

# 磁场、多孔性和各向异性动脉壁有多处狭窄段时对血液流动的影响\*

Kh·S·梅克赫默<sup>1</sup>, M·H·哈劳恩<sup>2</sup>, M·A·艾可特<sup>3</sup>

- (1. 阿兹哈尔大学 理学院 数学系,开罗 11884,埃及;
2. 艾因·夏姆斯大学 教育学院 数学系,开罗 11566,埃及;
3. 苏伊士运河大学 理学院 数学系,苏伊士 41522,埃及)

**摘要:** 建立一个血液流动的数学模型:多孔介质在磁场作用下,血液流过一段有多处狭窄段的弹性动脉;用一个各向异性的弹性圆柱形管道模拟动脉,用粘性不可压缩的导电液体表示血液,动脉有轻微的局部性狭窄,形成一段内腔局部变窄的动脉,并完成该模型的数学分析.详细阐述了血管壁参数对血液流动的影响,参数包括纵向和圆周向的粘弹性应力分量  $T_l$  和  $T_\theta$ 、血管壁的各向异性度  $\gamma$ 、血管及其周边结缔组织的总质量  $M$ 、完全栓管中粘性约束的贡献  $C$  和弹性约束的贡献  $K$ ,并用图形表示壁面剪切应力的分布、径向和轴向的速度等.还研究了狭窄形状参数  $m$ 、渗透率常数  $\kappa$ 、Hartmann 数  $Ha$  和血管狭窄区的最大高度  $\delta$ ,对血液流动特征的影响.研究表明,流动受到周边结缔组织(动脉壁运动)的影响式微,血管壁的各向异性度,是确定动脉材料的一个重要指标.进一步发现壁剪切力分布,随着  $T_l$  和  $\gamma$  的增加而增加,随着  $T_\theta, M, C$  和  $K$  的增加而减少.壁面剪切应力分布的传播,以及壁面处阻力阻抗的传播,栓管与自由管相比要低得多;狭窄段咽喉处的剪切应力分布特性,完全栓管和自由管正相反.靠近中心线的俘获区大小,随着渗透率  $\kappa$  的增加而增大;随着 Hartmann 数  $Ha$  的增加而减小.最后,狭窄段非对称时,逐渐形成俘获区;狭窄段对称时,不出现俘获区,各向同性自由管(无初始应力)中俘获区的大小,比完全栓管中的小得多.

**关键词:** 狭窄; 各向异性; 自由管; 栓管; 俘获区

**中图分类号:** R318.01; R543.5; O361.3 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.08.009

## 引 言

哺乳动物动脉变窄是一个普遍现象,多年来专家们尝试从实验和理论上建立起狭窄动脉血液流动的模型.众所周知,血管系统疾病是导致西方世界人口死亡的主要原因.虽然疾病的起源并不清楚,但有一个共识:流体动力学因素将在疾病的形成和扩散中扮演着重要的角色.动脉壁中胆固醇的沉积和结缔组织的扩张,动脉斑块的增厚,限制了血液的流动.动脉硬化或动脉变窄,意味着身体中某处循环管道(不管是管道中或管道口)正在逐渐变窄.因而管道壁的不同部位,出现不正常或非自然的增厚,导致了心血管系统的疾病.

\* 收稿日期: 2010-09-16; 修订日期: 2011-04-10

作者简介: Kh. S. Mekheimer, 教授,博士(联系人. E-mail: kh\_mekheimer@yahoo.com).

本文原文为英文,海治译,张禄坤校.

为了对该病的发展过程有一个全面了解,对血管壁的力学性质,连同血液流动性质的准确了解是非常必要的.因此,相关信息被认为有助于对心血管疾病进行治疗,也有助于生物医学工程人员,设计和制造出更加完善的人造器官.或许理论调查还不完全了解导致动脉非正常生长的确切原因,但是通过狭窄区血液流动性质的研究,可以确定它对心血管系统造成怎样的影响.尽管这样一个生理学问题的纯力学模型在应用上有着明显的局限性,血管流变学和血液动力学因素在狭窄动脉进展中起着支配作用<sup>[1]</sup>.最近,Mekheimer 等<sup>[2]</sup>研究了感应磁场,对存在重叠狭窄区的、各向异性的、锥形的弹性动脉,进行了血液流动影响的研究.

若将磁场作用在导电流体上,会产生感应电磁场.电磁场的相互作用产生一种称为 Lorentz 力的体力,Lorentz 力具有阻碍液体流动特性的倾向<sup>[3]</sup>.Stud 等<sup>[4]</sup>研究了磁场运动对血液流动的影响,发现适当的磁场运动会加速血液的流动速度.Agrawal 和 Anwaruddin<sup>[5]</sup>研究了磁场对血液流动的影响,他们建立了一个简单的数学模型:血液在一个柔性壁的等分叉通道中流动,柔性壁产生蠕动波,应用长波长近似法并观察有疾病动脉中血液的流动,如象动脉狭窄或硬化疾病,在执行心脏手术时,可以将磁场的影响作为一个血液泵.生物力学问题引起了许多专家的研究<sup>[6-8]</sup>,最近几年相关问题的重要研究结果可见参考文献[9-18],对在磁场作用下,多处狭窄段的动脉理论研究也可见参考文献[19-22].

本文在外部磁场作用下的多孔介质中,Newton 流体(作为一个血液模型)流过多处狭窄段的弹性动脉时,研究动脉壁参数对流动的影响.本文的分析对了解核磁共振造影(MRA)有帮助,MRA 是动脉硬化的放射性调查方法之一.当身体作核磁共振成像(MRI)检查时,本研究对评估狭窄段动脉壁的多孔性有帮助.

### 1 问题的公式化

考虑粘性、不可压缩、导电的 Newton 流体,粘度为  $\mu$ ,密度为  $\rho$ ,流过一个有着多处狭窄段,长度  $L$  有限的多孔介质管道.将管道材料看作各向异性的粘弹性体,系统承受有一个常量磁场作用.令  $(r, \theta, z)$  为圆柱极坐标中一个质点的坐标,其中  $z$  轴表示动脉的轴向, $r$  和  $\theta$  分别表示径向和圆周向.多处狭窄的几何形状用数学表示为

$$R(z) = \begin{cases} a[1 - a_1(s_l^{m-1}(z - d_l) - (z - d_l)^m)], & d_l \leq z \leq d_l + s_l, \\ a, & \text{其它,} \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $m \geq 2$  为形状参数,决定变窄剖面的形状( $m = 2$  表示狭窄段对称),  $a$  为无狭窄区的正常动脉半径常数, $s_l$  为狭窄段长度, $d_l$  标明了狭窄段的位置,其中  $l = 1, 2, 3, \dots, n$  (见图 1).

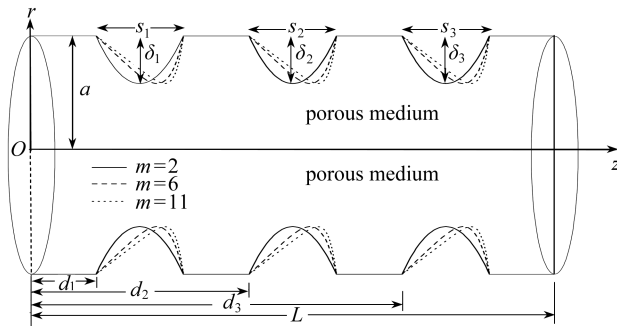


图 1 有多处狭窄段动脉的几何模型  
Fig. 1 The geometry of the multi stenosed artery

参数  $a_1$  由下式给出:

$$a_1 = \frac{\delta_l}{a s_l^m} \frac{m^{m/(m-1)}}{m-1}, \quad (2)$$

其中,  $\delta_l$  表示狭窄段位于  $z = a + s_l/m^{1/(m-1)}$  处的最大高度, 狭窄段高度和正常动脉半径的比远小于 1.

控制方程包括:

连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (3)$$

动量方程

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{\mu}{\kappa} \mathbf{V}, \quad (4)$$

广义 Ohm 定理

$$\mathbf{J} = \sigma [\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}], \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{B}$  为总感应磁场矢量,  $\mathbf{V}$  为速度矢量,  $\mathbf{E}$  为电场强度矢量,  $\mathbf{J}$  为电流密度矢量,  $\sigma$  为流体的导电率,  $\kappa > 0$  为渗透率常数.

现在假设速度矢量为  $\mathbf{V} = (u, 0, w)$ , 均匀磁场  $\mathbf{B} = (0, B_0, 0)$ , 其中, 磁通量密度  $B_0$  为常量, 沿着  $\theta$  方向作用.

控制方程可表示为

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) - \left( \sigma B_0^2 + \frac{\mu}{\kappa} \right) u, \quad (7)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \left( \sigma B_0^2 + \frac{\mu}{\kappa} \right) w, \quad (8)$$

其中,  $u$  和  $w$  分别为径向和轴向的速度分量,  $p$  为压力.

在内力、表面力以及(表示周边组织反作用的)约束力的作用下, 动脉壁面运动的控制方程为<sup>[1, 23-25]</sup>

$$\begin{aligned} & (T_t - T_\theta) \frac{dR}{dz} + R \frac{\partial T_t}{\partial z} - \\ & R \left[ M_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + C_l \frac{\partial \xi}{\partial t} + K_l \xi + \left( M_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + C_r \frac{\partial \eta}{\partial t} + K_r \eta \right) \frac{dR}{dz} \right] + \\ & \frac{R}{[1 + (dR/dz)^2]^{1/2}} \left[ \frac{\partial R}{\partial z} (T_{zz} - T_{rr}) + \left( \left( \frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 - 1 \right) T_{rz} \right]_{R-h/2} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{T_\theta}{R} \left[ 1 + \left( \frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1/2} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \frac{T_t}{[1 + (\partial R/\partial z)^2]^{3/2}} - \\ & \frac{1}{[1 + (\partial R/\partial z)^2]^{1/2}} \left[ \frac{\partial R}{\partial z} \left( M_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + C_l \frac{\partial \xi}{\partial t} + K_l \xi \right) - \left( M_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + C_r \frac{\partial \eta}{\partial t} + K_r \eta \right) \right] - \\ & \frac{1}{1 + (\partial R/\partial z)^2} \left[ 2 \frac{\partial R}{\partial z} T_{rz} - T_{rr} - \left( \frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 T_{zz} \right]_{R-h/2} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

式中,  $M_0 = \rho_0 h + M_a$ ,  $\rho_0$  和  $h$  分别为动脉壁的密度和厚度.  $(\xi, \eta)$  分别为血管壁沿轴向和径向的位移分量.  $(T_t, T_\theta)$  分别为作用在纵向和圆周向的粘弹性应力分量.  $K_l$  和  $C_l$  分别表示栓管中纵向(每单位面积的)弹性系数和摩擦阻尼系数,  $K_r$  和  $C_r$  分别表示栓管中径向(每单位面积的)弹性系数和摩擦阻尼系数,  $M_a$  为力学模型的附加质量.

对于线性正交弹性材料,根据弹性力学中轴对称变形关系得到<sup>[25]</sup>:

$$T_\theta - T_{\theta 0} = B_{11} \frac{\eta}{a} + B_{12} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad (11)$$

$$T_l - T_{l0} = B_{21} \frac{\eta}{a} + B_{22} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad (12)$$

其中,  $(T_{l0}, T_{\theta 0})$  分别为初始粘弹性应力的纵向和圆周向分量,  $B_{ij}$  为圆周向和纵向上的刚度系数. 对于一个无初始应力的壳体, 有  $B_{12} = B_{21}$ ; 另一方面, 对于一个有初始应力的壳体, 系数  $B_{ij}$  依赖于初始应力, 一般情况下,  $B_{12} \neq B_{21}$ . 因而, 为了描述有初始应力的正交壳体的弹性特征, 需知道 4 个独立常数<sup>[26]</sup>.

系数  $B_{ij}$  的定义如下:

$$B_{11} = \frac{E_\theta h}{1 - \sigma_\theta \sigma_l}, \quad B_{12} = \frac{E_\theta h \sigma_l}{1 - \sigma_\theta \sigma_l}, \quad (13)$$

$$B_{21} = \frac{E_l h \sigma_\theta}{1 - \sigma_\theta \sigma_l}, \quad B_{22} = \frac{E_l h}{1 - \sigma_\theta \sigma_l}, \quad (14)$$

其中,  $E_\theta, E_l$  分别为圆周向和纵向上的弹性模量,  $\sigma_\theta$  和  $\sigma_l$  为相应的 Poisson 比.

引入比值:

$$\gamma_1 = \frac{E_l}{E_\theta}, \quad \gamma_2 = \frac{\sigma_l}{\sigma_\theta}, \quad (15)$$

其中,  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  表示血管壁的各向异性度. 对于无初始应力的壳体  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ .

边界条件

(i) 动脉壁的速度边界条件

$$u(r, z, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad w(r, z, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \text{在 } r = R(z) \text{ 上}; \quad (16)$$

(ii) 在对称轴上, 速度的正交分量和轴向速度的梯度不出现, 其数学表达式为

$$u(r, z, t) = 0, \quad \frac{\partial w(r, z, t)}{\partial r} = 0, \quad \text{在 } r = 0 \text{ 上}. \quad (17)$$

## 2 求解方法

控制流体运动和动脉壁面运动的方程均为非线性方程. 尝试将这些方程线性化, 以期简化问题. 首先, 将这些方程中所有的因变量, 在问题的一个已知解附近, 根据小参数  $\epsilon = \delta/a$  项, 展开为幂级数, 即静止解, 其中  $\delta = \max \{ \delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n \}$ . 参数  $\epsilon$  的选取方法如下: 当  $\epsilon = 0$  时, 问题的所有因变量简化为它们的已知解. 因变量的展开公式如下:

$$\begin{cases} u = u_1 \epsilon + u_2 \epsilon^2 + \dots, \\ w = w_1 \epsilon + w_2 \epsilon^2 + \dots, \\ p = p_0 + p_1 \epsilon + u_2 \epsilon^2 + \dots, \\ \xi = \xi_1 \epsilon + \xi_2 \epsilon^2 + \dots, \\ \eta = \eta_1 \epsilon + \eta_2 \epsilon^2 + \dots, \\ R = R_0 + R_1 \epsilon + R_2 \epsilon^2 + \dots, \\ T_\theta = T_{\theta 0} + T_{\theta 1} \epsilon + T_{\theta 2} \epsilon^2 + \dots, \\ T_l = T_{l0} + T_{l1} \epsilon + T_{l2} \epsilon^2 + \dots, \end{cases} \quad (18)$$

其中,  $p_0$  和  $R_0(=a)$  为常量, 定义了系统的初始状态. 为了方程线性化, 计算任一函数  $f(r, z, t)$  在  $r = R(z) - h/2$  上的值, 使用 Taylor 定理按  $\epsilon$  幂级数展开, 得到

$$f(r, z, t) \Big|_{r=R(z)-h/2} = f_0(a, z, t) + \epsilon \left[ f_1(a, z, t) + R_1(z) \frac{\partial f_0(a, z, t)}{\partial r} \right] + O(\epsilon^2). \quad (19)$$

将方程(18)和(19)代入动脉壁面运动的控制方程、流动的控制方程以及边界条件, 然后让相应  $\epsilon$  同次幂的系数相等.

由方程(6)~(10)的零阶近似, 可得

$$\frac{dp_0}{dr} = 0, \quad \frac{dp_0}{dz} = 0, \quad p_0 = \frac{T_{\theta 0}}{a}. \quad (20)$$

由方程(6)~(10)的一阶近似和边界条件(16)~(17), 可得如下公式:

$$\rho \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \left( \frac{\sigma B_0^2}{\mu} + \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{r^2} \right) u_1 \right], \quad (21)$$

$$\rho \frac{\partial w_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial z} + \mu \left[ \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \left( \frac{\sigma B_0^2}{\mu} + \frac{1}{\kappa} \right) w_1 \right], \quad (22)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{u_1}{r} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \quad (23)$$

$$M_0 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} + C_l \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + K_l \xi_1 = -\mu \left( \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \Big|_{r=a} + \frac{\partial \eta_1}{\partial z} \left( \frac{T_{i0} - T_{\theta 0}}{a} \right) + \frac{E_t h}{1 - \sigma_\theta \sigma_t} \left( \frac{\sigma_\theta}{a} \frac{\partial \eta_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z^2} \right), \quad (24)$$

$$M_0 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} + C_r \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + K_r \eta_1 = \left( p_1 - 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} + \frac{\eta_1}{a^2} T_{\theta 0} + T_{i0} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial z^2} - \frac{E_\theta h}{a(1 - \sigma_\theta \sigma_t)} \left( \frac{\eta_1}{a} + \sigma_t \frac{\partial \xi_1}{\partial z} \right), \quad (25)$$

$$u_1 \Big|_{r=a} = \frac{\partial \eta_1}{\partial t}, \quad w_1 \Big|_{r=a} = \frac{\partial \xi_1}{\partial t}, \quad (26)$$

$$u_1 \Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0. \quad (27)$$

可以发现, 血液运动方程(24)和(25), 通过速度梯度和压力项耦合在一起. 因此, 先寻求方程(21)~(23)的解, 可能会更方便些.

假设血液流过动脉段是按谐波传播, 立即可以写出:

$$\begin{cases} u_1 = u_1(r) \exp[\phi t - \beta z], \\ w_1 = w_1(r) \exp[\phi t - \beta z], \\ p_1 = p_1(r) \exp[\phi t - \beta z], \end{cases} \quad (28)$$

其中,  $\phi = i\omega$ ,  $\beta = i\omega/c$ .  $\omega$  表示受迫振动的角频率,  $c$  表示波的传播速度, 假设波均为  $t$  和  $z$  的谐和函数.

与方程(28)对应的方程(21)~(23)的一般解可表示为

$$u_1 = \left[ A_1 J_1(\Omega r) + \frac{\alpha \beta J_1(\beta r)}{\Omega^2 - \beta^2} \right] \exp(\phi t - \beta z), \quad (29)$$

$$w_1 = \left[ A_2 J_0(\Omega r) + \frac{\alpha \beta J_0(\beta r)}{\Omega^2 - \beta^2} \right] \exp(\phi t - \beta z), \quad (30)$$

$$p_1 = [-\alpha \mu J_0(\beta r)] \exp(\phi t - \beta z), \quad (31)$$

其中,  $A_1$  和  $A_2$  为积分常数,

$$\Omega = \sqrt{\beta^2 - \alpha}, \quad \alpha = \frac{\phi}{\nu} + \frac{Ha^2}{a^2} + \frac{1}{\kappa}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho},$$

$Ha^2 = \sigma B_0^2 a^2 / \mu$  为 Hartmann 数(大于  $\sqrt{2}$  更合适),  $J_0(x)$  和  $J_1(x)$  分别表示零阶和一阶的第一类 Bessel 函数.

类似地,由方程(28)表示的受迫谐振动方程(24)和(25)的解,可以假设为

$$\begin{cases} \eta_1 = A_3 \exp[\phi t - \beta z], \\ \xi_1 = A_4 \exp[\phi t - \beta z]. \end{cases} \quad (32)$$

根据方程(26)和(27)给出的边界条件,得到

$$X_{11}A_1 + X_{13}A_3 = D_1, \quad (33)$$

$$X_{22}A_2 + X_{24}A_4 = D_2. \quad (34)$$

进一步,将方程(29)~(32)得到的解  $u_1, w_1, p_1, \xi_1$  和  $\eta_1$ , 代入方程(24)和(25),得到

$$X_{31}A_1 + X_{32}A_2 + X_{33}A_3 + X_{34}A_4 = D_3, \quad (35)$$

$$X_{41}A_1 + X_{43}A_3 + X_{44}A_4 = D_4, \quad (36)$$

其中,数  $X_{ij}(i, j = 1, 2, 3, 4)$  以及元素  $D_i(i = 1, 2, 3, 4)$  的表达式如下给出:

$$\begin{cases} X_{11} = J_1(\Omega a), X_{12} = 0, X_{13} = -\phi, X_{14} = 0, \\ X_{21} = 0, X_{22} = J_0(\Omega a), X_{23} = 0, X_{24} = 0, \\ X_{31} = \mu \beta J_1(\Omega a), X_{32} = \mu \Omega J_1(\Omega a), \\ X_{33} = \frac{\beta(T_{\theta 0} - T_{i 0})}{a} - \frac{E_t h}{1 - \sigma_\theta \sigma_t} \left( \frac{\beta \sigma_\theta}{a} \right), \\ X_{34} = -M_0 \phi^2 - C_l \phi - K_l - \frac{E_t h}{1 - \sigma_\theta \sigma_t} (\beta^2), \\ X_{41} = \Omega \mu (J_2(\Omega a) - J_0(\Omega a)), X_{42} = 0, \\ X_{43} = -M_0 \phi^2 - C_r \phi - K_r - \frac{E_\theta h}{a^2(1 - \sigma_\theta \sigma_t)} + \frac{T_{\theta 0}}{a^2} + \beta^2 T_{i 0}, \\ X_{44} = \frac{E_\theta h}{a(1 - \sigma_\theta \sigma_t)} (\beta \sigma_t), \\ \left\{ \begin{aligned} D_1 &= \frac{-\alpha \beta J_1(\beta a)}{\Omega^2 - \beta^2}, D_2 = \frac{-\alpha \beta J_0(\beta a)}{\Omega^2 - \beta^2}, D_3 = \frac{-2 \mu \alpha \beta^2 J_1(\beta a)}{\Omega^2 - \beta^2}, \\ D_4 &= \frac{\mu \alpha \beta^2}{\Omega^2 - \beta^2} (J_0(\beta a) - J_2(\beta a)) + \alpha \mu J_0(\beta a). \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (37)$$

$$\left\{ \begin{aligned} D_1 &= \frac{-\alpha \beta J_1(\beta a)}{\Omega^2 - \beta^2}, D_2 = \frac{-\alpha \beta J_0(\beta a)}{\Omega^2 - \beta^2}, D_3 = \frac{-2 \mu \alpha \beta^2 J_1(\beta a)}{\Omega^2 - \beta^2}, \\ D_4 &= \frac{\mu \alpha \beta^2}{\Omega^2 - \beta^2} (J_0(\beta a) - J_2(\beta a)) + \alpha \mu J_0(\beta a). \end{aligned} \right. \quad (38)$$

求解方程(33)~(36),得到常量  $A_i(i = 1, 2, 3, 4)$  如下:

$$\left\{ \begin{aligned}
 A_1 &= \{ (X_{24}X_{32} - X_{22}X_{34})(D_4X_{13} - D_1X_{43}) + X_{44}(X_{13}(D_3X_{22} - D_2X_{32}) - \\
 &\quad D_1X_{22}X_{33}) \} / \{ (X_{24}X_{32} - X_{22}X_{34})(X_{13}X_{41} - X_{11}X_{43}) + \\
 &\quad X_{22}X_{44}(X_{13}X_{31} - X_{11}X_{33}) \}, \\
 A_2 &= \{ D_4X_{24}(X_{11}X_{33} - X_{13}X_{31}) - D_1X_{24}X_{33}X_{41} - D_2X_{13}X_{34}X_{41} + \\
 &\quad D_1X_{24}X_{31}X_{43} + D_2X_{11}X_{34}X_{43} + D_3X_{24}(X_{13}X_{41} - X_{11}X_{43}) + \\
 &\quad D_2X_{44}(X_{13}X_{31} - X_{11}X_{33}) \} / \{ (X_{24}X_{32} - X_{22}X_{34})(X_{13}X_{41} - X_{11}X_{43}) + \\
 &\quad X_{22}X_{44}(X_{13}X_{31} - X_{11}X_{33}) \}, \\
 A_3 &= \{ -(X_{24}X_{32} - X_{22}X_{34})(D_4X_{11} - D_1X_{41}) + (X_{22}(X_{11}D_3 - X_{31}D_1) - \\
 &\quad D_2X_{11}X_{32})X_{44} \} / \{ (X_{24}X_{32} - X_{22}X_{34})(X_{13}X_{41} - X_{11}X_{43}) + \\
 &\quad X_{22}X_{44}(X_{13}X_{31} - X_{11}X_{33}) \}, \\
 A_4 &= \{ D_4X_{22}(X_{13}X_{31} - X_{11}X_{33}) - (X_{13}(D_3X_{22} - D_2X_{32}) - D_1X_{22}X_{33})X_{41} + \\
 &\quad (X_{22}(D_3X_{11} - D_1X_{31}) - D_2X_{11}X_{32})X_{34} \} / \{ (X_{24}X_{32} - X_{22}X_{34})(X_{13}X_{41} - \\
 &\quad X_{11}X_{43}) + X_{22}X_{44}(X_{13}X_{31} - X_{11}X_{33}) \}.
 \end{aligned} \right. \quad (39)$$

根据  $r = 0$  时,  $w_1 = (1/r)(\partial\psi/\partial r)$  和  $\psi = 0$ , 得到相应的流量函数

$$\psi = \left[ \frac{i\alpha R I_1(-i\beta r)}{\Omega^2 - \beta^2} + \frac{A_2 r J_1(\Omega r)}{\Omega} \right] \exp(\phi t - \beta z). \quad (40)$$

并得到容积率  $Q$  为

$$\begin{aligned}
 Q &= 2\pi \int_0^R r w_1 dr = \\
 &= 2\pi \left[ \frac{iR\alpha I_1(-i\beta R)}{\Omega^2 - \beta^2} + \frac{A_2 R J_1(\Omega R)}{\Omega} \right] \exp(\phi t - \beta z).
 \end{aligned} \quad (41)$$

穿过狭窄段的压力降  $\Delta p = P_1|_{z=L} - P_1|_{z=0}$ , 其中,  $P_1|_{z=L}$  和  $P_1|_{z=0}$  分别为入口波和出口波的压力

$$\Delta p = \exp(\phi t) [-\alpha\mu J_0(\beta r)] (\exp(-\beta L) - 1). \quad (42)$$

通过方程(41)和(42), 可以得到动脉段血液流动的阻抗为

$$\lambda = \frac{\Delta p}{Q} = \frac{\exp(\beta t)\Omega(\Omega^2 - \beta^2) [-\alpha\mu J_0(\beta r)] (\exp(-\beta L) - 1)}{2\pi [iR\alpha\Omega I_1(-i\beta R) + (\Omega^2 - \beta^2)A_2 R J_1(\Omega R)]}. \quad (43)$$

壁面剪切应力为

$$\tau_{rz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}. \quad (44)$$

根据方程(29)和(30), 壁面剪切应力成为

$$\tau_{rz} = -\mu \left[ -(\beta A_1 + A_2\Omega) J_1(\Omega R) - \frac{2\beta^2\alpha J_1(\beta R)}{\Omega^2 - \beta^2} \right] \exp(\phi t - \beta z). \quad (45)$$

狭窄段咽喉处的剪切应力(即位于  $z = a + s_l/m^{1/(m-1)}$  处, 狭窄段最大高度处的壁面剪切应力), 意味着  $\tau_s = \tau_{rz}|_{R=a-\delta_l}$ , 即

$$\tau_s = -\mu \left[ -(\beta A_1 + A_2\Omega) J_1(\Omega(a - \delta_l)) - \frac{2\beta^2\alpha J_1(\beta(a - \delta_l))}{\Omega^2 - \beta^2} \right] \times$$

$$\exp(\phi t - \beta z).$$

(46)

### 3 结果讨论

为了定量地评述 Hartmann 数  $Ha$ 、渗透率常数  $\kappa$ 、狭窄段最大高度  $\delta$  和形状参数  $m$  的影响, 便于计算, 采用下列试验数据<sup>[1,23-25]</sup>:

$$\begin{aligned} a &= 5 \times 10^{-3} \text{ cm}, \rho = 1.05 \text{ g/cm}^3, \mu = 0.04, \omega/c = 0.002 \text{ 1}, \\ \omega &= 7.854, T_\theta = 0.1, T_l = 0.09, \sigma_\theta = 0.51, E_\theta = 40 \text{ N/cm}^2, \\ \gamma_1 &= 0.63, \gamma_2 = 1.0, M = 0.70, C = 550, h = 0.01a, K = 1.6 \times 10^6, \\ E_l &= \gamma_1 E_\theta, \sigma_l = \gamma_2 \sigma_\theta, M_0 = Ma\rho, C_r = C_l = \frac{C\mu}{a}, k_r = k_l = \frac{k\mu^2}{a^3\rho}, \end{aligned}$$

其中,  $C, K$  分别表示完全栓管中粘性约束和弹性约束的贡献,  $M$  为血管及其周边组织的总质量. 在下面给出的图形中, 考虑一段弹性动脉有 3 段狭窄区(即  $n = 3$ ), 又  $L = 3 \text{ cm}$ ,  $s_1 = s_2 = s_3 = s = 0.5 \text{ cm}$ ,  $d_1 = 0.375 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 1.25 \text{ cm}$ ,  $d_3 = 2.125 \text{ cm}$ .

Atabek 和 Lew 研究了参数  $T_l$  和  $T_\theta$  对传播特性的影响<sup>[25]</sup>. Atabek<sup>[26]</sup> 研究了参数  $\delta$  和  $\theta$  的影响, 研究了参数  $M$  和  $K$  的联合影响. 目前还没有关于参数  $\gamma_2$  的实验结论, 为了便于数值计算, 这里假定  $\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma$ .

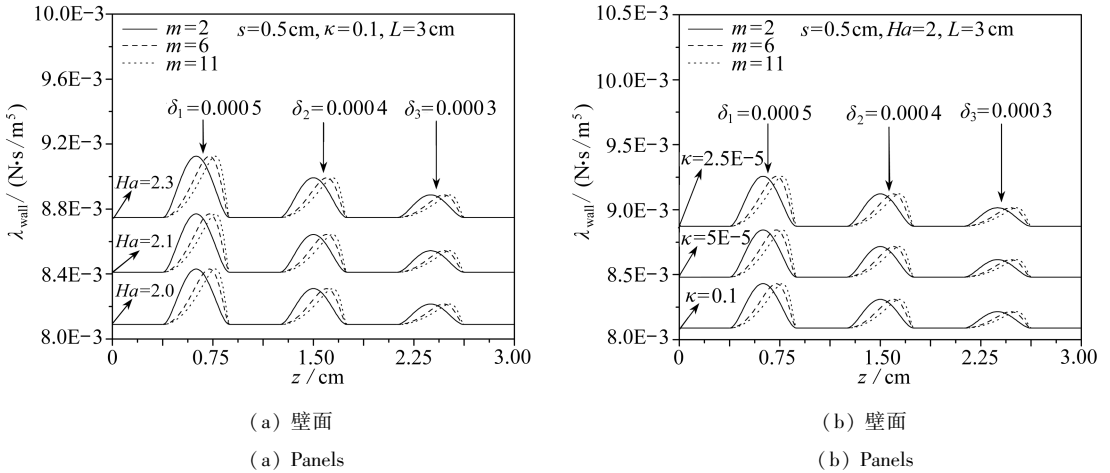


图2  $Ha, \kappa, \delta$  和  $m$  取不同的数值时, 动脉壁面流动阻抗的变化

Fig. 2 Variation of resistance to flow at the surface wall of the artery for different values of  $Ha, \kappa, \delta$  and  $m$

图 2(a) 和图 2(b) 给出了壁面 ( $\lambda_{\text{wall}} = \lambda|_{r=R}$ ) 处血液流动阻抗(阻力阻抗)的变化, 显示出血液流动的不稳定性和管壁的扩张, 显示出 Hartmann 数  $Ha$ 、渗透率常数  $\kappa$ 、狭窄处最大高度  $\delta$  和形状参数  $m$  的影响范围. 可以看到, 在第 1 狭窄段 ( $0.375 \leq z \leq 0.875$ ), 阻抗曲线在狭窄区入口处开始上升, 直到最大变窄处(狭窄段咽喉处), 然后急剧下降, 直到狭窄区出口处. 第 2 狭窄段 ( $1.25 \leq z \leq 1.75$ ) 和第 3 狭窄段 ( $2.125 \leq z \leq 2.625$ ) 也是如此变化. 有趣的是, 壁面处的流动阻抗  $\lambda_{\text{wall}}$  随着 Hartmann 数  $Ha$  和狭窄处最大高度  $\delta$  的增加而增加, 随着渗透率常数  $\kappa$  和形状参数  $m$  的增加而减少, 并在狭窄段对称的情况下 ( $m = 2$ ) 达到最大值.

各向异性度是一个可靠的动脉壁面材料(依赖材料方向的)参数. 这是很容易理解的, 壁



面由纤维(胶原蛋白、弹性蛋白和平滑肌细胞 SMC)构成,因此,纤维方向的性质,和纤维垂直方向的性质是不同的.另一方面,如果纤维的方向与动脉的轴向、圆周向和径向方向相一致,动脉壁面材料被称为各向同性材料<sup>[27]</sup>.

取象征各向同性的自由管数据如下:

$$T_\theta = 0, T_l = 0, \sigma_\theta = 0.5, \gamma = 1, M = 0.15, K = 0, C = 0.$$

当  $\gamma = 1$  时, Poisson 比总是小于 0.5,但是对于一个各向同性管,  $\sigma_\theta = 0.5$ , 同时,管处于无初始应力状态<sup>[26]</sup>.

为了研究栓管对血液流动的影响,需对前面的参数作相应的变化,落入有生理学意义的区间内,同时保持其他参数固定为它们的基础值.为选择参数的变动区间,选取狗的下行大动脉,作为这些参数的近似值<sup>[1,24-26]</sup>:

$$T_\theta = 0.1, T_l = 0.09, \sigma_\theta = 0.51, \gamma = 0.63, M = 0.70, K = 1.6 \times 10^6, C = 550.$$

图 3 绘出了完全栓管和自由管中壁面的抗阻(作为参数  $\delta$  的函数)  $\lambda_{wall}$ . 从图中可以看到,尽管栓管对壁面阻力阻抗的传播影响小到可以忽略不计,但流过栓管的壁面阻抗的传播,明显地低于流过自由管的.

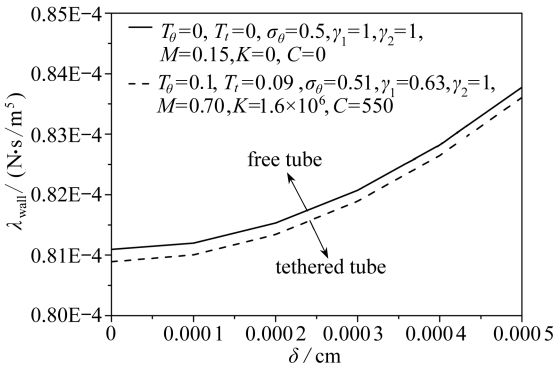


图 3 完全栓管对动脉壁面流动阻抗(阻力阻抗)  $\lambda_{wall}$  的影响

Fig. 3 The influences of the total tethering on resistance to flow (resistance impedance) at the surface wall of the artery

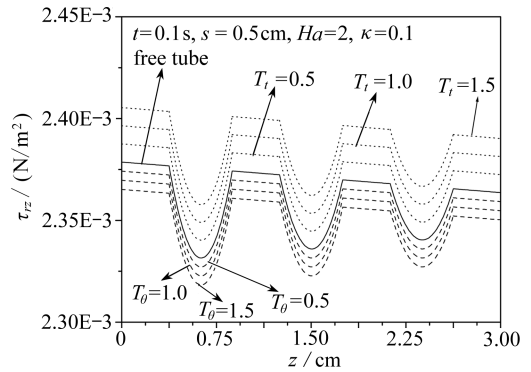


图 4 圆周向和纵向初始应力  $T_l$  和  $T_\theta$  对壁面剪切应力  $\tau_{rz}$  分布的影响

Fig. 4 The influences of the circumferential and longitudinal initial stresses on the wall shear stress distribution

壁面剪切应力是了解动脉疾病进展的重要因素,因为动脉硬化(动脉变窄)的位置和动脉壁面之间,有着强烈的依赖联系.图 4~图 6 在特定的瞬时  $t = 0.1$  s, 流过存在 3 处变窄动脉时,给出了壁面剪切应力分布的结果.和前面的阻抗曲线不同,壁面剪切应力曲线在第 1 变窄段 ( $0.375 \leq z \leq 0.875$ ) 的入口处,开始下降直到最大收缩(狭窄段咽喉)处,然后急剧上升直到收缩终点处,第 2 变窄区 ( $1.25 \leq z \leq 1.75$ ) 和第 3 狭窄区 ( $2.125 \leq z \leq 2.625$ ),有着类似的变化.

图 4~图 6 就粘弹性应力的圆周向分量  $T_\theta$  和纵向分量  $T_l$ 、血管壁各向异性度  $\gamma$ 、完全栓管中粘性约束  $C$  和弹性约束  $K$ 、血管及其周边组织的总质量  $M$  取不同的数值时,给出了壁面剪切应力  $\tau_{rz}$  的分布.可以看到,  $\tau_{rz}$  随着纵向粘弹性应力分量  $T_l$  和各向异性度  $\gamma$  的增加而增加,随着圆周向粘弹性应力分量  $T_\theta$ 、血管及其周边组织总质量  $M$ 、完全栓管中粘性约束  $C$  和弹性约束

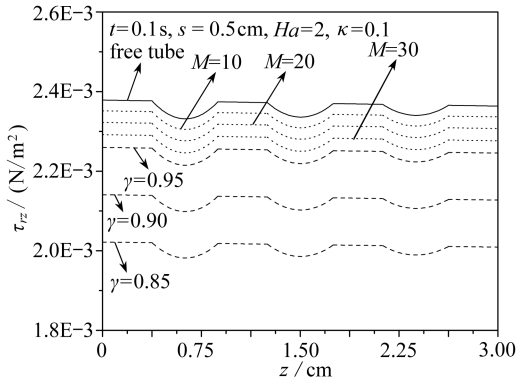


图5 各向异性度  $\gamma$  和血管及其周围组织的总质量  $M$ , 对壁面剪切应力  $\tau_{rz}$  分布的影响

Fig. 5 The influences of the degree of anisotropy and the total mass of the vessel and the surrounding tissues on the wall shear stress distribution

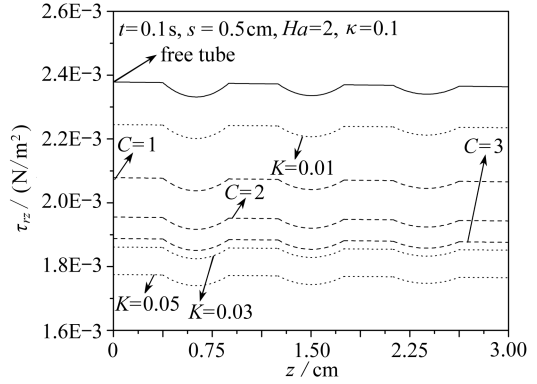
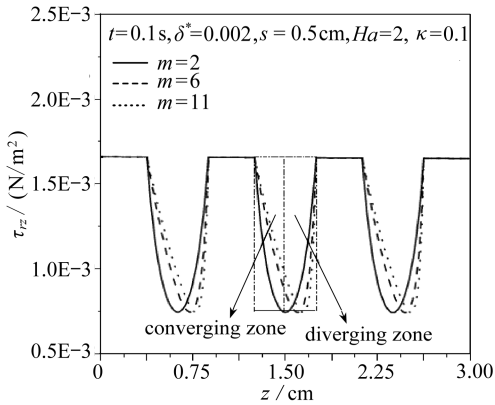


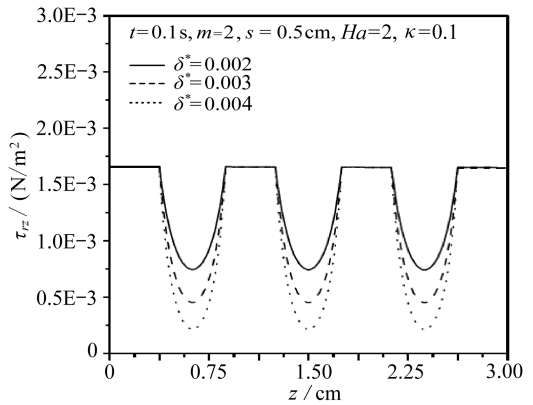
图6 完全栓管的粘性约束  $C$  和弹性约束  $K$  对壁面剪切应力  $\tau_{rz}$  分布的影响

Fig. 6 The influences of the viscous and elastic constraints to the total tethering of the vessel wall on the wall shear stress distribution



(a) 壁面

(a) Panels



(b) 壁面

(b) Panels

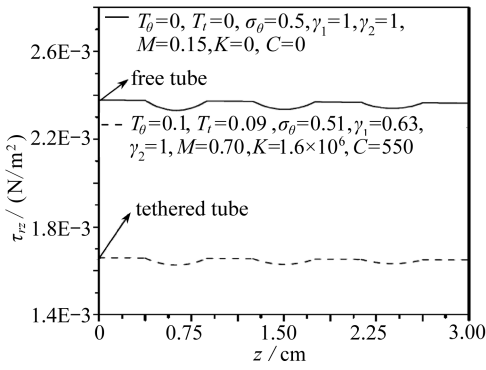
图7 当  $m$  和  $\delta$  取不同的数值时, 壁面剪切应力  $\tau_{rz}$  随轴向距离  $z$  的变化

Fig. 7 Variation of the wall shear stress distribution with axial distance  $z$  for different values of  $m$  and  $\delta$

$K$  的增加而减少。当任何动脉壁面都不在运动时, 壁面剪切应力明显减少, 该事实有助于确定血管壁变形在本模型中的重要性。

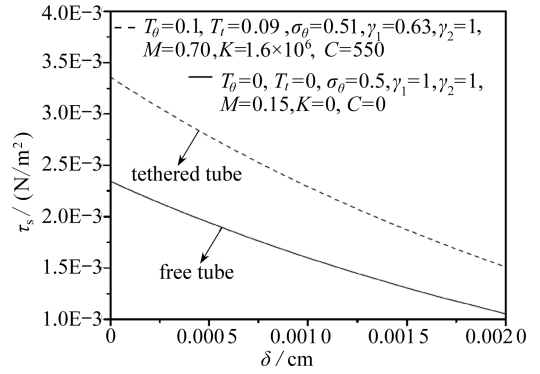
图7 给出形状参数  $m$  和狭窄处最大高度  $\delta$  对壁面剪切应力分布的影响, 本文假定  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta^*$ 。可以看到, 当形状参数  $m$  增加时, 狭窄段壁面剪切应力数值在收缩区降低, 在扩张区增大 (见图7(a))。对任意给定的狭窄形状, 壁面剪切应力的数值, 从上游靠近  $z = 0.375, 1.25, 2.125$  处, 数值急剧减少, 在咽喉处达到其峰值 ( $\tau_{rz} = \tau_s$ ), 在咽喉下游区, 数值在增加, 直到靠近咽喉结束 ( $z = 0.875, 1.75, 2.625$ ) 处 (见图7(b))。图7(a) 还可以发现, 随着  $m$  值的增加, 狭窄段上游区  $\tau_{rz}$  减少的速率 (相对于轴向距离); 与下游区  $\tau_{rz}$  增加的速率是一样的。图7(b) 也可以发现, 随着狭窄段最大高度的增加, 壁面剪切应力分布在下降。

图8 绘出完全栓管和自由管中, 壁面剪切应力分布  $\tau_{rz}$  的传播特性 (见图8(a)) 和咽喉处



(a) 壁面剪切应力分布

(a) Wall shear stress distribution



(b) 咽喉处剪切应力的分布

(b) Shearing stress distribution at the stenosis throat

图8 自由管和完全栓管中剪切应力分布的比较

Fig.8 The influences of the total tethering on the wall shear stress distribution and the shearing stress distribution at the stenosis throat

剪切应力分布  $\tau_s$  的传播特性(见图8(b)).图8还可以看出,壁面剪切应力在完全栓管中传播,明显低于自由管中传播,而咽喉处的剪切应力分布  $\tau_s$  的传播刚好反过来,完全栓管中传播,高于自由管中的传播.这个结果与 Chakravarty 等的文献 [28] 中的结果相近.

图9在形状参数  $m$  和狭窄处最大高度  $\delta$  取不同值时,给出了狭窄区动脉壁面流函数  $\psi_{wall}$  的变化.可以看出,在  $0 \leq z \leq 0.375$  区域,流函数  $\psi_{wall}$  的值随着  $z$  增大而增大.在狭窄段 ( $0.375 \leq z \leq 0.875$ ),靠近入口 ( $z = 0.375$  cm) 的上游区,流函数  $\psi$  的值急剧减少,在咽喉处 ( $z = \delta_1 - a$ ) 达到峰值,然后在咽喉的下游区内增加,直到狭窄段出口处 ( $z = 0.875$  cm).另外还可以看到,在  $0.875 \leq z \leq 1.25, 1.75 \leq z \leq 2.125, 2.625 \leq z \leq 3$  区域,流函数  $\psi_{wall}$  的值随着  $z$  的增加而减少;在狭窄段  $1.25 \leq z \leq 1.75$  和  $2.125 \leq z \leq 2.625$ ,流函数  $\psi_{wall}$  的变化与狭窄段  $0.375 \leq z \leq 0.875$  的变化相似.有趣的是,随着狭窄段段数的增加,动脉壁面流函数  $\psi_{wall}$  在下降.另一方面,狭窄段  $2.125 \leq z \leq 2.625$  咽喉处的流函数  $\psi_{wall}$  值,比前面两个狭窄段 ( $0.375 \leq z \leq 0.875$  和  $1.25 \leq z \leq 1.75$ ) 咽喉处的值要小.此外,3个狭窄段的流函数  $\psi_{wall}$ ,随着  $m$  和  $\delta$  的增加而减少.

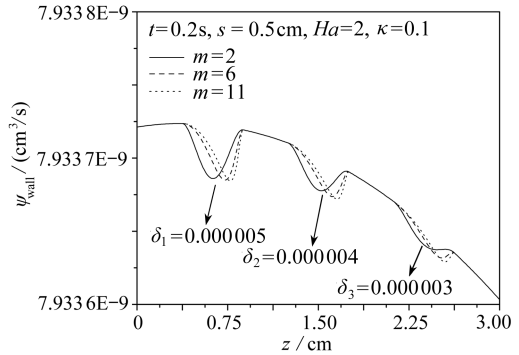


图9 当  $m$  和  $\delta$  取不同数值时,狭窄段动脉壁面处流函数分布的变化

Fig.9 Variation of stream function distribution at the surface wall of the artery in the stenotic regions for different values of  $m$  and  $\delta$

图10~图15给出了壁面弹性参数  $T_i, T_\theta, \gamma, M, C$  和  $K$ ,对壁面处径向速度  $u_{wall}$  和轴向速度  $w_{wall}$  的影响.由图可以看到,随着各向异性度  $\gamma$ 、完全栓管中弹性约束的贡献  $K$  的增加,壁面处径向速度  $u_{wall}$  在下降;随着初始纵向应力分量  $T_i$ 、初始圆周向应力分量  $T_\theta$  的增加,壁面处径向速度  $u_{wall}$  在增加.图10~图12有趣地看到,完全栓管中粘性约束的贡献  $C$  和血管及其周边组织总质量  $M$ ,对壁面处径向速度  $u_{wall}$  的影响小到可以忽略不计.

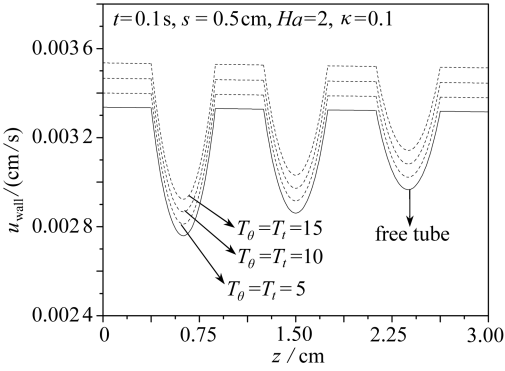


图 10 圆周向和纵向初始应力对动脉壁面处径向速度的影响

Fig. 10 The influences of the circumferential and longitudinal initial stresses on the radial velocity at the surface wall of the artery

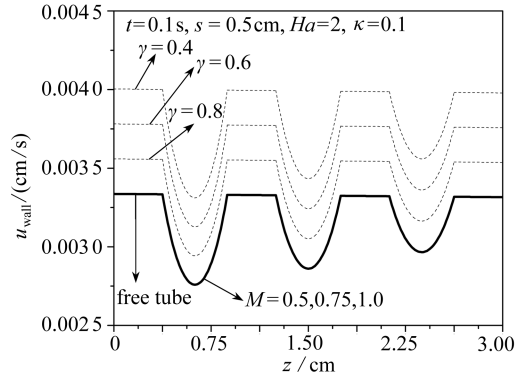


图 11 各向异性度  $\gamma$  和血管及其周边组织总质量  $M$  对动脉壁面处径向速度的影响

Fig. 11 The influences of the degree of anisotropy and the total mass of the vessel and the surrounding tissues on the radial velocity at the surface wall

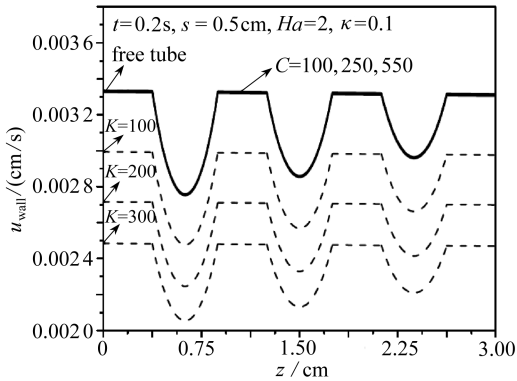


图 12 完全栓管中粘性和弹性约束对壁面处径向速度的影响

Fig. 12 The influences of the viscous and elastic constraints to the total tethering of the vessel wall on the radial velocity at the surface wall

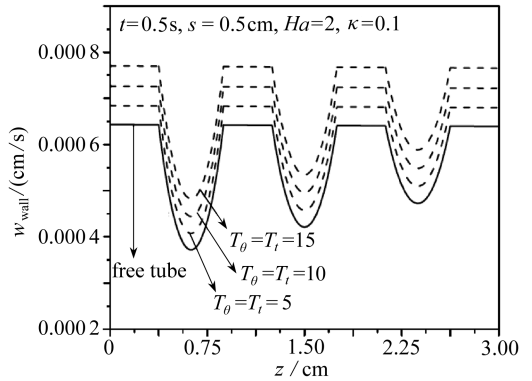


图 13 圆周向和纵向初始应力对壁面处轴向速度的影响

Fig. 13 The influences of the circumferential and longitudinal initial stresses on the axial velocity at the surface wall

类似地,从图 13 ~ 图 15 可以看到,随着完全栓管中粘性约束贡献  $C$  和弹性约束贡献  $K$ 、血管及其周边组织总质量  $M$  的增加,壁面处的轴向速度  $w_{wall}$  在下降;随着各向异性度  $\gamma$ 、初始纵向应力分量  $T_i$  和初始圆周向应力分量  $T_\theta$  的增加,壁面处的轴向速度  $w_{wall}$  在增加。

俘获 (trapping) 现象的出现是流体流动的一个有趣现象. 在波的结构中,流线在一定条件下分裂并俘获一个随波速整体运动的区域,闭合的流线在流体内形成一个小而圆的循环区域称之为俘获. 俘获区定义了一个以闭合流线为边界的流量,在波的结构中随波传送. 为了看清楚 Hartmann 数  $Ha$  和渗透率常数  $\kappa$  对俘获区的作用,考虑只有一个狭窄段的动脉,图 16(a) 给出了  $Ha = 2, 4, 8$  和  $t = 0.2 \text{ s}, m = 3, \delta_1 = 0.2, d_1 = 0.75 \text{ cm}, s_1 = 1.5 \text{ cm}$  和  $\kappa = 0.1$  的情况,图 16(b) 给出了  $\kappa = 0.2, 0.4, 0.6$  和  $t = 0.2 \text{ s}, m = 3, \delta_1 = 0.2, d_1 = 0.75 \text{ cm}, s_1 = 1.5 \text{ cm}$  和  $Ha = 2$  的情况. 可以看到,俘获区位于中心线附近,随着渗透率常数  $\kappa$  的增加俘获区在变大,但随着

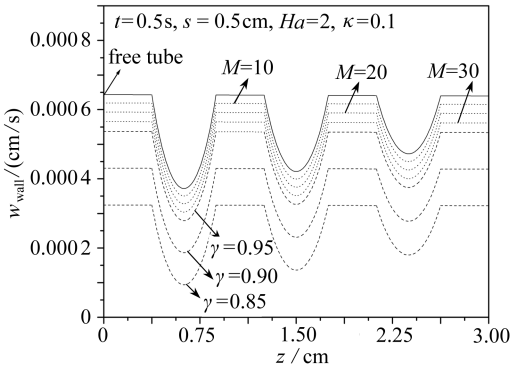


图 14 各向异性度  $\gamma$  和血管及其周边组织总质量  $M$  对壁面处轴向速度的影响

Fig. 14 The influences of the degree of anisotropy and the total mass of the vessel and the surrounding tissues on the axial velocity at the surface wall

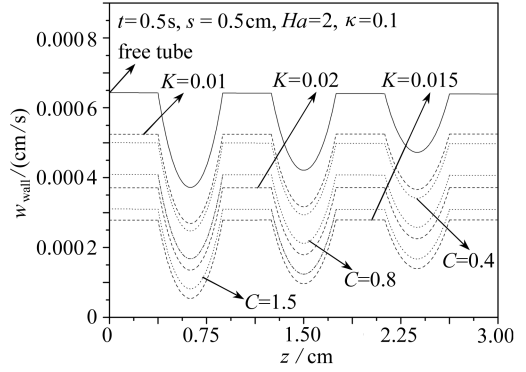
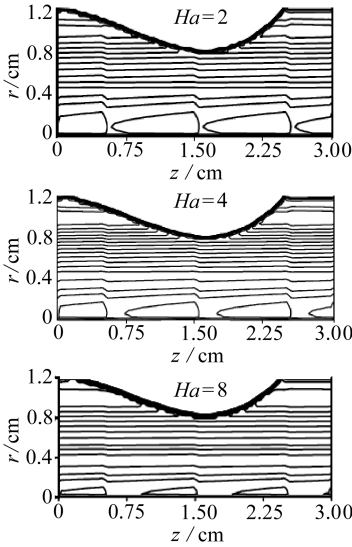
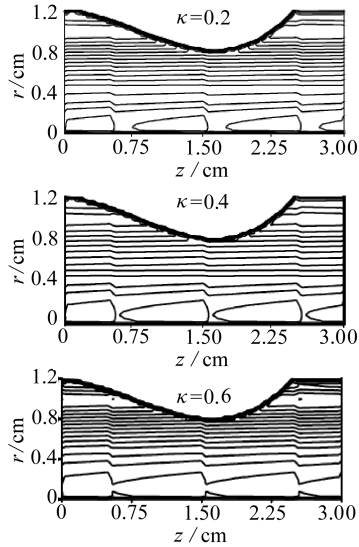


图 15 完全栓管中粘性约束  $C$  和弹性约束  $K$  对壁面处轴向速度的影响

Fig. 15 The influences of the viscous and elastic constraints to the total tethering of the vessel wall on the axial velocity at the surface wall



(a) 壁面  
(a) Panels



(b) 壁面  
(b) Panels

图 16 Hartmann 数  $Ha$  和渗透率  $\kappa$  取不同的值时的流线图

Fig. 16 Plot showing streamlines for different values of the Hartmann number  $Ha$  and the constant of permeability  $k$

Hartmann 数  $Ha$  的增加俘获区在变小。

最后,图 17 绘出了狭窄段对称(见图 17(a))、非对称(见图 17(b))、自由管(见图 17(c))和完全栓管(见图 17(d))对流线的影响。可以看到,在非对称狭窄段( $m > 2$ )中,俘获区在中心线附近逐渐形成;在对称狭窄段( $m = 2$ )中,俘获区似乎消失不见。进一步地,自由管(意味着无初始应力)中的俘获区比完全栓管中的俘获区要小得多。

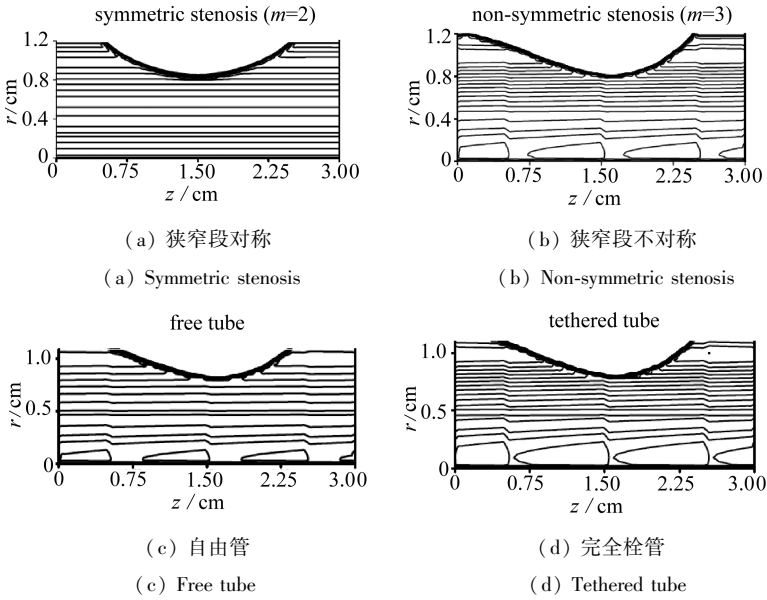


图 17 流线图的比较

Fig. 17 Plot showing streamlines

## 4 总 结

本文对一个具有多处狭窄段的各向异性弹性动脉,研究了磁场、多孔性和壁面特性对血液流动特征的影响.解析地得到流函数、径向和轴向速度的准确表达式.图形给出壁面剪切应力分布、流动阻抗(阻力阻抗)和狭窄段咽喉处的剪切应力.主要结论总结如下:

1) 动脉壁面的流动阻抗(阻力阻抗)  $\lambda_{\text{wall}}$ , 随着 Hartmann 数  $Ha$  的增加而增加,随着渗透率常数  $\kappa$  的增加而减少.尽管栓管对壁面阻力阻抗的传播影响很小,而完全栓管中壁面阻力阻抗的传播,明显低于自由管.

2) 壁剪切应力分布  $\tau_{rz}$ , 随着粘弹性应力的纵向分量  $T_l$  和各向异性参数  $\gamma$  的增加而增加,随着粘弹性应力的轴向分量  $T_\theta$ 、血管及其周边组织的总质量  $M$ 、完全栓管中粘性约束的贡献  $C$ 、弹性约束的贡献  $K$  的增加而减少.

3) 流过栓管的壁面剪切应力分布的传播,明显小于流过自由管,但对流过完全栓管和自由管来说,狭窄段咽喉处的剪切应力  $\tau_s$  分布特性正相反.

4) 随着动脉壁狭窄段个数的增加,壁面流函数  $\psi_{\text{wall}}$  的值在逐渐减小.

5) 有趣的是,完全栓管中粘性约束的贡献  $C$  和血管及其周边组织的总质量  $M$ ,对壁面处的径向速度  $u_{\text{wall}}$  的影响小到可以忽略不计.

6) 血管壁的各向异性度,对确定动脉材料起着重要作用.另一方面,如果动脉壁面材料方向与动脉的轴向、圆周向和径向一致,称动脉壁面材料为各向同性自由材料,这时动脉无初始应力,完全栓管中粘性和弹性约束的贡献非常小.

7) 俘获区的大小,随着渗透率常数  $\kappa$  的增加而增大,随着 Hartmann 数  $Ha$  的增加而减小,俘获区出现在中心线附近.

8) 狭窄段不对称时,逐渐形成俘获区;狭窄段对称时,俘获区不出现。自由管(无初始应力)俘获区的大小,小于完全栓管的俘获区。

9) 流过有多处狭窄段的各向异性弹性动脉的血液流动,明显受到动脉壁周边结缔组织运动的影响。这就意味着,血管壁的力学特性,要和血液的流动特性一起考虑,对有多处狭窄段血管的影响比单一血管更敏锐。

#### 参考文献:

- [1] Chakravarty S, Ghosh Chowdhury A. Response of blood flow through an artery under stenotic conditions[J]. *Rheol Acta*, 1988, **27**(4): 418-427.
- [2] Mekheimer Kh S, Haroun Mohammed H, El Kot M A. Induced magnetic field influences on blood flow through an anisotropically tapered elastic arteries with overlapping stenosis in an annulus[J]. *Can J Phys*, 2011, **89**(2): 201-212.
- [3] Craig I J D, Watson P G. Magnetic reconnection solutions based on a generalized Ohm's law [J]. *Solar Physics*, 2003, **214**(1): 131-150.
- [4] Stud V K, Sophon G S, Mishra R K. Pumping action on blood flow by a magnetic field[J]. *Bulletin Math Biology*, 1977, **39**(3): 385-390.
- [5] Agrawal H L, Anwaruddin B. Peristaltic flow of blood in a branch[J]. *Ranchi Univ Math J*, 1984, **15**: 111-121.
- [6] Abd Elnaby M A, Haroun M H. A new model for study the effect of wall properties on peristaltic transport of a viscous fluid[J]. *Communications in Nonlinear Sci and Num Simulation*, 2008, **13**(4): 752-762.
- [7] Haroun M H. On non-linear magnetohydrodynamic flow due to peristaltic transport of an old rayed 3-constant fluid[J]. *Z Naturforsch A*, 2006, **61**: 263-274.
- [8] Haroun M H. Non-linear peristaltic flow of a fourth grade fluid in an inclined asymmetric channel[J]. *Computational Material Sci*, 2007, **39**(2): 324-333.
- [9] Mekheimer Kh S, El Kot M A. The micropolar fluid model for blood flow through stenotic arteries[J]. *Int J Pure and Appl Math*, 2007, **4**(36): 393-405.
- [10] 梅克赫默 Kh S, El 科特 M A. 磁场和 Hall 电流对狭窄动脉中血液流动的影响[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(8): 991-1002. (Mekheimer Kh S, El Kot M A. Influence of magnetic field and Hall currents on blood flow through stenotic artery[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2008, **29**(8): 1093-1104. )
- [11] Mekheimer Kh S, El Kot M A. The micropolar fluid model for blood flow through a tapered arteries with a stenosis[J]. *Acta Mech Sin*, 2008, **24**(6): 637- 644.
- [12] Mekheimer Kh S, El Kot M A. Suspension model for blood flow through arterial catheterization[J]. *Chem Eng Comm*, 2010, **197**(9):1-20.
- [13] Biswas D, Chakraborty U S. Pulsatile blood flow through a catheterized artery with an axially nonsymmetrical stenosis[J]. *Applied Mathematical Sciences*, 2010, **4**(58): 2865-2880.
- [14] Srivastava V P, Rastogi Rati, Vishnoi Rochana. A two-layered suspension blood flow through an overlapping stenosis[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2010,

- 60**(3) : 432-441.
- [15] Sankar D S, Lee Usik. Two-fluid Casson model for pulsatile blood flow through stenosed arteries: a theoretical model[J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2010, **15**(8) : 2086-2097.
- [16] Srivastava V P, Mishra Shailesh, Rastogi Rati. Non-Newtonian arterial blood flow through an overlapping stenosis[J]. *A A M International Journal*, 2010, **5**(1) : 225-238.
- [17] Siddiqui S U, Verma N K, Mishra S, Gupta R S. Mathematical modeling of pulsatile flow of Casson's fluid in arterial stenosis[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, **210**(1) : 1-10.
- [18] Layek G C, Mukhopadhyay S, Gorla Rama Subba Reddy. Unsteady viscous flow with variable viscosity in a vascular tube with an overlapping constriction[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2009, **47**(5/6) : 649-659.
- [19] Pincombe B, Mazumdar J, Hamilton-Craig I. Effects of multiple stenoses and post-stenotic dilatation on non-Newtonian blood flow in small arteries[J]. *Medical & Biological Engineering & Computing*, 1999, **37**(5) : 595-599.
- [20] Tashtoush B, Magableh. Magnetic field effect on heat transfer and fluid flow characteristics of blood flow in multi-stenosis arteries[J]. *Heat Mass Transfer*, 2008, **44**(3) : 297-304.
- [21] Li M X, Beech-Brandta J J, Johnb L R, Hoskinsc P R, Eassona W J. Numerical analysis of pulsatile blood flow and vessel wall mechanics in different degrees of stenoses[J]. *Journal of Biomechanics*, 2007, **40**(16) : 3715-3724.
- [22] Mishra B K, Verma N. Magnetic effect on blood flow in a multiple stenosed artery[J]. *Appl Math Comp*, 2007, **1** : 1-7.
- [23] Chakravarty S, Datta A, Mandal P K. Analysis of nonlinear blood flow in a stenosed flexible artery[J]. *Int J Engng Sci*, 1995, **33**(12) : 1821-1837.
- [24] Chakravarty S. Pulsatile blood flow through arterioles[J]. *Rheol Acta*, 1987, **26**(2) : 200-207.
- [25] Atabek H B, Lew H S. Wave propagation through a viscous incompressible fluid contained in an initially stressed elastic tube[J]. *Biophysical Journal*, 1966, **6**(4) : 481-503.
- [26] Atabek H B. Wave propagation through a viscous fluid contained in a tethered, initially stressed, orthotropic elastic tube[J]. *Biophysical Journal*, 1968, **8**(5) : 626-649.
- [27] Kalita P, Schaefer R. Mechanical models of artery walls[J]. *Arch Comput Methods Eng*, 2008, **15**(1) : 1-36.
- [28] Chakravarty S, Sarifuddin, Mandal P K. Unsteady flow of a two-layer blood stream past a tapered flexible artery under stenotic conditions[J]. *Comp Methods in Appl Math*, 2004, **4**(4) : 391-409.



# Effects of Magnetic Field, Porosity and Wall Properties for Anisotropically Elastic Multi-Stenosis Arteries on the Characteristics of Blood Flow

Kh. S. Mekheimer<sup>1</sup>, Mohamed H. Haroun<sup>2</sup>, M. A. El Kot<sup>3</sup>

(1. *Department of Mathematics, Faculty of Science, Al-Azhar University,  
Nasr City 11884, Cairo, Egypt;*

2. *Department of Mathematics, Faculty of Education,  
Ain Shams University, Cairo 11566, Egypt;*

3. *Department of Mathematics, Faculty of Science,  
Suez Canal University, Suez 41522, Egypt)*

**Abstract:** A mathematical model for blood flow through an elastic artery with multi-stenosis under effect of a magnetic field in a porous medium was presented. The arterial segment under consideration was simulated by an anisotropically elastic cylindrical tube filled with a viscous incompressible electrically conducting fluid representing blood. The analysis was carried out for an artery with mild local narrowing in its lumen forming a stenosis. The effects of arterial wall parameters that represent the viscoelastic stresses components acting along the longitudinal and circumferential directions  $T_t$  and  $T_\theta$  respectively, the degree of anisotropy of the vessel wall  $\gamma$ , the total mass of the vessel and the surrounding tissues  $M$  and the contributions of the viscous and elastic constraints to the total tethering  $C$  and  $K$  respectively on the resistance impedance, the wall shear stress distribution, the radial and axial velocities had been well illustrated. Also the effects of the stenosis shape  $m$ , the constant of permeability  $\kappa$ , the Hartmann number  $Ha$  and the maximum height of the stenosis size  $\delta$  on the fluid flow characteristics were investigated. The obtained results show that the flow was appreciably influenced by the surrounding connective tissues of the motion of the arterial wall and the degree of anisotropy of the vessel wall play an important role to determine the material of the artery. Further the wall shear stress distribution increases with increasing  $T_t$  and  $\gamma$  while it decreases with increasing  $T_\theta$ ,  $M$ ,  $C$  and  $K$ . The transmission of the wall shear stress distribution and the resistance impedance at the wall surface through a tethered tube were substantially lower than those through the free tube while the shearing stress distribution at the stenosis throat had inverse character through totally tethered and free tubes. The trapping bolus increases in size toward the line center of the tube as the constant of permeability  $\kappa$  increases and it decreases by increasing Hartmann number  $Ha$ . Finally the trapping bolus appears gradually in the case of non-symmetric stenosis while it seems to disappear in the case of symmetric stenosis and the size of trapped bolus for the stream lines in the free isotropic tube (means the tube which initially unstressed) was smaller than those in the tethered tube.

**Key words:** stenosis; degree of anisotropy; free tube; tethered tube; trapping bolus