 100 \text{ nm}$ .

### 1 六边形单元的选择及其发展

若界面扰动  $H - 1 \sim f(x, y, t) = A(t) \cdot g(x, y)$  满足

$$g(x, y) = \cos[kx] + \cos\left[\frac{k}{2}(x + \sqrt{3}y)\right] + \cos\left[\frac{k}{2}(x - \sqrt{3}y)\right] = \cos[kx] + 2\cos\left[\frac{k}{2}x\right]\cos\left[\frac{\sqrt{3}k}{2}y\right], \tag{8}$$

则界面上出现明显的六边形特征, 如图 2 所示.

结果成为 3 个相互作用的、平面高低起伏的、六边形外貌的模式. 起伏结构朝着夹角彼此为  $2\pi/3$  的 3 个方向传播. 用 3 个波矢量  $k_i (i = 1, 2, 3)$  来表示这 3 个高低起伏结构; 其大小  $|k_i|$  均取其临界波数  $k_c$ , 其线性增长率  $\sigma$  趋于 0. 考虑到总波数相同, 对于这 3 个相互作用的扰动带, 假设给出线性理论相同的放大率<sup>[16]</sup>. 通过寻求薄膜方程 (3) 的六边形-俯视图解, 可以发现非线性的相互作用, 其一阶形式满足:

$$H(x, y, t) - 1 \sim f(x, y, t) = A_1(t) \cos[k_c x + \phi_1(t)] + A_2(t) \cos\left[\frac{k_c}{2}(x + \sqrt{3}y) - \phi_2(t)\right] + A_3(t) \cos\left[\frac{k_c}{2}(x - \sqrt{3}y) - \phi_3(t)\right], \tag{9}$$

其中,  $A_i$  为起伏的波幅,  $\phi_i$  为起伏的相位差, 它们都是相互作用引起的. 我们认为在模式形成过程中, 相位的变化非常细微, 从而, 所有的相位函数  $\phi_i$  都可以取为 0. 于是知道, 六边形单元的出现, 即达到平衡, 3 个起伏的波幅方程满足关系式  $A_1 = A_2 = A_3$ . 可以在方程 (9) 中自然地引入变换  $A_2 = A_3 = B_1/2$ , 进一步将表面扰动函数  $f(x, y, t)$  简化为

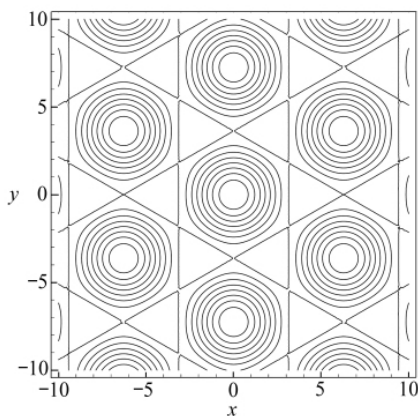


图 2 对称六边形的等值线视图  
Fig. 2 Contour view of the hexagonal symmetry

$$f(x, y, t) = A_1(t) \cos(k_c x) + B_1(t) \cos\left(\frac{1}{2}k_c x\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_c y\right). \quad (10)$$

波幅  $A_1$  和  $B_1$  由下列方程所控制:

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \sigma A_1 - a_0 B_1^2 - A_1(a_1 A_1^2 + a_2 B_1^2), \\ \frac{dB_1}{dt} = \sigma B_1 - 4a_0 A_1 B_1 - B_1\left[2a_2 A_1^2 + \frac{1}{4}(a_1 + 2a_2) B_1^2\right], \end{cases} \quad (11)$$

其中,  $\sigma$  和  $a_1$  与一维分析所给出的值相一致;  $a_0$   $a_2$  为可计算系数, 也可以看作 Landau 常数. 对于方程(11)的更加详细情况, 可以参见 Scanlon<sup>[15]</sup>, Segel<sup>[16]</sup> 和 Davis<sup>[28]</sup> 的相关文献.

为了确保  $dA_1/dt$  和  $dB_1/dt$  关系  $A_1$  和  $B_1$  的幂次展开式收敛, 认为  $A_1$  和  $B_1$  值不大, 要求一次项和二次项系数  $\sigma$  和  $a_0$  也不大. 在这种情况下, 完全可以略去方程(11)的3阶及其更高阶的项.

非线性波幅的变化, 描绘出了高低起伏间的竞争及其六边形结构的形态, 形成一个相对稳定的模式. 作为竞争的结果, 允许波幅方程(11)有两个非平凡平衡:

(I)  $A_1^2 = \sigma/a_1$ ,  $A_2 = A_3 = 0$ , 一个二维起伏特征(与一维起伏对应)的模式;

(II<sup>±</sup>)  $A_1 = A_2 = A_3 = \{-2a_0 \pm [4a_0^2 + (a_1 + 4a_2)\sigma]^{1/2}\}/(a_1 + 4a_2)$ , 一个单独的、六边形包装的结构: 被压低的边界然后向着中心依次上升的“堆”(II<sup>+</sup>), 或者, 被抬高的边界然后向中心依次下降的“坑”(II<sup>-</sup>).

Landau 常数按  $a_0 = 0$   $a_2 = a_1$  计算, 将界面函数  $f(x, y, t)$ <sup>[22]</sup> 的3阶展开式代入方程(3), 而  $\sigma$  和  $a_1$  仍保持与一维展开式相同; 特别地,

$$a_1(\xi) = \frac{3}{4}k_c^4 \alpha - \frac{3(\epsilon_p \xi + \epsilon_p)(\epsilon_p \xi + 2\epsilon_p - 1)\beta k_c^2}{4(\epsilon_p \xi + 1)^5} + \left(\frac{21}{2}k_c^4 \alpha - \frac{3k_c^2 \beta(\epsilon_p \xi + \epsilon_p)}{2(\epsilon_p \xi + 1)^4}\right) \frac{3\beta(\epsilon_p \xi + \epsilon_p) - 3k_c^2 \alpha(\epsilon_p \xi + 1)^4}{14k_c^2 \alpha(\epsilon_p \xi + 1)^4 - 2\beta(\epsilon_p \xi + 1)}. \quad (12)$$

形成稳定的轨道模式, 意味着平面中解集的成员能够彼此互换, 但是不能够从一个不同的解集增长或衰减<sup>[21]</sup>到另一个解式. 每一个独立平衡状态(I)或(II<sup>±</sup>)稳定条件的检查, 需要考虑这些平衡状态时, 波幅方程(11)右边函数的 Jacobi 矩阵的本征值.

假设波幅方程的二次项可以不计, 达到平衡状态(I)时, 方程(11)的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -2\sigma & 0 \\ 0 & \sigma - 2\frac{a_2\sigma}{a_1} \end{pmatrix},$$

其两个本征值为  $\lambda_1 = -2\sigma$   $\lambda_2 = -\sigma$ . 考虑到演变至后面阶段时  $\sigma < 0$ , 我们可以推断, 平衡状态(I)的两个本征值都是正的, 因此该平衡状态是不稳定的, 同时, 横向起伏的模式在线性增长后将进入衰减. 这个结果与一维分析的结论是一致的.

另一个平衡状态(II<sup>±</sup>)的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} \frac{-2a_1\sigma}{a_1 + 4a_2} & \frac{-4a_2\sigma}{a_1 + 4a_2} \\ \frac{-8a_2\sigma}{a_1 + 4a_2} & \frac{(-2a_1 - 4a_2)\sigma}{a_1 + 4a_2} \end{pmatrix},$$

其本征值为  $\lambda_1 = -2\sigma$  和  $\lambda_2 = 2\sigma/5$ ; 因此  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ , 平衡状态(II<sup>±</sup>)为半稳定的鞍点. 当  $\sigma$

由正值向负值转变时,亚临界不稳定性驱使六边形模式的出现.最终,该模式进入长时间的衰减状态.当然也有研究报告称,由于 EHD 影响,周期排列结构是不稳定的,正像邻近连续接合的柱子.柱子的平均尺寸保持增长<sup>[2-3]</sup>.实验表明,平衡状态( $\Pi^*$ )的不稳定性仅出现在允许超长的重结晶时间.同时,初始的薄膜深度足够大.详情参见文献[10].本文没有对超长时间后的发展情况进行研究,但可以在后续的研究中进行检查.

## 2 数值解

就完全模型方程(3)进行数值计算,进一步确定  $\xi$  的分类,检查六边形模式的外观及其稳定性.采用显式保守的有限差分法,时间按一阶 Euler 前进格式,空间按二阶离散.计算区域选为  $[-5\pi, 5\pi] \times [-5\pi, 5\pi]$ ; 空间网格尺寸取为  $h \approx 0.25$ , 以保持一个清晰的分辨率; 为了确保随时间的稳定性,步长取为  $k \leq h^3/2$ . 假设周期性的边界条件.初始条件为  $u(x, 0) = c_1 u_1 + c_2 u_2$ , 其中  $\mu_1(x, 0) = \epsilon \cdot \cos(x)$ ,  $\mu_2(x, 0) = \epsilon \cdot \text{rand}$ , 且  $\epsilon \ll 1$ . 产生并保存一个随机的噪声,使得所有的仿真计算,都以它为初始条件运行,有助于分离出变量  $\xi$  对解的确切影响.

采用无量纲时间  $t \approx 1000$  进行计算,在 3 个不同的数值下:  $\xi = 0.3$  表示初始薄膜深度较厚;  $\xi = 0.6$  和  $\xi = 1$  表示初始薄膜深度较薄,密切观察模式的生成.对于每一个  $\xi$  值,图 3 ~ 图 5 分别给出了俯视的快速摄影图(左列)及其侧视图(右列).

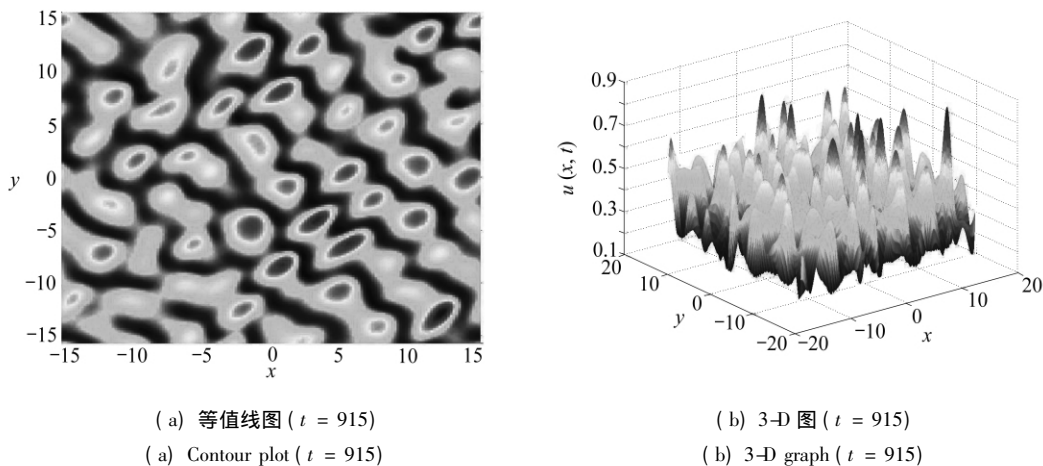


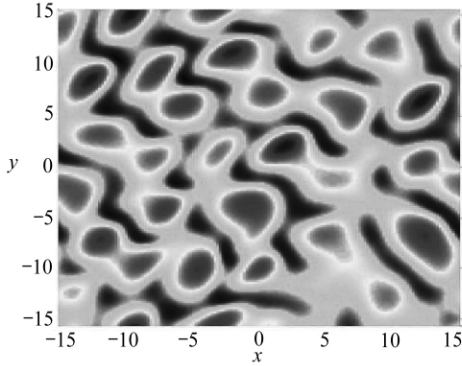
图 3 当  $\xi = 0.3$ 、随机噪声作为初始条件时,薄膜界面的二维仿真

(当无量纲时间  $t = 915$  时,计算终止;此后图像并没有任何重大变化)

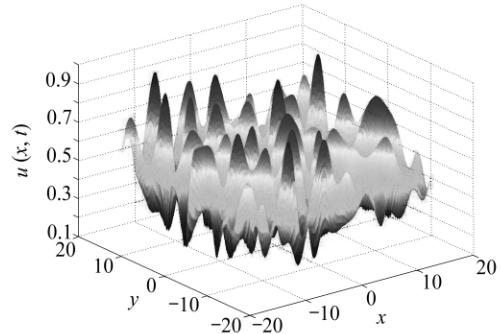
Fig. 3 Two dimensional simulation of the thin film interface with a random noise as initial condition when  $\xi = 0.3$  (the calculation is turned off at the dimensionless time  $t = 915$ ; the graph doesn't experience any significant changes thereafter)

检查解随时间的变化,对所有的  $\xi$  值,它们有着某些相似的行为.在最初少数时间步长内,随意的初始条件,都收敛于一个光滑解.因而,当  $0 \leq t \leq 500$  时,收敛于彼此分离的波峰和波谷,然后外形在收缩而数值在增长,当  $t \approx 500$  时,其解收敛于一个更为稳定的解.此时,出现有构成规律的外形.当  $t > 500$  后,波峰依然在增大,而外形有略微的收缩,但是,它们的构成规律依然保持相当稳定.

当  $\xi = 0.3$  和  $\xi = 0.6$  时,给出了一个非常规律的、外表面六边形包装的堆.当  $\xi = 1$  时,显然,不仅波峰少得多,而且所有波峰的峰值高度明显地下降了.对于给定的一个  $\xi$  值,若将最大峰值高度记为  $\nu(\xi)$ , 则  $\nu(0.3) \approx 0.72$ ,  $\nu(0.6) \approx 0.85$ ,  $\nu(1) \approx 0.56$ .



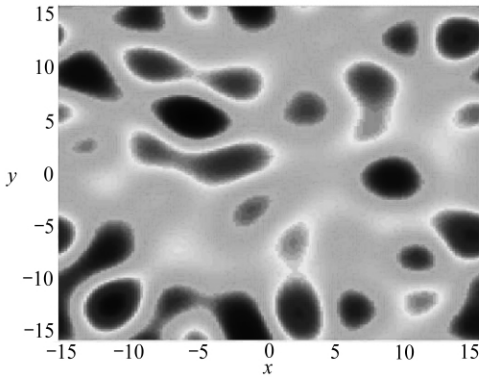
(a) 等值线图 ( $t = 907$ )  
(a) Contour plot ( $t = 907$ )



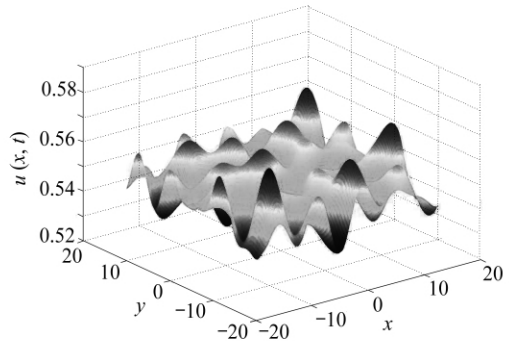
(b) 3-D 图 ( $t = 907$ )  
(b) 3-D graph ( $t = 907$ )

图 4 另一组薄膜演变仿真 ( $\xi = 0.6$ ) 图: 高分子薄膜上方的空隙比前一组更大, EHD 影响较前一组减弱, 初始条件与前一组相同

Fig. 4 Another set of simulations of the thin film evolution for  $\xi = 0.6$ , when the EHD effect is weaker than the previous set due to a larger air gap above the polymer film ( it has the same initial condition as the last case)



(a) 等值线图 ( $t = 933$ )  
(a) Contour plot ( $t = 933$ )



(b) 3-D 图 ( $t = 933$ )  
(b) 3-D graph ( $t = 933$ )

图 5 最后一组二维仿真 ( $\xi = 1$ ) 图: 在这 3 组中受 EHD 的影响最弱, 可辨别的特征最小, 波幅最小, 尽管某些规律依然存在

Fig. 5 The last set of two dimensional simulations for the value of  $\xi = 1$  ( the EHD is the weakest among the three sets; it produces the least distinguishable features; the amplitudes are smallest, though some regularity still exists)

### 3 结论及其讨论

本文借助于六边形-俯视图的弱非线性稳定性分析, 结合数值仿真, 解析地研究了静电场对薄膜模式形成过程的非线性影响. 焦点集中在, 探索厚度比  $\xi$  与界面几何形状之间的关系. 数值仿真揭示了这样的事实: 经过一段相当长的时间之后, 形成周期性变化的六边形模式, 与解析的预测符合得很好. 亚临界的不稳定性, 驱动界面特征有规律地发展. 当峰值触及到上方基层和下方基层时, 分子力成为影响亚稳定模式进一步发展的重要原因, 因而在整个研究模型中, 尚需作进一步的探索.

致谢 作者感谢 William B. Russel 教授在实验方面给予富有成效的讨论。

参考文献:

- [1] Chou S Y , Zhuang L. Lithographically induced self-assembly of periodic polymer micropillar arrays [J]. *J Vac Sci Technol B* ,1999 ,**17**( 6) : 3197-3202.
- [2] Schäffer E , Thurn-Albrecht T , Russell T P , Stelner U. Electrically induced structure formation and pattern transfer [J]. *Nature* ,2000 ,**403**: 874-877.
- [3] Wu N , Russel W B. Electric-field-induced patterns in thin polymer films: weakly nonlinear and fully nonlinear evolution [J]. *Langmuir* ,2005 ,**21**( 26) : 12290-12302.
- [4] Kim D , Lu W. Interface instability and nanostructure patterning [J]. *Computational Materials Science* ,2006 ,**38**( 2) : 418-425.
- [5] Lin Z Q , Kerle T , Baker S M , Hoagland D A. Electric field induced instabilities at liquid/liquid interfaces [J]. *Journal of Chemical Physics* ,2001 ,**114**( 5) : 2377-2381.
- [6] Pease L F III , Russel W B. Electrostatically induced submicron patterning of thin perfect and leaky dielectric films: a generalized linear stability analysis [J]. *Journal of Chemical Physics* , 2003 ,**118**( 8) : 3790-3803.
- [7] Pease L F III , Russel W B. Limitations on length scales for electrostatically induced submicrometer pillars and holes [J]. *Langmuir* ,2004 ,**20**( 3) : 795-804.
- [8] Schäffer E , Thurn-Albrecht T , Russell T P , Stelner U. Electrohydrodynamic instabilities in polymer films [J]. *Europhysics Letters* ,2001 ,**53**( 4) ,518-524.
- [9] Tian E M. Pattern formation induced by an electric field in thin liquid films [J]. *Journal of Mathematics , Statistics , and Allied Fields* ,2007 ,**1**( 1) : 1-6.
- [10] Wu N , Russel W B. Micro- and nano-patterns created via electrohydrodynamic instabilities [J]. *Nano Today* ,2009 ,**4**( 2) : 180-192.
- [11] Yeoh H K , Xu Q , Basaran O A. Equilibrium shapes and stability of a liquid film subjected to a nonuniform electric field [J]. *Physics of Fluids* ,2007 ,**19**( 11) : 114111.
- [12] Pease L F III , Russel W B. Linear stability analysis of thin leaky dielectric films subjected to electric fields [J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* ,2002 ,**102**( 2) : 233-250.
- [13] Shanker V , Sharma A. Instability of the interface between thin fluid films subjected to electric fields [J]. *Journal of Colloid and Interface Science* ,2004 ,**274**( 1) : 294-308.
- [14] Verma R , Sharma A , Kargupta K , Bhaumik J. Electric field induced instability and pattern formation in thin liquid films [J]. *Langmuir* ,2005 ,**21**( 8) : 3710-3721.
- [15] Scanlon J W , Segel L A. Finite amplitude cellular convection induced by surface tension [J]. *J Fluid Mech* ,1967 ,**30**( 1) : 149-162.
- [16] Segel L A , Stuart J T. On the question of the preferred mode in cellular thermal convection [J]. *J Fluid Mech* ,1962 ,**13**( 2) : 289-306.
- [17] Segel L A. The nonlinear interaction of a finite number of disturbances to a layer of fluid heated from below [J]. *J Fluid Mech* ,1965 ,**21**( 2) : 359-384.
- [18] Busse F H. The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle [J]. *J Fluid Mech* ,1967 ,**30**( 4) : 625-649.
- [19] Palm E. Nonlinear thermal convection [J]. *Ann Rev Fluid Mech* ,1975 ,**7**: 39-61.
- [20] Tian E M , Wollkind D J. Nonlinear stability analyses of pattern formation in thin liquid films [J]. *Interfaces and Free Boundaries* ,2003 ,**5**: 1-25.
- [21] Wollkind D J , Sriranganathan R , Oulton D B. Interfacial patterns during plane front alloy so-

- lidification [J]. *Physica D* ,1984 ,**12**( 1/3 ) : 215-240.
- [22] Wollkind D J , Stephenson L E. Chemical turing pattern formation analyses: comparison of theory with experiment [J]. *SIAM J Appl Math* ,2000 ,**61**( 2) : 387-431.
- [23] Chang H C. Wave evolution on a falling film [J]. *Annu Rev Fluid Mech* ,1994 ,**26**: 103-36.
- [24] Oron A , Davis S H , Bankoff S G. Long-scale evolution of thin liquid films [J]. *Reviews of Modern Physics* ,1997 ,**69**( 3) : 931-980.
- [25] Landau L D , Lifshitz E M. *Electrodynamics of Continuous Media* [M]. New York: Pergamon Press ,1960.
- [26] Saville D A. Electrohydrodynamics: the Taylor-Melcher leaky dielectric model [J]. *Annu Rev Fluid Mech* ,1997 ,**29**: 27-64.
- [27] Zaks M A , Auer M , Busse F H. Undulating rolls and their instabilities in a Rayleigh-Benard layer [J]. *Physical Review E* ,1996 ,**53**( 5) : 4807-4819.
- [28] Davis S H. Thermocapillary instabilities [J]. *Ann Rev Fluid Mech* ,1987 ,**19**: 403-435.

## Thin Liquid Film Morphology Driven by Electro-Static Field

Emily M. Tian , Thomas P. Svobodny , Jason D. Phillips  
( *Department of Mathematics and Statistics , Wright State University ,  
Dayton , OH 45435 , USA* )

**Abstract:** The development of stationary patterns on a thin polymer surface subject to an electric field was studied by means of a hexagonal-planform weakly nonlinear stability analysis and numerical simulations. The time evolution of the interface between air and polymer film on the unbounded spatial domain was described by the thin film equation , incorporating the electric driving force and the surface diffusion. The nonlinear interfacial growth includes the amplitude equations and superposition of one-dimensional structures at regular orientations. The pattern selection is driven by the subcritical instability mechanism in which the relative thickness of the polymer film plays a critical role.

**Key words:** thin film; pattern formation; electrohydrodynamic instability