

# 窄带随机噪声激励下线性碰撞系统的响应\*

戎海武<sup>1</sup>, 王向东<sup>1</sup>, 罗旗帜<sup>1</sup>, 徐伟<sup>2</sup>, 方同<sup>2</sup>

(1. 佛山大学 数学系, 广东 佛山 528000;

2. 西北工业大学 应用数学系, 西安 710072)

**摘要:** 研究了单自由度线性单边碰撞系统在窄带随机噪声激励下的次共振响应问题. 用 Zhuravlev 变换将碰撞系统转化为连续的非碰撞系统, 然后用随机平均法得到了关于慢变量的随机微分方程. 在约束距离为 0 时, 用矩方法给出了系统响应幅值二阶矩的解析表达式. 在约束距离不为 0 时, 近似地得到了系统响应幅值二阶矩的解析表达式. 讨论了系统阻尼项、窄带随机噪声的带宽和中心频率以及碰撞恢复系数等参数对于系统响应的影响. 理论计算和数值模拟表明, 系统响应幅值将在激励频率接近于次共振频率时达到最大, 而当激励频率逐渐偏离次共振频率时, 系统响应迅速衰减. 数值模拟表明提出的方法是有效的.

**关键词:** 单自由度线性碰撞系统; 次共振响应; Zhuravlev 变换法; 随机平均法

**中图分类号:** O324      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.09.007

## 引 言

碰撞是指机械系统的运动状态在一个极短的时间内发生突变的现象, 例如爆炸或对系统突加外部约束等<sup>[1]</sup>. 碰撞系统在实际工程中有广泛的应用, 例如核电站转子的振动、飞船对接引起的碰撞、海洋平台桩脚受到海冰的往复挤压碰撞、电动冲击机械等等<sup>[2]</sup>. 但是碰撞系统很难研究, 因为碰撞系统不是一个连续的系统而是间断的. 并且在实际系统中, 随机噪声往往是不可避免的, 例如对系统影响的暴风雨、地震和海浪等. 目前, 碰撞系统的随机响应问题已经成为研究的热点问题, 并且提出了许多研究方法, 例如线性化方法<sup>[3]</sup>, 拟静态法<sup>[4-5]</sup>, Markov 过程法<sup>[6-7]</sup>, 随机平均法<sup>[8-9]</sup>, 变量代换法<sup>[10-11]</sup>, 能量平衡法<sup>[12]</sup>, 均值碰撞 Poincaré 映射法<sup>[13]</sup> 和 Monte Carlo 随机模拟法<sup>[14]</sup> 等等. 文献[2]对有关研究做了综述. 总的说来, 关于碰撞系统在随机激励下系统响应分析的研究处于起步阶段, 并且大部分研究集中在线性碰撞系统(这里的线性系统指的是二次碰撞间系统运动的微分方程是线性的)对于宽带随机激励的响应分析上, 对于在窄带随机激励下碰撞系统响应分析的研究则很少见. 但是在很多实际系统中, 系统受到的激励往往是窄带噪声, 例如海浪的冲击等. 对于线性碰撞系统在一类特殊的窄带噪声——受到随机扰动的正弦激励下系统响应问题, Dimentberg<sup>[15]</sup> 等作了详细的研究. 正如文献

\* 收稿日期: 2010-11-12; 修订日期: 2011-06-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772046; 50978058); 广东省自然科学基金资助项目(7010407; 05300566)

作者简介: 戎海武(1966—), 男, 浙江宁波人, 教授, 博士(联系人. Tel: +86-757-82984643; E-mail: ronghw@foshan.net).

[15]作者本人指出的那样,在很多情况下常用的二阶滤过模型作为窄带噪声模型更合适,本文就研究这种情况,采用的窄带噪声模型是常用的二阶滤过模型,研究了单自由度线性碰撞系统在窄带随机噪声作用下的响应问题.本文采用瞬时冲击模型,即假设冲击时间为0,碰撞过程只考虑能量的损失,碰撞前后的速度变化用恢复系数来描述.结合 Zhuravlev 变换和随机平均法给出了系统响应稳态矩的计算代公式.讨论了系统阻尼项、窄带随机噪声的带宽和中心频率以及碰撞恢复系数等参数对于系统响应的影响.理论计算和数值模拟表明,系统响应幅值将在激励频率接近于次共振频率时达到最大,而当激励频率逐渐偏离次共振频率时,系统响应迅速衰减.

## 1 模型的提出及理论分析

考虑如下受到随机噪声激励的单自由度线性碰撞系统:

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \Omega^2 y = h\xi(t), & y < \Delta, \\ \dot{y}_+ = -e\dot{y}_-, & y = \Delta, \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $y$  上方的圆点表示对时间  $t$  的导数,  $\beta$  为系统的阻尼系数,  $\Omega$  代表系统的自然频率,  $e$  是碰撞恢复系数,  $0 < e \leq 1$ ,  $\Delta$  为约束距离,  $-$ 、 $+$  分别表示碰撞前后时刻,  $h$  代表随机激励的强度.而窄带随机噪声  $\xi(t)$  采用如下的二阶滤过模型:

$$\ddot{\xi} + \gamma\dot{\xi} + \Omega_1^2 \xi = \sqrt{\gamma}\Omega_1 W, \quad (2)$$

式中,  $\Omega_1$  为激励的中心频率,  $\gamma$  是滤波器的带宽且取值较小,  $W(t)$  是单位强度的 Gauss 白噪声.当  $\xi(t)$  是另外一类特殊的窄带噪声——受到随机扰动的正弦激励模型

$$\xi(t) = \sin \varphi(t), \quad \dot{\varphi}(t) = \Omega_1 + \gamma W(t) \quad (3)$$

时,系统(1)的响应问题, Dimentberg<sup>[15]</sup>等作了详细的研究.但正如文献[15]作者指出的那样,在很多情况下常用的二阶滤过模型(2)作为窄带噪声模型更合适,本文以模型(2)作为窄带噪声模型.窄带随机噪声  $\xi(t)$  可以改写成如下的形式<sup>[16]</sup>:

$$\xi(t) = \xi_1(t) \sin \Omega_1 t + \xi_2(t) \cos \Omega_1 t, \quad (4)$$

式中,  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$  是随时间缓变的随机过程.事实上,将式(4)代入式(2)并进行确定性和随机平均,可以得到  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$  满足的方程:

$$\dot{\xi}_1 + \frac{\gamma}{2}\xi_1 = \sqrt{\frac{\gamma}{2}}W_1, \quad \dot{\xi}_2 + \frac{\gamma}{2}\xi_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{2}}W_2, \quad (5)$$

式中,  $W_1$  和  $W_2$  是相互独立的单位 Gauss 白噪声.由式(5)可以得到  $\xi_1(t)$  和  $\xi_2(t)$  的自相关函数:

$$R_{\xi_1}(\tau) = R_{\xi_2}(\tau) = \pi e^{-\gamma|\tau|^{1/2}},$$

故  $\xi_1(t)$  和  $\xi_2(t)$  的相关时间为  $O(1/\gamma)$ , 当  $\gamma$  充分小时,  $\xi_1(t)$  和  $\xi_2(t)$  可以看作为随时间缓变的随机过程.由式(4),  $\xi(t)$  可以改写为

$$\xi(t) = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \sin(\Omega_1 t + \varphi(t)), \quad \varphi(t) = \arctan \frac{\xi_2}{\xi_1}. \quad (6)$$

下面研究碰撞系统(1)的响应.引入 Zhuravlev 变换<sup>[17]</sup>:

$$y = |x| + \Delta, \quad \dot{y} = \dot{x} \operatorname{sgn} x, \quad (7)$$

式中  $\operatorname{sgn} x$  是符号函数, 即当  $x > 0$  时  $\operatorname{sgn} x = 1$ , 而当  $x < 0$  时  $\operatorname{sgn} x = -1$ . 显然, 通过 Zhuravlev 变换, 将在碰撞瞬间 ( $x = 0$ ) 发生跳跃的速度  $\dot{y}$  转化为连续的速度  $\dot{x}$ . 这时, 方程(1)变为

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = -2\beta\dot{x} - \Delta \Omega^2 \operatorname{sgn} x - (1-e)\dot{x}|\dot{x}|\delta(x) + h\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \operatorname{sgn} x \sin(\Omega_1 t + \varphi(t)), \quad (8)$$

式中  $\delta(x)$  为 Dirac  $\delta$  函数.

系统(8)是没有碰撞条件的系统,从而可以用各种近似方法如随机平均法等进行研究.故对于碰撞系统,Zhuravlev 变换是一个很有用的工具.这里我们研究  $e \approx 1$  即系统(1)近似为刚性碰撞系统的情形,同时设系统(8)右端的系数  $\beta, \Delta, h$  等都为小参数,这样可以用随机平均法来研究系统(8)的响应.设  $\Omega_1 \approx 2n\Omega$ , 这里  $n$  为正整数,即研究系统(8)的次共振响应.记  $\mu = \Omega_1 - 2n\Omega$  为调谐参数,做变换

$$x = A(t) \sin\Phi(t), \quad \dot{x} = \Omega A(t) \cos\Phi(t), \quad (9)$$

并引入慢变量  $\theta(t) = \Omega_1 t + \varphi(t) - 2n\Phi(t)$ , 可将式(8)转化为

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{\cos\Phi}{\Omega} [ -2\beta\Omega A \cos\Phi - \Delta \Omega^2 \operatorname{sgn}(\sin\Phi) - \\ (1-e)\Omega^2 A \cos\Phi |A \cos\Phi| \delta(A \sin\Phi) + \\ h\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \operatorname{sgn}(\sin\Phi) \sin(\theta + 2n\Phi) ], \\ \dot{\theta} = \mu + \frac{2n \sin\Phi}{\Omega A} [ -2\beta\Omega A \cos\Phi - \Delta \Omega^2 \operatorname{sgn}(\sin\Phi) - \\ (1-e)\Omega^2 A \cos\Phi |A \cos\Phi| \delta(A \sin\Phi) + \\ h\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \operatorname{sgn}(\sin\Phi) \sin(\theta + 2n\Phi) + \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \frac{W_2 \xi_1 - W_1 \xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} ]. \end{cases} \quad (10)$$

在式(10)中,  $A, \theta, \xi_1, \xi_2$  都是关于时间  $t$  的慢变量,而  $\Phi, W_1, W_2$  是快变量,这样在式(10)中关于快变量  $\Phi, W_1, W_2$  取平均<sup>[15,18]</sup>可以得到如下关于慢变量  $A$  和  $\theta$  的方程:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\alpha A + q\zeta \cos\theta, \quad \dot{\theta} = \mu - \frac{q}{A} \zeta \sin\theta + \frac{\delta}{A}, \\ \alpha &= \beta + \frac{1-e}{\pi} \Omega, \quad q = \frac{4nh}{(4n^2-1)\pi\Omega}, \quad \delta = \frac{4n\Omega\Delta}{\pi}, \quad \zeta = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

从式(11)可以看到,弹性碰撞 ( $e = 1$ ) 和非弹性碰撞 ( $e < 1$ ) 的区别是,非弹性碰撞的作用增加了系统的阻尼,即系统原来的阻尼系数从  $\beta$  变为

$$\alpha = \beta + \frac{1-e}{\pi} \Omega.$$

作变换

$$u = A \cos\theta, \quad v = A \sin\theta, \quad (12)$$

可以将式(11)转化为

$$\begin{cases} \dot{u} = -\alpha u - \mu v - \frac{\delta v}{\sqrt{u^2 + v^2}} + q\zeta, \\ \dot{v} = -\alpha v + \mu u + \frac{\delta u}{\sqrt{u^2 + v^2}}. \end{cases} \quad (13)$$

要精确求解方程(13)并不容易,这里我们先讨论当约束距离  $\Delta = 0$  ( $\delta = 0$ ) 的特殊情形,这时方程(13)变为如下的线性方程:

$$\dot{u} = -\alpha u - \mu v + q\zeta, \quad \dot{v} = -\alpha v + \mu u. \quad (14)$$

用矩方法<sup>[19]</sup>,由方程组(14)可以求得关于  $u, v$  的任意阶稳态矩,这里我们只求二阶稳态矩.对

于稳态矩,有

$$\frac{dEu^2}{dt} = \frac{dEv^2}{dt} = \frac{dEuv}{dt} = \frac{dEu\zeta}{dt} = \frac{dEv\zeta}{dt} = 0, \quad (15)$$

式中  $E$  表示数学期望,从而由式(15)、(14)和(5)可得

$$\begin{cases} -\alpha Eu^2 - \mu Euv + qEu\zeta = 0, \mu Euv - \alpha Ev^2 = 0, \\ \mu Eu^2 - 2\alpha Euv - \mu Ev^2 + qEv\zeta = 0, \\ \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) Eu\zeta + \mu Ev\zeta = qE\zeta^2, \mu Eu\zeta - \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) Ev\zeta = 0. \end{cases} \quad (16)$$

由式(5)可以得到  $E\zeta^2 = E(\xi_1^2 + \xi_2^2) = 1$ , 从而由式(16)可以解得

$$\begin{cases} Eu^2 = \frac{q^2(\alpha^3 + \alpha^2\gamma/2 + \mu^2\gamma/4)}{\alpha(\alpha^2 + \mu^2)[(\alpha + \gamma/2)^2 + \mu^2]}, \\ Euv = \frac{q^2\mu(\alpha + \gamma/4)}{(\alpha^2 + \mu^2)[(\alpha + \gamma/2)^2 + \mu^2]}, \\ Ev^2 = \frac{q^2\mu^2(\alpha + \gamma/4)}{\alpha(\alpha^2 + \mu^2)[(\alpha + \gamma/2)^2 + \mu^2]}, \\ Eu\zeta = \frac{q(\alpha + \gamma/2)}{(\alpha + \gamma/2)^2 + \mu^2}, Ev\zeta = \frac{q\mu}{(\alpha + \gamma/2)^2 + \mu^2}. \end{cases} \quad (17)$$

由方程组(17)可以得到

$$EA^2 = Eu^2 + Ev^2 = \frac{q^2(\alpha + \gamma/2)}{\alpha[(\alpha + \gamma/2)^2 + \mu^2]}. \quad (18)$$

在一些情形需要知道系统响应的一阶矩,同样用矩法由方程(14)可得

$$Eu = \frac{\alpha q}{\alpha^2 + \mu^2} E\zeta, Ev = \frac{\mu q}{\alpha^2 + \mu^2} E\zeta.$$

下面再讨论当  $\Delta \neq 0$  时,非线性方程组(13)的近似解法.记  $A_*^2 = EA^2 = E(u^2 + v^2)$ , 方程组(13)右端中  $\sqrt{u^2 + v^2}$  项用  $A_*$  近似代替后可以得到如下的线性方程组:

$$\dot{u} = -\alpha u - \left(\mu + \frac{\delta}{A_*}\right)v + q\zeta, \dot{v} = -\alpha v + \left(\mu + \frac{\delta}{A_*}\right)u. \quad (19)$$

方程组(19)和方程组(14)类似,从而由式(18)可以得到关于  $A_*$  的方程:

$$A_*^2 = \frac{q^2(\alpha + \gamma/2)}{\alpha[(\alpha + \gamma/2)^2 + (\mu + \delta/A_*)^2]}. \quad (20)$$

由方程(20)可以解得

$$A_* = \frac{-\alpha\mu\delta \pm \sqrt{\alpha^2\mu^2\delta^2 + \alpha[(\alpha + \gamma/2)^2 + \mu^2][q^2(\alpha + \gamma/2) - \alpha\delta^2]}}{\alpha[(\alpha + \gamma/2)^2 + \mu^2]}. \quad (21)$$

可以看出当  $\Delta \rightarrow 0$  即  $\delta \rightarrow 0$  时,由式(21)给出的系统响应的幅值的均方值  $A_*^2$  和由式(18)给出的值  $EA^2$  是一致的.由式(18)和(21)可以分析系统各参数对于系统响应的影响.

## 2 数值模拟

有关随机过程数值模拟的方法可见文献[19-21],本文数值模拟中设  $\xi(t)$  的谱密度为

$$S(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 < \omega \leq 2\Omega, \\ 0, & \omega > 2\Omega. \end{cases}$$

则  $\xi(t)$  可取为如下形式<sup>[18]</sup>:

$$\xi(t) = \sqrt{\frac{2\Omega}{N\pi}} \sum_{k=1}^N \cos\left[\frac{\Omega}{N}(2k-1)t + \varphi_k\right],$$

式中,  $\varphi_k$  是  $(0, 2\pi]$  上均匀分布的独立同分布随机变量序列,  $N$  是一个较大的整数.

在本文的数值模拟中,取系统(1)和(2)中的参数如下:

$$h = 2.0, \Delta = 0.1, \Omega = 1, n = 1,$$

即在数值模拟中主要讨论  $\Omega_1 \approx 2$  时的情形. 当  $\Omega_1 \approx 2n, n = 2, 3, 4, \dots$  的情形,也得到了类似的结论,这里就不讨论了.

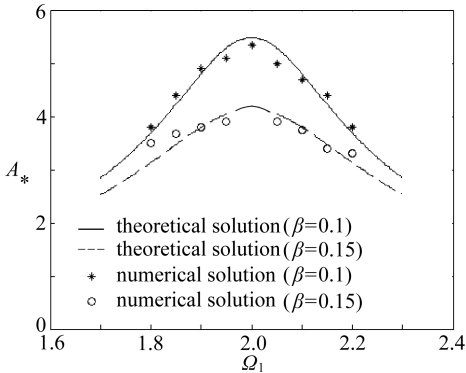


图1 系统(1)频率响应曲线 ( $\gamma = 0.1, e = 0.9$ )

Fig. 1 Frequency response of system (1)

( $\gamma = 0.1, e = 0.9$ )

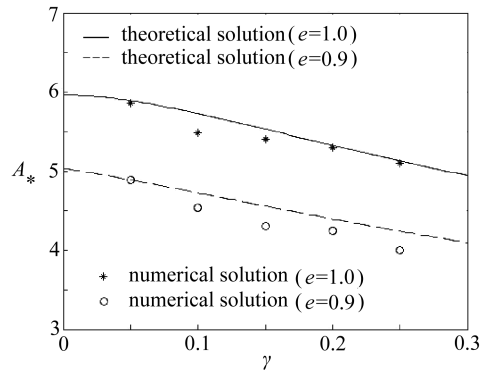


图2 系统(1)响应曲线 ( $\Omega_1 = 2.08, \beta = 0.1$ )

Fig. 2 Response of system (1)

( $\Omega_1 = 2.08, \beta = 0.1$ )

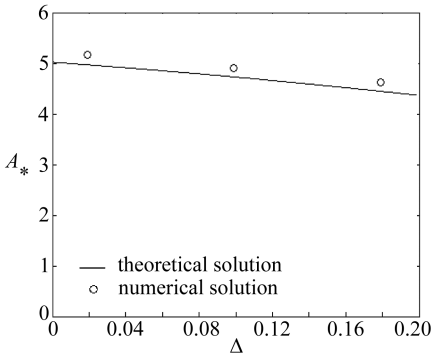


图3 系统(1)响应曲线 ( $\Omega_1 = 2.08, \beta = 0.1,$

$e = 0.9, h = 2.0, \gamma = 0.1$ )

Fig. 3 Response of system (1) ( $\Omega_1 = 2.08, \beta = 0.1,$

$e = 0.9, h = 2.0, \gamma = 0.1$ )

在没有碰撞时,用四阶 Runge-Kutta 法可计算出系统(1)的响应;碰撞发生后,只需根据公式  $\dot{x}^+ = -e\dot{x}^-$  将速度改变后再用 Runge-Kutta 法进行计算.先考虑阻尼系数  $\beta$  和随机激励的中心频率  $\Omega_1$  对于系统响应的影响.当  $\gamma = 0.1, e = 0.9$  时,对应于不同的激励频率  $\Omega_1$ ,当  $\beta = 0.1, 0.15$  时,由式(21)给出的系统(1)响应的振幅  $A_*$  的理论值与数值计算值的比较见图1,在数值模拟中,振幅  $A_*$  的取值为  $A_*^2 = 2E(\dot{x}/\Omega)^2$ .从图1可见,理论解与数值解吻合得很好,这说明用 Zhuravlev 变换和平均法求解方程(1)是有效的.

由图1可见,当阻尼  $\beta$  增大时,系统的响应变小,这是符合物理直觉的.计算表明,当随机激励的中心频率  $\Omega_1$  接近于次共振频率2时,系统的响

应达到最大.当  $\Omega_1$  逐渐偏离2时,系统响应衰减得很快,并且由式(21)给出的理论解和数值解之间略有偏差,这可能是由平均法引起的.

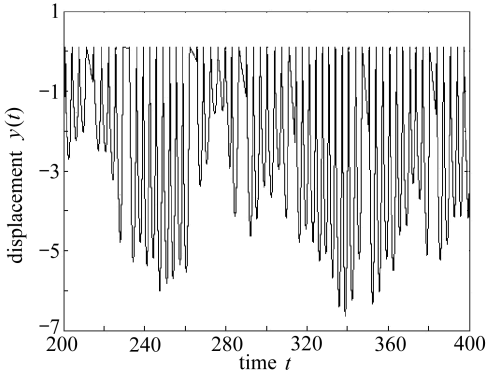
下面研究碰撞恢复系数  $e$  和由方程(2)给出的滤波器带宽  $\gamma$  对于系统响应的影响.当  $\Omega_1 = 2.08, \beta = 0.1$  时,对应于不同的带宽  $\gamma$ ,当  $e = 1.0, 0.9$  时,由式(21)给出的系统(1)响应的振幅  $A_*$  的理论值与数值计算值的比较见图2.

由图2可见,当  $\gamma$  增大时系统响应的振幅  $A_*$  减小;而当  $e$  减小时系统响应也变小,当  $e <$

1 时系统的碰撞是非弹性碰撞,碰撞中系统的能量有所损失,  $e$  越小系统在碰撞时损失的能量越大,相当于增加了系统的阻尼系数,与前面的理论分析一致。

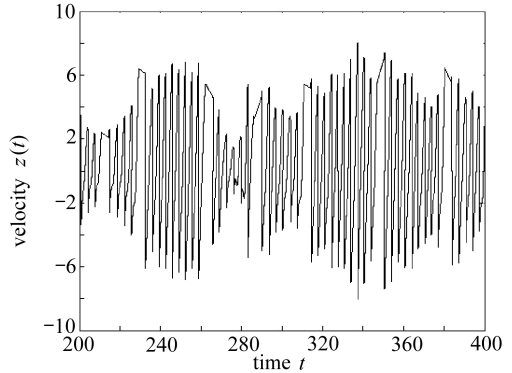
下面研究参数  $\Delta$  对于系统响应的影响。对应于不同的带宽  $\Delta$ , 当  $\Omega_1 = 2.08$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $e = 0.9$ ,  $h = 2.0$ ,  $\gamma = 0.1$  时,由式(21)给出的系统(1)响应的振幅  $A_*$  的理论值与数值计算值的比较见图 3。

由图 3 可见当  $\Delta$  增加时  $A_*$  将减少。当  $\Omega_1 = 2.08$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $e = 1.0$ ,  $\gamma = 0.1$  时,系统(1)响应的数值解见图 4,图中  $z(t) = \dot{y}(t)$  表示速度。



(a) 位移的时间历程图

(a) Time history of  $y(t)$



(b) 速度的时间历程图

(b) Time history of  $z(t)$

图 4 系统(1)的数值结果 ( $\gamma = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\Omega_1 = 2.08$ ,  $e = 1.0$ )

Fig. 4 Numerical results of equation (1) ( $\gamma = 0.1$ ,  $\beta = 0.15$ ,  $\Omega_1 = 2.08$ ,  $e = 1.0$ )

### 3 结论与讨论

本文将 Zhuravlev 变换法引入线性随机碰撞系统的响应分析中,并结合随机平均法研究了碰撞系统在窄带随机噪声作用下系统的次共振响应。由于所研究系统的复杂性(随机性和非光滑性),精确求解很困难甚至是不可能的。事实上,即使对于确定性的单自由度非线性系统,大部分也不可能求出精确的解析解。只能通过各种近似方法如小参数法、坐标变形法、谐波平衡法、慢变参数法、KBM 法、等效线性化法、谐波平衡法、Ritz-Galerkin 法,等等。对于非线性随机系统,各种近似方法得到了广泛的应用,如等效线性化法和随机平均法等。随机系统的等效线性化法可看作是确定性系统的等效线性化法在随机系统中的推广,故确定性系统的其他近似方法,如谐波平衡法<sup>[22]</sup>和多项式逼近法等<sup>[23]</sup>都可推广到随机碰撞系统的分析中去。

理论计算和数值模拟表明,增大系统的阻尼,可以减少系统的响应。弹性碰撞和非弹性碰撞的区别是,非弹性碰撞的作用相当于增加了系统的阻尼。系统响应幅值将在激励频率接近于次共振频率时达到最大,而当激励频率逐渐偏离次共振频率时,系统响应迅速衰减。增加随机噪声的带宽,系统响应变小。

为了简单起见,本文研究的是线性系统,但是本文的方法对于非线性系统的响应分析也是适用的,具体的公式推导是我们今后进一步的工作。本文的结果是在系统参数  $\beta, \Delta, h$  等都为小参数的假设下得到的,如果这些参数不是小参数,有关结论是否还成立值得进一步研究,实际上在数值模拟中  $h = 2$  的值并不小,当  $h$  较小时数值解和理论解也较吻合。



## 参考文献:

- [1] 金栋平, 胡海岩. 碰撞振动与控制[M]. 第一版. 北京: 科学出版社, 2005. (JIN Dong-ping, HU Hai-yan. *Impact Vibration and Control*[M]. 1st ed. Beijing: Science Press, 2005. (in Chinese))
- [2] Dimentberg M F, Iourtchenko D V. Random vibrations with impacts; a review[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2004, **36**(2/4):229-254.
- [3] Metrikyn V S. On the theory of vibro-impact devices with randomly varying parameters[J]. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Radiofizika*, 1970, **13**: 4-6. (in Russian)
- [4] Stratonovich R L. *Topics in the Theory of Random Noise*[M]. Vol 1/2. New York: Gordon and Breach, 1963, 1967.
- [5] Dimentberg M F, Menyailov A. Certain stochastic problems of vibroimpact systems[J]. *Mechanics of Solids*, 1976, **11**(2): 4-7.
- [6] Jing H S, Sheu K C. Exact stationary solutions of the random response of a single-degree-of-freedom vibroimpact system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, **141**(3): 363-373.
- [7] Jing H S, Young M. Random response of a single-degree-of-freedom vibroimpact system with clearance[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1990, **19**(6): 789-798.
- [8] Huang Z L, Liu Z H, Zhu W Q. Stationary response of multi-degree-of-freedom vibro-impact systems under white noise excitations[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, **275**(1/2): 223-240.
- [9] FENG Jin-qian, XU Wei, RONG Hai-wu, WANG Rui. Stochastic response of Duffing-van der Pol vibro-impact system under additive and multiplicative random excitations[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2009, **44**(1):51-57.
- [10] Zhuravlev V F. A method for analyzing vibration-impact systems by means of special functions [J]. *Mechanics of Solids*, 1976, **11**(2): 23-27.
- [11] Dimentberg M F. Random vibrations of an isochronous SDOF bilinear system[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1996, **11**(4): 401-405.
- [12] Iourtchenko D V, Dimentberg M F. Energy balance for random vibrations of piecewise-conservative systems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, **248**(5): 913-923.
- [13] Feng Q, He H. Modeling of the mean Poincaré map on a class of random impact oscillators [J]. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2003, **22**(2): 267-281.
- [14] Iourtchenko D V, Song L L. Numerical investigation of a response probability density function of stochastic vibroimpact systems with inelastic impacts[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006, **41**(3):447-455.
- [15] Dimentberg M F, Iourtchenko D V, Vanewijk O. Subharmonic response of a quasi-isochronous vibroimpact system to a randomly disordered periodic excitation [J]. *Nonlinear Dynamics*, 1998, **17**(2): 173-186.
- [16] Nayfeh A H, Serhan S J. Response statistics of nonlinear systems to combined deterministic and random excitations[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1990, **25**(5): 493-509.
- [17] Zhuravlev V F. A method for analyzing vibration-impact systems by means of special functions [J]. *Mechanics of Solids*, 1976, **11**(2):23-27. (English translation of the Russian journal *Mekhanika Tverdogo Tela*)
- [18] Sanders J, Verhulst F. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems* [M]. New

- York: Springer-Verlag, 1985.
- [19] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京: 科学出版社, 1992. (ZHU Wei-qiu. *Random Vibration*[M]. Beijing: Science Press, 1992. (in Chinese))
- [20] Shinozuka M. Simulation of multivariate and multidimensional random processes[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1971, **19**(4): 357-367.
- [21] Shinozuka M. Digital simulation of random processes and its applications[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1972, **25**(1): 111-128.
- [22] RONG Hai-wu, XU Wei, MENG Guang, FANG Tong. Response of Duffing oscillator to combined deterministic harmonic and random excitation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, **242**(2): 362-368.
- [23] 马少娟, 徐伟, 李伟, 靳艳飞. 基于 Chebyshev 多项式逼近的随机 van der Pol 系统的倍周期分岔分析[J]. 物理学报, 2005, **54**(8): 3508-3515. (MA Shao-juan, XU Wei, LI Wei, JIN Yan-fei. Period-doubling bifurcation analysis of stochastic van der Pol system via Chebyshev polynomial approximation[J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(8): 3508-3515. (in Chinese))

## Subharmonic Response of a Single-Degree-of-Freedom Linear Vibroimpact System to a Narrow-Band Random Excitation

RONG Hai-wu<sup>1</sup>, WANG Xiang-dong<sup>1</sup>, LUO Qi-zhi<sup>1</sup>,  
XU Wei<sup>2</sup>, FANG Tong<sup>2</sup>

(1. Department of Mathematics, Foshan University,  
Foshan, Guangdong 528000, P. R. China;

2. Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University,  
Xi'an 710072, P. R. China)

**Abstract:** The subharmonic response of single-degree-of-freedom linear vibroimpact oscillator with a one-sided barrier to narrow-band random excitation was investigated. The analysis was based on a special Zhuravlev transformation, which reduces the system to one without impacts, or velocity jumps, thereby permitting the applications of asymptotic averaging over the period for slowly varying inphase and quadrature responses. The averaged stochastic equations were solved exactly by the method of moments for the mean square response amplitude for the case of zero offset. A perturbation-based moment closure scheme was proposed for the case of non-zero offset. The effects of damping, detuning, bandwidth and magnitudes of random excitations were analyzed. The theoretical analyses were verified by numerical results. Theoretical analyses and numerical simulations show that the peak amplitudes may be strongly reduced at large detunings.

**Key words:** single-degree-of-freedom linear vibroimpact system; subharmonic responses; Zhuravlev transformation method; random averaging method