

# 精确的磁流体动力学汇流解析解\*

章 骥<sup>1</sup>, 方铁钢<sup>1</sup>, 钟永芳<sup>2</sup>

- (1. 北卡罗莱纳州立大学 力学与航天航空工程系, 911 Oval Drive-3246 EBIII, 校园信箱 7910, 罗利 NC 27695, 美国;  
2. 宾夕法尼亚州立大学 比兰德学院 工学院, 伊利 PA 16563-1701, 美国)

**摘要:** 就一个特殊的磁流体动力学(MHD)流动, 即速度幂指数为 $-1$ 时的汇流, 得到著名的 Falkner-Skan 方程精确的解析解. 解析解是封闭的, 并有多重解分支. 分析了磁场参数和壁面伸长参数的影响, 发现了有趣的速度分布现象: 即使壁面固定, 回流区域依然出现. 在一个罕见的 Falkner-Skan MHD 流动中, 得到了一组解, 以精确封闭的解析公式表示, 极大地丰富了著名的 Falkner-Skan 方程的解析解, 也加深了对这重要又有趣方程的理解.

**关键词:** 相似解; Falkner-Skan 方程; 伸长表面; 磁流体动力学; 解析解; 汇流

**中图分类号:** O361 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.10.001

## 引 言

首先给出沿流线方向压力梯度的边界层流动, 即著名的 Falkner-Skan 方程<sup>[1-2]</sup>

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0, \quad (1)$$

相应的边界条件为

$$f(0) = \lambda, f'(0) = \gamma, f'(\infty) = 1, \quad (2)$$

其中,  $\lambda$  为壁面传质参数, 反映壁面上质浓度的浓度,  $\gamma$  为壁面的移动参数, 标志壁面伸长的长度,  $\beta$  为沿流线方向压力梯度的参数,  $\beta = 2m/(m+1)$ , 其中  $m$  为自由流的幂指数. 该著名方程在流体力学边界层流理论的发展中起着重要作用. 此后, 该方程的不同条件下, 发表了许多相关的研究成果<sup>[3-8]</sup>. 考虑传质和壁面伸长, 即  $f(0) \neq 0$  和  $\gamma$  或  $f'(0) \neq 0$ , 同时研究在不同  $\beta$  值下 Falkner-Skan 方程的解, 可以参看文献[9-23]. 最近, 一个特殊的 Falkner-Skan 方程 ( $m = -1$ ), 即汇流, 或者  $\beta \rightarrow -\infty$  收缩管道中的流动, 得到了考虑壁面伸长时闭合形式的解析解, 参看文献[24].

磁流体动力学(MHD)流动在工程中的应用是一个令人感兴趣的课题. MHD 流动可以在如下设备中出现: 发电机、反应堆冷却、静电过滤器以及 MHD 加速器等<sup>[25]</sup>. 通常, 磁场有稳定边界层流动的效应. Falkner-Skan MHD 流动的早期研究者可以在文献[26-30]中找到. Cobble<sup>[26]</sup>可能是研究 MHD 对 Falkner-Skan 流动影响的第一人. 以后该问题被拓展为一个更宽的

\* 收稿日期: 2010-06-22; 修订日期: 2011-06-17

作者简介: Fang Tiegang (联系人. Tel: 00-1-919-5515230; Fax: 00-1-919-5157968; E-mail: tfang2@ncsu.edu).

本文原文为英文, 黄锋 译, 张禄坤 校.

范围<sup>[27]</sup>. 近年来,应用一些最新的分析方法,求解与此相关问题的论文陆续发表<sup>[28-29]</sup>. 最新的文献[30]是研究流过移动楔形体的 MHD 流动问题. 但是,在上述所有的研究中,或是用级数给出的数值解,或是用级数给出的近似解. 关于 Falkner-Skan MHD 流动闭合形式的解析解,即使有也十分罕见. 本文的目的是,在  $m = -1$  ( $\beta \rightarrow -\infty$ ) 的汇流结构下,对 Falkner-Skan MHD 流动,提出了一个闭合形式的解析解,也是将 Magyari 的结果推广至 MHD 流动<sup>[24]</sup>.

## 1 数学公式

在自由流速度  $U(x)$  的导电液体中,考虑流体流过连续移动壁面时稳定的二维层流. 壁面的移动速度为  $U_w = \gamma U(x)$ , 其中  $\gamma$  为常数,壁面的传质速度为  $v_w = 0$ , 假定壁面不可渗透. 由于本文仅研究汇流结构,取  $x$ - 轴沿着壁面的移动方向,与自由流方向相反, $y$ - 轴垂直于  $x$ - 轴. 流动结构的示意图如图 1 所示. 边界层的连续方程和动量方程分别为

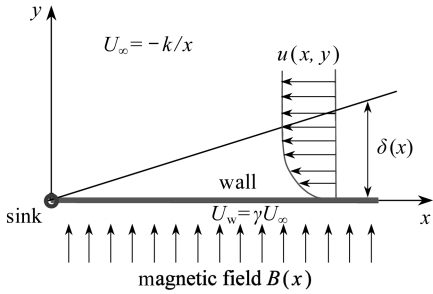


图 1 流动结构的示意图

Fig. 1 Schematic of the flow configuration

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + U(x) \frac{dU(x)}{dx} + \frac{\sigma B^2(x)}{\rho} [U(x) - u], \quad (4)$$

对应的边界条件为

$$\begin{cases} u(x, 0) = \gamma U(x), \\ v(x, 0) = 0, \\ u(x, \infty) = U(x), \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $u$  和  $v$  分别为  $x$  方向和  $y$  方向的速度分量,  $\nu$  为运动学粘性系数,  $\rho$  为流体密度,  $\sigma$  为流体的导电率.  $x$ - 方向作用着强度为  $B(x)$  的磁场, 诱导磁场忽略不计. 对于小 Reynolds 数磁场, 这组边界层方程是有效的. 根据流函数  $\Psi$  的定义, 有  $u = \partial \Psi / \partial y$ ,  $v = -\partial \Psi / \partial x$ . 对于  $m = -1$  的特殊情况, 即汇流, 设  $U(x) = -kx^{-1}$ . 通过转换得到的相似方程, 有着如下的流函数和相似变量:

$$\Psi = -\sqrt{k\nu} f(\eta), \quad (6)$$

$$\eta = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{k}{\nu}}. \quad (7)$$

根据上述定义, 得到  $u = U(x) f'(\eta)$ ,  $v = -\sqrt{k\nu} f'(\eta) \eta / x$ . 为了得到一个完整的相似方程, 要求磁场满足  $B(x) = B_0 x^{-1}$ , 其中  $B_0$  为常数. 因此, 方程(4)简化为如下的相似方程:

$$f''' - f'^2 + 1 + M(1 - f') = 0, \quad (8)$$

对应的边界条件为

$$f(0) = 0, f'(0) = \gamma, f'(\infty) = 1, \quad (9)$$

其中,  $M = \sigma B_0^2 / (\rho k)$  为磁场参数,  $M > 0$ , 反映磁场对流动的影响.  $M = 0$  时, 问题简化为流过移动边界的流动, 参看 Magyari 的文献[24, 31].

为了求解方程(8), 需要进一步作变换处理. 首先, 将方程(8)改写为

$$f''' + (1 + M + M^2/4) - (f'^2 + Mf' + M^2/4) = 0. \quad (10)$$

定义  $F' = f' + M/2$ , 方程(10)变为

$$F''' + (1 + M + M^2/4) - F'^2 = 0. \quad (11)$$

与之相对应的边界条件成为

$$F(0) = 0, F'(0) = \gamma + M/2, F'(\infty) = 1 + M/2. \tag{12}$$

方程(11)还可以作如下更进一步的变换:定义  $H(\varepsilon) = F(\eta)/a$ ,  $\varepsilon = b\eta$ , 其中  $a$  和  $b$  都是正实数, 得到  $F' = aH'b$ ,  $F'' = ab^2H'$ ,  $F''' = ab^3H''$ , 方程(11)变为

$$H''' + \frac{1 + M + M^2/4}{ab^3} - \frac{a}{b}H'^2 = 0. \tag{13}$$

设  $(1 + M + M^2/4)/(ab^3) = 1$  且  $a/b = 1$ , 得到

$$a = b = \left(1 + \frac{M}{2}\right)^{1/2}. \tag{14}$$

于是, 方程(11)成为经典的 Falkner-Skan 汇流方程:

$$H''' + 1 - H'^2 = 0, \tag{15}$$

相应的边界条件为

$$H(0) = 0, H'(0) = \left(\gamma + \frac{M}{2}\right) / \left(1 + \frac{M}{2}\right), H'(\infty) = 1. \tag{16}$$

基于上述变换, 函数  $H$  和  $f$  间有着如下关系:

$$f' = F' - \frac{M}{2} = abH' - \frac{M}{2} = \left(1 + \frac{M}{2}\right)H' - \frac{M}{2}, \tag{17}$$

$$f''(0) = ab^2H''(0) = \left(1 + \frac{M}{2}\right)^{3/2}H''(0). \tag{18}$$

## 2 解析解及其讨论

### 2.1 壁面剪切应力 $f''(0)$

为了求得壁面剪切应力, 容易得到

$$H''(0) = \pm \left[\frac{2}{3}\left(\gamma + \frac{3}{2}M + 2\right)(\gamma - 1)^2\right]^{1/2} \left(1 + \frac{M}{2}\right)^{-3/2}, \tag{19}$$

则壁面剪切应力  $f''(0)$  如下给出:

$$f''(0) = \pm \left[\frac{2}{3}\left(\gamma + \frac{3}{2}M + 2\right)(\gamma - 1)^2\right]^{1/2}. \tag{20}$$

为了更好地描绘出解域, 图 2 在不同的磁场参数下, 给出了  $f''(0) \sim \gamma$  的曲线. 当  $M = 0$  时, 结果简化为 Magyari<sup>[24]</sup> 所得到的结果.  $M > 0$  时的解域, 明显不同于  $M = 0$  时的解域. 图 2 显示出多重的解分支. 当壁面伸长参数为负,  $\gamma < 0$ , 实际壁面移动速度为正, 与自由流速度正相反. 壁面与汇之间物理上已分离.  $\gamma$  值在一个特定的范围内, 解才存在. 根据方程(20), 存在解的条件为  $\gamma + 3M/2 + 2 \geq 0$ , 那么

$$\gamma \geq -\frac{3}{2}M - 2. \tag{21}$$

当  $1 > \gamma > -3M/2 - 2$  时, 有分支 A 和 B 两个解(见图 2). 分支 A 的壁面应力为正, 分支 B 的壁面应力为负. 当  $\gamma = -3M/2 - 2$  时, 仅有 1 个解, 壁面没有剪切应力, 边界层处于流动分离的

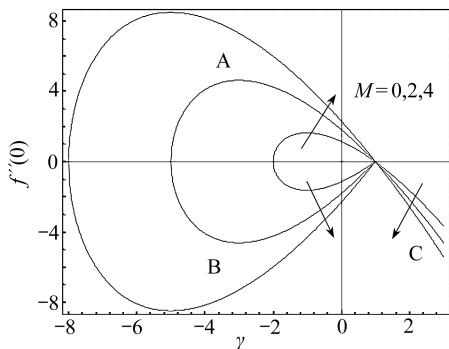


图 2 壁面应力  $f''(0)$  随着壁面伸长参数 ( $\gamma$ ) 和磁场参数 ( $M$ ) 的变化曲线

Fig. 2 The wall stress as a function of the wall stretching parameter ( $\gamma$ ) and magnetic parameter ( $M$ )

临界条件. 当  $\gamma < -3M/2 - 2$  时, 无解. 当  $0 \leq \gamma < 1$  时, 依然有 2 个解, 在该  $\gamma$  区域内, 壁面不是伸向汇 ( $0 < \gamma < 1$ ), 就是固定不动 ( $\gamma = 0$ ). 随着磁场参数  $M$  的增大, 解域向负  $\gamma$  值方向扩大. 当  $\gamma = 1$  时, 没有剪应力, 是一个无效解  $f(\eta) = \eta$ . 当  $\gamma > 1$  时, 数学上方程 (20) 有两个解. 但是, 方程 (20) 中取“+”的分支, 无法找到有限的流动速度, 与自由流速度相匹配, 实际上只好放弃<sup>[24]</sup>. 只有“-”分支才有物理意义. 当  $\gamma > 1$ , 壁面快于自由流向汇移动, 壁面剪应力为负值, 且其绝对值随着磁场参数和壁面伸长参数的增大而增大.

对于各个给定的  $M$  值,  $\gamma$  存在一个负的临界值, 使得壁面应力  $|f''(0)|$  达到局部的最大值.  $\gamma$  的临界值可以通过令  $\partial[2(\gamma + 3M/2 + 2)(\gamma - 1)^2/3]/\partial\gamma = 0$ , 由方程 (20) 解得

$$\gamma_{cr} = -M - 1. \quad (22)$$

## 2.2 速度分布曲线 $f'(\eta)$

解方程 (15), 得到速度分布曲线

$$f'(\eta) = \left(1 + \frac{M}{2}\right) \left[ -2 + 3 \tanh^2 \left( \frac{\sqrt{1 + M/2}}{\sqrt{2}} \eta + \operatorname{artanh} \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\gamma + M/2}{1 + M/2} + \frac{2}{3}} \right) \right] - \frac{M}{2} \quad (\text{分支 A 和 C}), \quad (23)$$

$$f'(\eta) = \left(1 + \frac{M}{2}\right) \left[ -2 + 3 \tanh^2 \left( \frac{\sqrt{1 + M/2}}{\sqrt{2}} \eta - \operatorname{artanh} \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\gamma + M/2}{1 + M/2} + \frac{2}{3}} \right) \right] - \frac{M}{2} \quad (\text{分支 B}). \quad (24)$$

为了显示流动特征, 图 3 至图 6 在壁面伸长参数和磁场参数的不同组合下, 描绘出一些典型的速度分布曲线. 图 3 显示,  $\gamma$  取最低值 ( $\gamma = -3M/2 - 2$ ) 时, 两个解分支与壁面剪切自由速度分布曲线相一致. 随着  $M$  的增大,  $|\gamma|$  值也增大. 由于伸长参数是负数, 壁面附近边界层的流动出现逆转. 注意到这里的负速度, 意味着壁面附近的流体沿着  $x$ - 轴的正方向移动. 随着  $M$  的增大, 壁面附近的逆向流动变得越发强劲.  $\gamma = -3M/2 - 2$  处的流动速度变为

$$f'(\eta) = - \left(2 + \frac{3M}{2}\right) + 3 \left(1 + \frac{M}{2}\right) \tanh^2 \left( \frac{\sqrt{1 + M/2}}{\sqrt{2}} \eta \right). \quad (25)$$

当  $-2 - 3M/2 < \gamma < 1$  时, 有两个解. 图 4 ( $f''(0) < 0$ ) 和图 5 ( $f''(0) > 0$ ) 分别绘出了  $\gamma = 0$  的两个特例. 当  $\gamma = 0$  时, 壁面固定, 没有伸长. 对于壁面应力为正值的上面一个解分支 (图 2 中的分支 A), 其解与正规的 Falken-Skan 解 ( $m \neq -1$ ) 非常类似. 随着  $\eta$  的增大, 速度单调地增加并逼近于自由流速度. 随着  $M$  的增大, 边界层的厚度在变薄. 但是, 对于壁面应力为负值的下面一个解分支 (图 2 中的分支 B), 出现了重要的回流现象. 最大的回流速度随着磁场参数的增大而增大, 但是,  $M$  值越大, 速度逼近自由流速度越快, 边界层厚度也越薄. 分支 B 的最大回流速度为

$$f'(\eta_{\min}) = -2 - \frac{3}{2} M, \quad (26)$$

其中

$$\eta_{\min} = \left( \operatorname{artanh} \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\gamma + M/2}{1 + M/2} + \frac{2}{3}} \right) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + M/2}}.$$

有趣的是, 方程 (26) 并不依赖于壁面伸长参数, 正如图 6 所示. 图 6 还给出了当  $\gamma \rightarrow 1$  时, 速度分布曲线另外一些有趣的特性. 壁面附近的流动看起来像一个倒立的“钟”. 随着  $\gamma$  值的增大,

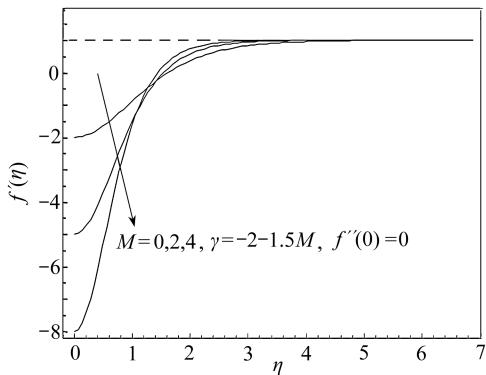


图3 磁场参数  $M$  取不同数值,  $\gamma = -2 - 1.5M$  时的速度分布曲线

Fig. 3 The velocity profiles at the lower limit of  $\gamma (= -2 - 1.5M)$  for different values of the magnetic parameter  $M$

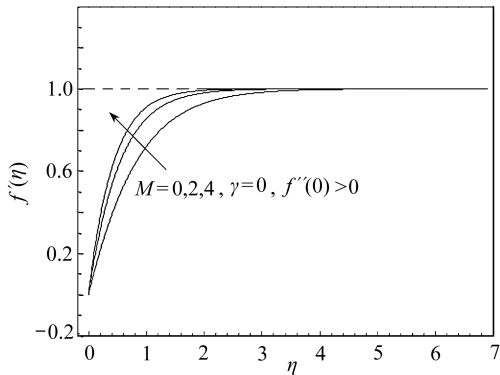


图4 磁场参数  $M$  取不同数值,  $\gamma = 0$ ,  $f''(0) < 0$  时的速度分布曲线

Fig. 4 The velocity profiles for different values of the magnetic parameter at  $\gamma = 0, f''(0) < 0$

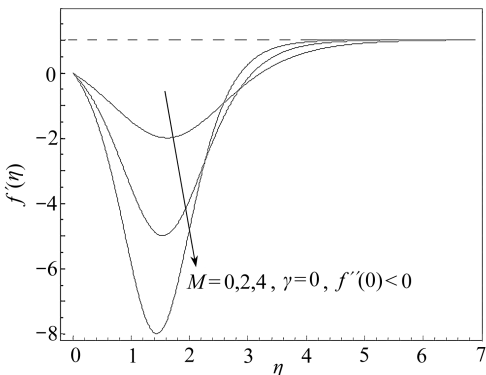


图5 磁场参数  $M$  取不同数值,  $\gamma = 0$ ,  $f''(0) > 0$  时的速度分布曲线

Fig. 5 The velocity profiles for different values of the magnetic parameter at  $\gamma = 0, f''(0) > 0$

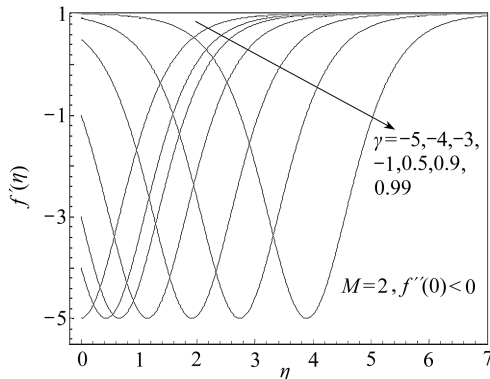


图6 壁面伸长参数  $\gamma$  取不同数值,  $M = 2$ ,  $f''(0) < 0$  时的速度分布曲线

Fig. 6 The velocity profiles for different values of the wall stretching parameter at  $M = 2, f''(0) < 0$

速度分布曲线简单地移位,或者越发偏离壁面的距离。所有的速度分布曲线有着相似的外形。对于分支 B 来说,当  $-2 - 3M/2 < \gamma \leq 0$  时,回流区域出现在下面的不等式中:

$$0 < \eta < \left( \operatorname{artanh} \sqrt{\frac{3M+4+2\gamma}{3M+6}} + \operatorname{artanh} \sqrt{\frac{3M+4}{3M+6}} \right) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+M/2}}, \quad (27)$$

当  $0 < \gamma < 1$  时,回流区域出现在下面的不等式中:

$$\left( \operatorname{artanh} \sqrt{\frac{3M+4+2\gamma}{3M+6}} - \operatorname{artanh} \sqrt{\frac{3M+4}{3M+6}} \right) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+M/2}} < \eta < \left( \operatorname{artanh} \sqrt{\frac{3M+4+2\gamma}{3M+6}} + \operatorname{artanh} \sqrt{\frac{3M+4}{3M+6}} \right) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+M/2}}. \quad (28)$$

事实上,对于分支 B 来说,在  $0 < \gamma < 1$  范围内,由式(28)给出的区间中,速度分布曲线是关系

$$\eta_{\min} = \left( \operatorname{artanh} \sqrt{\frac{3M+4+2\gamma}{3M+6}} \right) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+M/2}}$$

对称的,该位置正是最小的流动速度,或者是出现最大回流速度的地方.图7在不同的 $M$ 值下,给出了 $\eta_{\min}$ 和壁面伸长参数 $\gamma$ 之间的关系.上面讨论了分支B的变化.分支A的回流仅出现在下面区间中:

$$0 < \eta < \left( \operatorname{artanh} \sqrt{\frac{3M+4+2\gamma}{3M+6}} - \operatorname{artanh} \sqrt{\frac{3M+4}{3M+6}} \right) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+M/2}}, \quad (29)$$

当 $-2-3M/2 < \gamma < 0$ ,  $\gamma$ 出现在壁面上,回流速度达到最大.

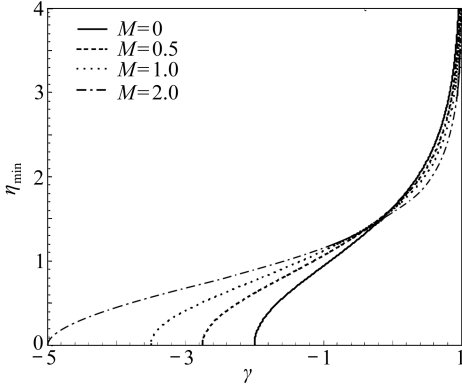


图7 在不同 $M$ 值下, $\eta_{\min}$ 和壁面伸长参数 $\gamma$ 之间的关系曲线

Fig. 7 The relationship of  $\eta_{\min}$  to the wall stretching parameter for different values of  $M$

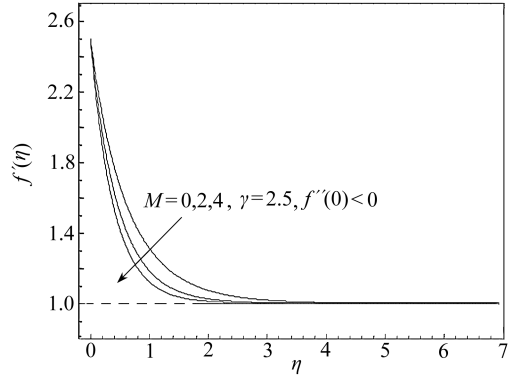


图8  $M$ 取不同数值, $\gamma = 2.5$ ,  $f''(0) < 0$ 时的速度分布曲线

Fig. 8 The velocity profiles for different values of the magnetic parameter at  $\gamma = 2.5$ ,  $f''(0) < 0$

当 $\gamma > 1$ 时,正如文献[24]所述的理由,上面一个解成物理上的奇异解.当 $f''(0) < 0$ 时,仅有一个解,即图2中的分支C.图8显示,随着 $M$ 的增大,速度逼近自由流.当 $\gamma > 1$ ,且 $f''(0) > 0$ 时,解不存在,也可以如下通过解的数学表达式来阐述.从方程解(23)和(24)可以看出,当 $\gamma > 1$ 时,由于辐角函数值大于1,项 $\operatorname{artanh} \sqrt{((\gamma + M/2)/(1 + M/2))/3 + 2/3}$ 变成复数.假设

$$\operatorname{artanh} \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\gamma + M/2}{1 + M/2} + \frac{2}{3}} = A + Bi, \quad i = \sqrt{-1}.$$

当辐角函数 $\operatorname{artanh}(\tau)$  ( $\tau > 1$ ) 为正值时,得到 $A = (1/2) \ln((1 + \tau)/(\tau - 1))$  (其中 $\tau = \sqrt{((\gamma + M/2)/(1 + M/2))/3 + 2/3}$ ),  $B = \pi/2$ . 可以发现, $A$ 是一个正值.那么,函数 $\tanh^2(\sqrt{1 + M/2} \eta / \sqrt{2} + \operatorname{artanh} \sqrt{((\gamma + M/2)/(1 + M/2))/3 + 2/3})$ 的辐角为 $C + \pi i/2$ ,其中 $C = \sqrt{1 + M/2} \eta / \sqrt{2} + A$ 为正,则函数值为实数,且没有任何奇异点.但是,方程(24)中函数 $\tanh^2(\sqrt{1 + M/2} \eta / \sqrt{2} - \operatorname{artanh} \sqrt{((\gamma + M/2)/(1 + M/2))/3 + 2/3})$ 的辐角为 $D - \pi i/2$ ,其中 $D = \sqrt{1 + M/2} \eta / \sqrt{2} - A$ .当 $D = 0$ 时,存在一个奇异点,出现在 $\eta_s = (1/2) \ln[(1 + \tau)/(\tau - 1)] (\sqrt{2}/\sqrt{1 + M/2})$ 处.

对于 $\gamma = 0$ 的特例情况,相当于条件:壁面没有移动.对收缩管道中MHD流动,或者具有固定壁面的汇流来说,这时候的解是对文献[32]给出的解的扩充.对固定壁面的MHD汇流来说,壁面应力为

$$f''(0) = \pm \sqrt{M + \frac{4}{3}}. \quad (30)$$

对一个大数值的磁场参数,当  $M \rightarrow \infty$  时,  $f''(0) \rightarrow \pm \sqrt{M}$ . 因此,速度分布曲线变为

$$f'(\eta) = \left(1 + \frac{M}{2}\right) \left[ -2 + 3 \tanh^2 \left( \frac{\sqrt{1 + M/2}}{\sqrt{2}} \eta + \operatorname{artanh} \sqrt{\frac{1}{3} \frac{M}{2 + M} + \frac{2}{3}} \right) \right] - \frac{M}{2}, \quad (31)$$

$$f'(\eta) = \left(1 + \frac{M}{2}\right) \left[ -2 + 3 \tanh^2 \left( \frac{\sqrt{1 + M/2}}{\sqrt{2}} \eta - \operatorname{artanh} \sqrt{\frac{1}{3} \frac{M}{2 + M} + \frac{2}{3}} \right) \right] - \frac{M}{2}. \quad (32)$$

对于大数值的  $M$ ,带“+”号的分支(即方程(31)),速度分布曲线近似地逼近于 Heaviside 阶梯函数.

总之,本文解析地求解了 MHD 汇流问题,是在非常罕见的情况下,得到了 Falkner-Skan MHD 流动的闭合解.本文所得到的解,不仅为边界层流动的数值计算,提供了一个验证的基准,而且从物理上丰富了边界层流动理论.

### 3 结 论

本文就 MHD 流动的一个特殊情况,即幂指数等于-1 的汇流问题,得到了著名的 Falkner-Skan 方程精确的解析解.封闭形式的解析解,有着多重的解分支.分析了磁场参数和壁面伸长参数的影响.无论壁面伸长参数为正值还是负值,解都存在.随着磁场参数的增大,壁面伸长参数向着负值范围扩大.此外,壁面应力的绝对值也随着磁场参数的增大而增大.得到了壁面伸长参数负值范围处壁面剪切自由解.壁面应力的数值,首先随着壁面伸长参数的增大而增大,达到局部峰值之后,开始随着壁面伸长参数的增大而减小,然后延伸到另一个剪切自由的无效解,最后随着壁面伸长参数的增大而增大.速度分布曲线结果中出现了一些有趣的现象:对于一个确定的解分支,发生回流,并且壁面附近速度的负值奇高(速度值远大于1).在一个罕有的 Falkner-Skan MHD 流动中得到了这一组解,以精确的解析公式表示,极大地丰富了著名的 Falkner-Skan 方程的解析解,加深了对这些重要又有趣的流体流动类型的理解.

#### 参考文献:

- [1] Falkner V M, Skan S W. Some approximate solutions of the boundary layer equations[J]. *Phil Mag*, 1931, **12**: 865-896.
- [2] Hartree D R. On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer[J]. *Proc of the Cambridge Philosophical Society*, 1937, **33** (2): 223-239.
- [3] Weyl H. On the differential equation of the simplest boundary-layer problems[J]. *Ann of Math*, 1942, **43**: 381-407.
- [4] Rosehead L. *Laminar Boundary Layers*[M]. London: Oxford University Press, 1963.
- [5] Hartman P. *Ordinary Differential Equations*[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964.
- [6] Stewartson K. Further solutions of the Falkner-Skan equations[J]. *Proc of the Cambridge Phil Soc Math and Phys Sciences*, 1954, **50**: 454-465.
- [7] Libby P A, Liu T M. Further solutions of the Falkner-Skan equation[J]. *AIAA J*, 1967, **5** (5): 1040-1042.



- [8] Zatorska M B, Banks W H H. A new solution branch of the Falkner-Skan equation[J]. *Acta Mechanica*, 2001, **152**(1/4): 197-201.
- [9] Schlichting H, Busmann K. Exakte Lösungen für die laminare Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen[J]. *Schr Deutsch Akad Luftfahrtforschung Ser B*, 1943, **7**(2): 25-69. (in German)
- [10] Nickel K. Eine einfache Abschätzung für Grenzschichten[J]. *Ing Arch Bd*, 1962, **31**(2): 85-100.
- [11] Yang H T, Chien L C. Analytic solutions of the Falkner-Skan equation when  $\beta = -1$  and  $\gamma = 0$ [J]. *SIAM J Appl Math*, 1975, **29**(3): 558-569.
- [12] Sakiadis B C. Boundary-layer behavior on continuous solid surface I—boundary-layer equations for two-dimensional and axisymmetric flow[J]. *J AIChE*, 1961, **7**(1): 26-28.
- [13] Sakiadis B C. Boundary-layer behavior on continuous solid surface II—boundary-layer equations for two-dimensional and axisymmetric flow[J]. *J AIChE*, 1961, **7**: 221-225.
- [14] Klemp J P, Acrivos A. A method for integrating the boundary-layer equations through a region of reverse flow[J]. *J Fluid Mech*, 1972, **53**(1): 177-191.
- [15] Vajravelu K, Mohapatra R N. On fluid dynamic drag reduction in some boundary layer flows [J]. *Acta Mechanica*, 1990, **81**(1/2): 59-68.
- [16] Fang T. Further study on a moving-wall boundary-layer problem with mass transfer[J]. *Acta Mechanica*, 2003, **163**(3/4): 183-188.
- [17] Weidman P D, Kubitschek D G, Davis A M J. The effect of transpiration on self-similar boundary layer flow over moving surfaces[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2006, **44**(11/12): 730-737.
- [18] Riley N, Weidman P D. Multiple solutions of the Falkner-Skan equation for flow past a stretching boundary[J]. *SIAM J Appl Math*, 1989, **49**(5): 1350-1358.
- [19] Liao S J. A uniformly valid analytic solution of two-dimensional viscous flow over a semi-infinite flat plate[J]. *J Fluid Mech*, 1999, **385**: 101-128.
- [20] Sachdev P L, Kudenatti R B, Bujurke N M. Exact analytic solution of a boundary value problem for the Falkner-Skan equation[J]. *Studies in Applied Mathematics*, 2008, **120**(1): 1-16.
- [21] Fang T, Zhang J. An exact analytical solution of the Falkner-Skan equation with mass transfer and wall stretching[J]. *Int J Non-Linear Mech*, 2008, **43**(6): 1000-1006.
- [22] Yao B. Approximate analytical solution to the Falkner-Skan wedge flow with the permeable wall of uniform suction[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, **14**(8): 3320-3326.
- [23] Yao B, Chen J. Series solution to the Falkner-Skan equation with stretching boundary[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, **208**(1): 156-164.
- [24] Magyari E. Falkner-Skan flows past moving boundaries: an exactly solvable case[J]. *Acta Mechanica*, 2009, **203**(1/2): 13-21.
- [25] Sutton G W, Sherman A. *Engineering Magnetohydrodynamics* [M]. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [26] Cobble M H. Magnetofluiddynamic flow with a pressure-gradient and fluid injection[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 1977, **11**(3): 249-256.
- [27] Soundalgekar V M, Takhar H S, Singh M. Velocity and temperature field in MHD Falkner-Skan flow[J]. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1981, **50**: 3139-3143.
- [28] Abbasbandy S, Hayat T. Solution of the MHD Falkner-Skan flow by Hankel-Pade method[J].



- Physics Letters A*, 2009, **373**(7): 731-734.
- [29] Abbasbandy S, Hayat T. Solution of the MHD Falkner-Skan flow by homotopy analysis method[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, **14**(9/10): 3591-3598.
- [30] Ishak A, Nazar R, Pop I. MHD boundary-layer flow past a moving wedge[J]. *Magnetohydrodynamics*, 2009, **45**(1): 103-110.
- [31] Schlichting H, Gersten K. *Boundary Layer Theory*[M]. 8th Revised and Enlarged Edition. Springer, 2000: 171-174.
- [32] Pohlhausen K. Zur näherungsweise integration der differentialgleichung der laminaren grenzschicht[J]. *J Appl Math Mech (ZAMM)*, 1921, **1**(4): 252-268.

## Exact Analytical Solution of the Magnetohydrodynamic Sink Flow

ZHANG Ji<sup>1</sup>, FANG Tie-gang<sup>1</sup>, ZHONG Yong-fang<sup>2</sup>

(1. *Mechanical and Aerospace Engineering Department, North Carolina State University, 911 Oval Drive-3246 EBIII, Campus Box 7910, Raleigh, NC 27695, USA;*

2. *School of Engineering, Penn State Erie, the Behrend College Erie, PA, 16563-1701, USA*)

**Abstract:** An exact analytical solution of the famous Falkner-Skan equation for magneto-hydrodynamic (MHD) flow was obtained for a special case, namely the sink flow with a velocity power index of  $-1$ . The solution was given in a closed form. Multiple solution branches were observed. The effects of the magnetic parameter and the wall stretching parameter were analyzed. Interesting velocity profiles were observed with reversal flow regions even for a stationary wall. These solutions provide a rare case of the Falkner-Skan MHD flow with exact analytical closed form formula and greatly enrich the analytical solution to the celebrated Falkner-Skan equation and the understanding of this important and interesting equation.

**Key words:** similarity solution; Falkner-Skan equation; stretching surface; magnetohydrodynamics; analytical solution; sink flow