

# 磁场和热辐射对可变表面热通量作用下的 竖直圆锥体自然对流的影响\*

G·帕拉尼<sup>1</sup>, K·Y·金<sup>2</sup>

(1. Ambedkar 公立艺术学院 数学系, 钦奈 600-039, 泰米尔纳德邦, 印度;  
2. 仁荷大学 机械工程学院, 仁川 402-751, 韩国)

**摘要:** 就圆锥体表面受到可变表面热通量作用, 计及磁场和热辐射的综合影响, 数值研究了流经竖直圆锥体的自然对流及其热交换特点. 认为流体是灰色的、吸收-发射的辐射介质, 而非散射介质, 通过近似变换, 将自由对流区中流动的边界层控制方程, 简化为无量纲方程. 利用 Crank-Nicolson 形式的隐式有限差分法(具有收敛快、精度高、无条件稳定的特点), 求解了无量纲的控制方程. 得到了数值结果, 以及空气和水中的速度、温度、局部和平均的壁面剪应力、局部和平均的 Nusselt 数. 将所得到的结果与先前文献报道的结果进行比较, 发现两者有着很好的一致性.

**关键词:** 顶点; 磁流体动力学; 辐射; 有限差分; 表面摩擦因数; 竖直圆锥体

**中图分类号:** O357; O17      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.05.006

## 引 言

自由对流流动及其热交换, 在多种工业设备的热工设计中, 以及核反应堆、地球物理的流体动力学中, 是一个需要着重考虑的问题. 流过竖立物体的瞬时自然对流问题, 在工程技术方面有着广泛的应用. 这类热交换增强设备, 在不同的电器和电子设备类、反应堆类设备中出现. 在制造工艺中, 如热挤压、金属成形和晶体生长, 热交换的影响扮演着重要的角色. 特别是锥体表面中热交换增强的研究非常有用. 当受热表面和流体接触时, 由于温度差的原因产生浮力引起自然对流. 热通量广泛地应用于工业、工程和科学领域中. 热通量传感器可以应用于工业测量和控制系统中. 少数应用例子如检测污垢(锅炉污垢传感器)、炉子监测器(高炉监测器/通用锅炉监测器)和火炬监测器.

很多学者研究过二维轴对称流动的层状自然对流. Merk 等<sup>[1-2]</sup>提出了等温轴对称形式相似解的一般关系, 他们的研究指出竖直圆锥体有一个稳定状态解. Alamgir<sup>[3]</sup>利用积分方法, 全面研究了流过竖直圆锥体的层状自然对流中的热交换. Pop 等<sup>[4]</sup>研究了经过竖直圆锥体层状自由对流中的不可压缩性效应. Pop 等<sup>[5]</sup>将浮力分成正向流动和反向流动两种情况, 对于  $Pr$  取任意值的流体, 分析了经过竖直等温圆锥体的稳定层状混合对流的边界层流动. 他们利用 Keller-Box 方法, 数值地求解所得到的非相似的边界层方程. Takhar 等<sup>[6]</sup>在稳态流动中讨论了

\* 收稿日期: 2010-12-15; 修订日期: 2012-01-04

作者简介: G. Palani (联系人. E-mail: gpalani32@yahoo.co.in).

本文原文为英文, 黄雅意译, 张禄坤校.

热物理性能,对流过等温竖直圆锥体气体的自由对流的影响,他们假设热传导率、动粘度和比定压热容,随着绝对温度的幂指数规律变化。近年来,关于轴对称物体层状自由对流的理论研究得到了广泛的关注,尤其是在均匀的和不均匀的表面热能量分布的情况下, Lin<sup>[7]</sup>在给定均匀的热通量条件下,报道了正圆锥体层状自由对流的相似解。Na 等<sup>[8]</sup>研究了无横向弯曲效应的平截头圆锥体的层状自然对流。Gorla 等<sup>[9]</sup>就无横向弯曲效应(即大圆锥角,当边界层厚度比圆锥体局部半径小时)的竖直的平截头圆锥体,给出了幂律流体的层状自由对流数值解。Kumari 等<sup>[10]</sup>研究了竖直旋转圆锥体在均匀壁面热通量作用下的自由对流。Hossain 等<sup>[11]</sup>在一个热分层的介质中:不是均匀的表面温度,就是均匀的表面热通量,研究浸入其间的竖直圆锥体层状自然对流和热交换问题的非相似解。他们使用有限差分法、级数解方法和渐近解方法,得到了非相似的边界层方程。近年来, Bapuji 等<sup>[12]</sup>就不可压缩粘性流体流过竖直的圆锥体,圆锥体表面有非均匀的热通量——作为到圆锥体顶点距离的幂函数而变化时,研究其瞬时的层状自由对流,他们采用隐式的有限差分法求解无量纲的控制方程。

很多学者研究了在磁场作用下,导电流体层状自由对流边界层流动,因为它们在工程技术领域中有着广泛的应用。在磁场作用下粘性不可压缩导电流体的流动有许多重要应用,如在人造纤维和尼龙的制造中,塑料制品的挤压、原油提纯、磁性材料的加工、玻璃制造时的控制工艺、不同地球物理情况中的纸张的制造,等等。在很多工业加工中,线形或板形聚合材料的冷拉工艺在生产线上占有重要位置。在很多不同的工业应用中,包括钢铁工业中熔铸铁流动的磁性控制、核反应堆中液态金属的冷却,磁性对流都扮演了重要的角色。

Sparrow 等<sup>[13]</sup>研究了浮力和感应磁力共同作用下的自由对流热交换,他们观察到磁场的存在,对液态金属自由对流热交换影响明显。Cess<sup>[14]</sup>研究了自由对流热交换和热辐射的相互作用问题。当外部流动或伸展平面由静止调整为脉冲运动后,粘性导电流体朝向二维物体或者伸展平面的驻点区, Kumari 等<sup>[15]</sup>研究其在外加磁场作用不对称流动的发展。Takhar 等<sup>[16]</sup>在横向磁场作用下,竖直圆锥体旋转角速度随时间而变化时,数值研究其不稳定的混合对流问题。近年来, Ozturk<sup>[17]</sup>给出了磁场作用下旋转球体不稳定层状混合对流的分析。Chamkha 等<sup>[18]</sup>在磁场和产热/吸热共同作用下,数值研究了旋转竖直圆锥体的不稳定层状传热传质。Ece<sup>[19]</sup>通过相似变换,顶点朝下的加热圆锥体以恒定角速度绕对称轴旋转时,研究横向磁场作用下层状自由对流边界层流动。

辐射流出现在很多工业和环境处理中,例如,加热和冷藏室、化石燃料的燃烧和能量的处理,大型敞式水池的蒸发,天体物理学的流动和太阳能技术。Soundalgekar 等<sup>[20]</sup>考虑了半无限竖直平板上光学薄灰色气体的辐射自由对流流动。Hossain 等<sup>[21]</sup>研究了辐射对等温竖直平板上混合对流的影响。Raptis 等<sup>[22]</sup>研究了热辐射对竖直移动平板上自由对流的影响。Muthucumaraswamy 等<sup>[23]</sup>利用 Laplace 变换技术,研究了辐射对脉冲运动的、温度可变的无限竖直平板流动的影响。另一方面, Raptis 等<sup>[24]</sup>研究了有辐射作用时,平板的磁流体动力学流动,得到了磁场存在时平均温度、平均速度的解析解,并讨论了辐射对温度的影响。Yih<sup>[25]</sup>对 Rosseland 扩散近似的多孔介质中的等温圆锥体,数值研究了辐射对混合对流的影响。

Takhar 等<sup>[26]</sup>在一个理想化地质学的多孔介质中,研究热辐射通量、热传导、Reynolds 数和非 Darcy (Forchheimer 拖曳和 Brinkman 边界阻力)体力,对竖直平面的稳定层状边界层流动的综合影响。Afify<sup>[27]</sup>利用相似变量,对磁场作用下伴有化学反应的竖直等温圆锥体表面,研究辐射对其自由对流和传质的影响。Bég 等<sup>[28]</sup>就接近非 Darcy 多孔体的、脉冲运动的竖直平板,对粘性不可压缩灰色吸收/发射的流体,研究了热辐射和多孔拖曳力对其自然对流和传热传质的

影响. Abd El-Naby 等<sup>[29]</sup>在横向均匀磁场作用下,研究辐射对半无限竖直多孔平板磁流体动力学不稳定自由对流的影响.然而,当竖直圆锥体表面热通量可以变化时,磁场和热辐射对其自然对流的影响尚未得到研究者的关注.本文的目的是,就可变表面热通量作用下的半无限竖直圆锥体,研究磁场和热辐射对粘性不可压缩导电流体自由对流的综合影响.认为流体是灰色的、吸收-发射的辐射介质,而非散射介质,同时,在能量方程中采用 Rosseland 近似来描述辐射的热交换.利用有限差分法求解无量纲的控制方程组.

## 1 基本方程和数学分析

考虑粘性不可压缩的导电流体,流经可变表面热通量和热辐射作用下的竖直圆锥体,圆锥体周围温度为  $T_\infty'$ ,研究其轴对称的瞬态层流自由对流.均匀的横向磁场垂直作用于圆锥体,与  $y$  方向相比, $x$  方向的辐射热通量可以忽略不计.考虑流体为灰色的、吸收-发射的辐射介质,而非散射介质.开始时,假设圆锥体表面和周围流体是静止的.然后,当  $t' > 0$  时,假设热量是由圆锥体表面以  $q_w(x) = x^n$  的速率注入流体,并且保持该速率不变( $n$  为常数).选择坐标系的原点为圆锥体的顶点, $x$  轴沿着圆锥体表面方向, $y$  轴与之垂直向外,如图 1 所示.这里, $\phi$  为圆锥体的半垂直角, $r$  为圆锥体的局部半径.假设除了体力项中的密度——在自由对流中起着重要作用——随温度而变化之外,所有的流体特性均保持不变.

磁场方程就是通常的电磁方程和磁流体方程,但需要考虑运动和磁场之间的相互作用.在大部分的问题中,包括导线的 Maxwell 位移电流可以忽略不计,从而认为电流在闭合电路中流动.假设流动的速度与光速相比非常小,即相对而言其影响可以忽略,Maxwell 方程组可写为如下形式<sup>[29-30]</sup>:

$$\begin{aligned}\Delta \times \mathbf{B} &= \mu \mathbf{J}, \quad \Delta \cdot \mathbf{J} = 0, \\ \Delta \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \Delta \cdot \mathbf{B} = 0.\end{aligned}$$

Ohm 定律可写为如下形式:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (1)$$

其中, $\mathbf{u}$  为速度矢量, $\mathbf{E}$  为电场强度, $\mathbf{B}$  为磁场感应强度, $\mu$  为磁导率, $\mathbf{J}$  为电流密度, $\sigma$  为电导率.

在运动方程中,还需要加上单位体力  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ ,该体力表示磁场和流体运动之间的耦合作用,即所谓的 Lorentz 力.

导电流体运动所引起的感应磁场可以忽略.对于小 Reynolds 数,该假设是合理的.这对一些实际的工程问题来说相当重要,实际工程中电导率都不大,不考虑外加电场作用时,电离气体极化作用的影响可以忽略,于是取  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ (即,不考虑边界层外面的对流, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$  和  $\Delta \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}$ ,从而  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ).

因此,Lorentz 力可变为  $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ .在下文中,将忽略感应磁场.当磁 Reynolds 数不大时,这样假设是合理的.从而得到更好的近似,用  $\sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 = -\sigma B_0^2 \mathbf{u}$  来替代 Lorentz 力.

因导电流体运动所引起的感应磁场可以忽略.对于小 Reynolds 数,该假设是合理的.忽略粘性、压力梯度和磁耗散,并考虑 Boussinesq 近似,边界层的控制方程如下:

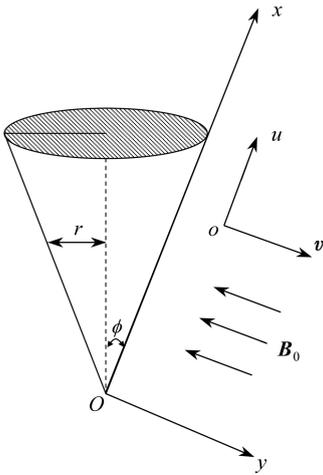


图 1 流动模型和坐标系

Table 1 Flow model and coordinate system

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T' - T'_\infty) \cos \phi + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u, \quad (3)$$

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial T'}{\partial t'} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + v \frac{\partial T'}{\partial y} \right] = k \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} - \frac{\partial q_r}{\partial y}, \quad (4)$$

这里使用了 Rosseland 近似(参见文献[31]), 于是

$$q_r = -\frac{4\sigma^*}{3k^*} \frac{\partial T'^4}{\partial y}, \quad (5)$$

相应的初始-边界条件为

$$\begin{cases} t' \leq 0: u = 0, v = 0, T' = T'_\infty, & \text{对所有的 } x \text{ 和 } y, \\ t' > 0: u = 0, v = 0, \frac{\partial T'}{\partial y} = -\frac{q_w(x)}{k}, & \text{当 } y = 0, \\ u = 0, T' = T'_\infty, & \text{当 } x = 0, \\ u \rightarrow 0, T' \rightarrow T'_\infty, & \text{当 } y \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (6)$$

假设流体内部的温度差足够小, 使得  $T'^4$  可以用温度的线性函数来表达. 将  $T'^4$  展开为  $T'_\infty$  的 Taylor 级数, 并略去高阶项. 从而,

$$T'^4 \cong 4T'_\infty^3 T' - 3T'_\infty^4. \quad (7)$$

将式(5)和(7)代入式(4), 得到

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial T'}{\partial t'} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + v \frac{\partial T'}{\partial y} \right] = k \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \frac{16\sigma^* T'_\infty^3}{3k^*} \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2}, \quad (8)$$

其中,  $u$  和  $v$  分别为  $x$  和  $y$  方向上的速度分量,  $T'$  为边界层中流体的温度,  $T'_\infty$  为远离平板时的温度,  $t'$  为时间,  $g$  为重力加速度,  $r$  为圆锥体的局部半径,  $k$  为流体的热传导率,  $\beta$  为热膨胀体积系数,  $\rho$  为密度,  $c_p$  为比定压热容,  $\phi$  为圆锥体的半垂线角,  $\nu$  为动粘度,  $B_0^2$  为磁场感应,  $k^*$  为平均吸收系数,  $\sigma$  为电导率,  $\sigma^*$  为 Stefan Boltzmann 常数,  $\mu$  为粘性系数.

物理上有趣的量还有局部表面摩擦因数  $\tau_x$  和局部 Nusselt 数  $Nu_x$ , 分别给出如下:

$$\tau_x = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad Nu_x = \frac{x}{T'_w - T'_\infty} \left( -\frac{\partial T'}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (9)$$

另外, 圆锥体表面上的平均表面摩擦因数  $\bar{\tau}_L$  和平均传热系数  $\bar{h}$  分别为

$$\bar{\tau}_L = \frac{2\mu}{L^2} \int_0^L x \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx, \quad \bar{h} = \frac{2k}{L^2} \int_0^L \frac{x}{T'_w - T'_\infty} \left( -\frac{\partial T'}{\partial y} \right)_{y=0} dx. \quad (10)$$

因此, 平均 Nusselt 数为

$$\overline{Nu}_L = \frac{L\bar{h}}{k} = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{x}{T'_w - T'_\infty} \left( -\frac{\partial T'}{\partial y} \right)_{y=0} dx. \quad (11)$$

引入如下无量纲量:

$$\begin{cases} X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{L} Gr_L^{1/5}, U = \frac{uL}{\nu} Gr_L^{-2/5}, V = \frac{vL}{\nu} Gr_L^{-1/5}, t = \frac{\nu t'}{L^2} Gr_L^{2/5}, \\ R = \frac{r}{L}, T = \frac{T' - T'_\infty}{q_w(L)L/k} Gr_L^{1/5}, Gr_L = \frac{g\beta q_w(L)L^4}{\nu^2 k} \cos \phi, \\ Pr = \frac{\mu c_p}{k}, N = \frac{k^* k}{4\sigma^* T'_\infty^3}, M = \frac{\sigma B_0^2 L^2}{\rho \nu} Gr_L^{-2/5}, \end{cases} \quad (12)$$

其中,  $Pr$  为流体的 Prandtl 数,  $M$  为磁场参数,  $N$  为 Rosseland 或 Stark 传导的辐射参数,  $Gr_L$  为修正的 Grashof 数,  $L$  为参考长度.

边界层厚度始终不大, 厚度增长缓慢, 不会像圆锥体半径那样快速增长. 边界层中一点的局部半径, 可以用圆锥体表面的局部半径取代, 从而有  $r = x \sin \phi$ .

方程(2)和(3)及(8)可简化为以下的无量纲形式:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{U}{X} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = T + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - MU, \quad (14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \frac{3N+4}{3N} \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}. \quad (15)$$

相应地, 无量纲形式的初始-边界条件为

$$\begin{cases} t \leq 0: U = 0, V = 0, T = 0, & \text{对所有的 } x \text{ 和 } y, \\ t > 0: U = 0, V = 0, \frac{\partial T}{\partial Y} = -X^n, & \text{当 } Y = 0, \\ U = 0, T = 0, & \text{当 } X = 0, \\ U \rightarrow 0, T \rightarrow 0, & \text{当 } Y \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (16)$$

局部的无量纲表面摩擦因数和局部 Nusselt 数分别为

$$\tau_x = Gr_L^{3/5} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{Y=0}, \quad Nu_x = \frac{Gr_L^{1/5}}{T_{Y=0}} X^{n+1}. \quad (17)$$

另外, 无量纲的平均表面摩擦因数和平均 Nusselt 数分别为

$$\bar{\tau} = 2Gr_L^{3/5} \int_0^1 X \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{Y=0} dX, \quad \bar{Nu} = 2Gr_L^{1/5} \int_0^1 \frac{X^{n+1}}{T_{Y=0}} dX. \quad (18)$$

## 2 数值方法

利用 Crank-Nicolson 形式的隐式有限差分法, 在初始-边界条件(16)下求解无量纲的控制方程(13)~(15). 对上述利用 Crank-Nicolson 形式的有限差分方程, Bapuji 等<sup>[12]</sup> 讨论过其求解方法. 考虑边长分别为  $X_{\max} (= 1)$  和  $Y_{\max} (= 18)$  的矩形积分区域, 这里,  $Y_{\max}$  对应  $Y = \infty$ , 即远离动量和热边界层位置. 作一些初步运算之后, 取  $Y$  的最大值为 18, 使得边界条件(16)的最后 2 个式子得到满足. 为了得到计算上经济且可靠的网格系统, 独立地选择网格. 新网格尺寸测试之后, 最后确定在边长为  $\Delta X = 0.01$ ,  $\Delta Y = 0.02$  的矩形网格, 时间步长为  $\Delta t = 0.01$ . 在这种情况下, 空间网格尺寸在一个方向上减小 50%, 然后在两个方向上均减小 50%, 并对结果进行比较. 可以看出, 当网格尺寸在  $X$  方向和  $Y$  方向均减小 50% 时, 结果在小数点后面的第 4 位出现不同. 因此, 认为上面所提到的网格尺寸对于计算来说是合理的. 直至达到稳定状态, 计算才终止. 对于所有的网格点上, 假如在两个连续的时间步长上,  $U$  值和温度  $T$  值的绝对误差都小于  $10^{-5}$ , 就得到了稳态解.

利用 5 点近似公式计算方程(17)和(18)中的导数值, 然后, 利用 Newton-Cotes 闭积分公式计算积分.

### 3 有限差分法的稳定性和收敛性

正如 Carnahan 等<sup>[32]</sup>所解释的,对于不变的网格尺寸,可以用 von-Neumann 法作为有限差分法稳定性的判别准则.假设当  $t = 0$  时,  $U$  和  $T$  的 Fourier 展开式的一般项为  $e^{i\alpha X} e^{i\beta Y}$  (这里  $i = \sqrt{-1}$ ). 对于随后的时间  $t$ , 这些项将变为

$$U = F(t) e^{i\alpha X} e^{i\beta Y}, \quad T = G(t) e^{i\alpha X} e^{i\beta Y}. \quad (19)$$

将式(19)代入方程(14)和(15)的有限差分形式,假设系数  $U$  和  $T$  经过任一时间步长仍为常数,用  $F'$  和  $G'$  表示一个时间步长后的值.简化后可得

$$\frac{F' - F}{\Delta t} + \frac{U}{2} \frac{(F' + F)(1 - e^{-i\alpha\Delta X})}{\Delta X} + \frac{V}{2} \frac{(F' + F) i \sin(\beta\Delta Y)}{\Delta Y} = \frac{G' + G}{2} + \frac{(F' + F)(\cos(\beta\Delta Y) - 1)}{(\Delta Y)^2} - \frac{M}{2}(F' + F), \quad (20)$$

$$\frac{G' - G}{\Delta t} + \frac{U}{2} \frac{(G' + G)(1 - e^{-i\alpha\Delta X})}{\Delta X} + \frac{V}{2} \frac{(G' + G) i \sin(\beta\Delta Y)}{\Delta Y} = \frac{1}{Pr} \frac{3N + 4}{3N} \frac{(G' + G)(\cos(\beta\Delta Y) - 1)}{(\Delta Y)^2}. \quad (21)$$

方程(20)和(21)可改写为

$$(1 + A)F' = (1 - A)F + \frac{G' + G}{2} \Delta t, \quad (22)$$

$$(1 + B)G' = (1 - B)G, \quad (23)$$

其中

$$A = \frac{U}{2} \frac{\Delta t}{\Delta X} (1 - e^{-i\alpha\Delta X}) + \frac{V}{2} \frac{\Delta t}{\Delta Y} i \sin(\beta\Delta Y) - (\cos(\beta\Delta Y) - 1) \frac{\Delta t}{(\Delta Y)^2} + \frac{\Delta t}{2} M,$$

$$B = \frac{U}{2} \frac{\Delta t}{\Delta X} (1 - e^{-i\alpha\Delta X}) + \frac{V}{2} \frac{\Delta t}{\Delta Y} i \sin(\beta\Delta Y) - \frac{(\cos(\beta\Delta Y) - 1)}{Pr} \frac{3N + 4}{3N} \frac{\Delta t}{(\Delta Y)^2}.$$

将方程(23)代入方程(22),可以消去  $G'$ , 于是方程(22)变为

$$(1 + A)F' = (1 - A)F + \frac{G}{1 + B} \Delta t. \quad (24)$$

方程(24)和(23)可以写成如下的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} F' \\ G' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - A}{1 + A} & D_1 \\ 0 & \frac{1 - B}{1 + B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}, \quad (25)$$

其中

$$D_1 = \frac{\Delta t}{(1 + A)(1 + B)}.$$

现在,对于有限差分法的稳定性,放大矩阵的每个特征值的模数都不超过单位 1. 由于矩阵方程(25)是三角矩阵,特征值为其对角元素. 因此,放大矩阵的特征值为  $(1 - A)/(1 + A)$  和  $(1 - B)/(1 + B)$ . 在这种假设下,  $U$  处处非负,而  $V$  处处非正,可得

$$A = 2a \sin^2\left(\frac{\alpha\Delta X}{2}\right) + 2c \sin^2\left(\frac{\beta\Delta Y}{2}\right) + i(a \sin(\alpha\Delta X) - b \sin(\beta\Delta Y)) + \frac{M}{2} \Delta t,$$

其中

$$a = \frac{U}{2} \frac{\Delta t}{\Delta X}, \quad b = \frac{|V|}{2} \frac{\Delta t}{\Delta Y}, \quad c = \frac{\Delta t}{(\Delta Y)^2}.$$

由于  $A$  的实部大于或等于 0, 通常满足  $|(1-A)/(1+A)| \leq 1$ . 类似地,  $|(1-B)/(1+B)| \leq 1$ . 因此, 有限差分法是无条件稳定的. 局部截断误差为  $O(\Delta t^2 + \Delta Y^2 + \Delta X)$ , 并且当  $\Delta t, \Delta X$  和  $\Delta Y$  趋于 0 时, 局部截断误差趋于 0. 因而, 该格式是兼容的. 稳定性和兼容性也就确保了格式的收敛性.

## 4 结果和讨论

为了确定数值结果的精度, 将本文的结果与先前文献报道的结果进行对比. 当  $n = 0, N = 0, M = 0, Pr$  取不同数值时, 将本文  $X = 1.0$  处温度分布和局部摩擦因数的数值结果, 与 Lin<sup>[7]</sup> 的类似结果进行比较, 如表 1 所示. 可以看到彼此结果一致性很好.

表 1 当表面热通量均匀,  $n = 0, N = 0, M = 0$  时,  $X = 1.0$  处的稳态温度和局部摩擦因数与 Lin<sup>[7]</sup> 的结果相比较

Table 1 Comparison of steady state temperature and local skin friction at  $X = 1.0$  with those of Lin<sup>[7]</sup> for uniform surface heat flux,  $n = 0, N = 0, M = 0$

$Pr$	temperature $T$		local skin-friction $\bar{\tau}$	
	Lin <sup>[7]</sup>	present results	Lin <sup>[7]</sup>	present results
0.72	1.786 5	1.788 40	1.224 0	1.227 05
1	1.632 7	1.634 54	1.079 7	1.082 62
2	1.363 3	1.364 77	0.829 3	0.831 55
4	1.150 8	1.151 69	0.637 3	0.638 78
6	1.046 4	1.047 08	0.546 2	0.547 36
8	0.979 6	0.980 01	0.489 5	0.490 40
10	0.931 4	0.931 58	0.449 4	0.450 21
100	0.567 5	0.562 89	0.184 0	0.183 11

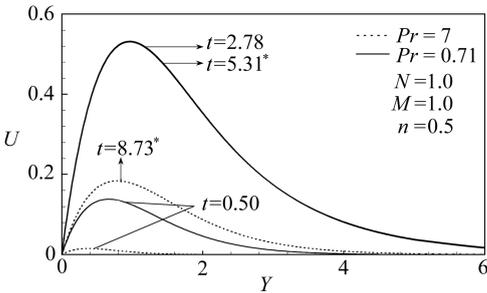


图 2  $Pr$  取不同数值时,  $X = 1.0$  处的瞬时速度分布曲线 (\* 代表稳态)

Fig. 2 Transient velocity profiles at  $X = 1.0$  for different  $Pr$  (\* steady state)

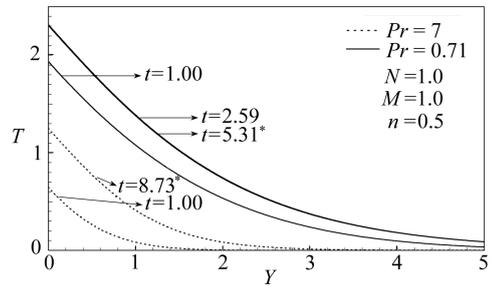


图 3  $Pr$  取不同数值时,  $X = 1.0$  处的瞬时温度分布曲线 (\* 代表稳态)

Fig. 3 Transient temperature profiles at  $X = 1.0$  for different  $Pr$  (\* steady state)

通过数值计算, 流体的 Prandtl 数取不同数值时, 图 2 和图 3 分别给出了  $X = 1.0$  处瞬时的速度分布曲线和温度分布曲线. 流体的速度和温度随着时间的增加而增加, 直至到达瞬时的最大值, 然后出现中等的下降, 最终达到稳定状态. 空气 ( $Pr = 0.71$ ) 的速度梯度通常比水 ( $Pr =$

7.0) 大.这在物理上是合理的,因为 Prandtl 数的增加,是由于流体粘性的增加,使得流体变稠,从而造成流体速度的减小. Prandtl 数对温度场的影响非常重要,随着 Prandtl 数的增加,温度呈现递减性下降.这与物理事实相一致,热边界层厚度随着  $Pr$  的增加而减小.还可以看出,随着流体的 Prandtl 数的增加,达到稳定状态流动所需的时间在增加,同时热边界层的厚度在减小.

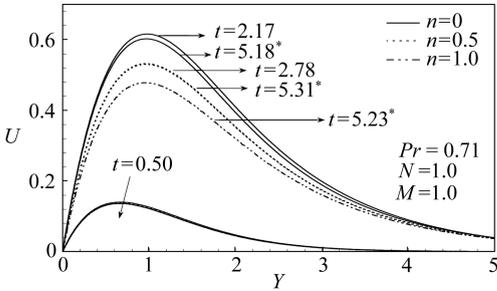


图4  $n$  取不同数值时,  $X = 1.0$  处的瞬时速度分布曲线 (\* 代表稳态)  
 Fig.4 Transient velocity profiles at  $X = 1.0$  for different  $n$  (\* steady state)

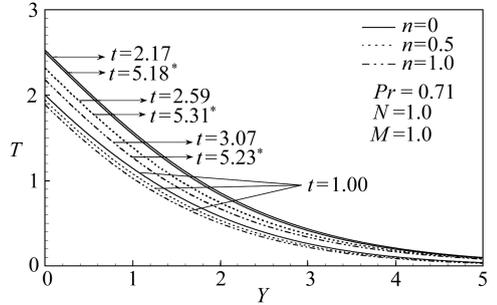


图5  $n$  取不同数值时,  $X = 1.0$  处的瞬时温度分布曲线 (\* 代表稳态)  
 Fig.5 Transient temperature profiles at  $X = 1.0$  for different  $n$  (\* steady state)

当指数  $n$  取不同数值时,图4和图5就圆锥体主侧边即  $X = 1.0$  处,分别给出了瞬时的速度和温度分布曲线.随着  $n$  值的增加,沿圆锥体顶点附近表面的脉冲驱动力在减小(即,沿圆锥体顶点附近表面热通量梯度随着  $n$  值的增加而减小).因此,瞬时的最大值和稳态值之间的差,随着  $n$  值的增加而减小.对于更高的  $n$  值,未出现瞬时的最大值.

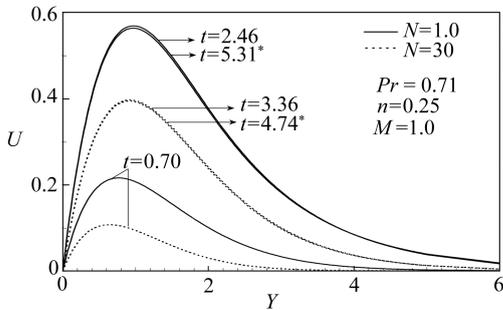


图6  $N$  取不同数值时,  $X = 1.0$  处的瞬时速度分布曲线 (\* 代表稳态)  
 Fig.6 Transient velocity profiles at  $X = 1.0$  for different  $N$  (\* steady state)

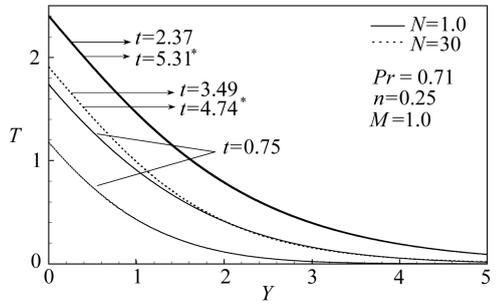


图7  $N$  取不同数值时,  $X = 1.0$  处的瞬时温度分布曲线 (\* 代表稳态)  
 Fig.7 Transient temperature profiles at  $X = 1.0$  for different  $N$  (\* steady state)

图6和图7就空气的辐射参数  $N$  取不同数值时,分别给出  $X = 1.0$  处的瞬时的速度和温度分布曲线.可以看出,温度随着辐射参数  $N$  的增加而下降.这个结果与所预测的结果定性一致,因为辐射的影响,造成流体的能量传输率下降,从而流体的温度下降.可以看出,辐射参数的增加,导致空气速度递减下降.还可以看出,随着辐射参数  $N$  的增加,瞬时最大值与稳态值之间的差值在减小.注意到随着辐射参数  $N$  的增加,达到稳定状态流动所需要的时间在减小,意味着辐射有助于流体迅速地达到稳定状态.

图8和图9就空气的磁场参数  $M$  取不同数值时,分别给出了速度和温度分布.可以看出,

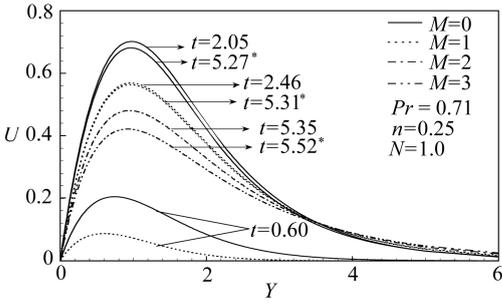


图 8  $M$  取不同数值时,  $X = 1.0$  处的瞬时速度分布曲线 (\* 代表稳态)

Fig. 8 Transient velocity profiles at  $X = 1.0$  for different  $M$  (\* steady state)

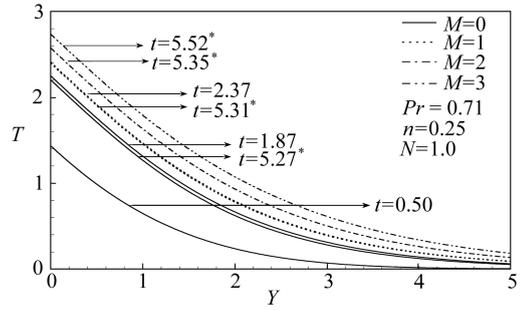


图 9  $M$  取不同数值时,  $X = 1.0$  处的瞬时温度分布曲线 (\* 代表稳态)

Fig. 9 Transient temperature profiles at  $X = 1.0$  for different  $M$  (\* steady state)

与较小的磁场参数相比, 磁场参数越大, 达到稳定状态所需要的时间更多. 随着  $M$  的增加, 瞬时最大值和稳态值之间的差值在减小. 对于更大的  $M$  值, 不会出现瞬时的最大值. 横向磁场对电导流体的影响, 产生一个称为 Lorentz 力的阻力. Lorentz 力使得流体运动趋缓, 同时使流体温度上升.

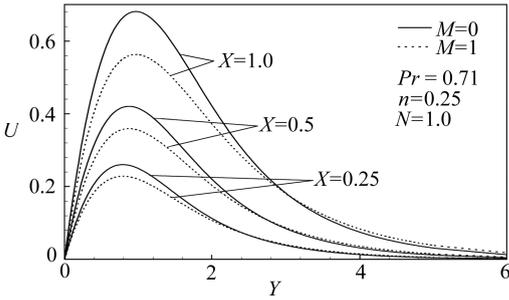


图 10  $M$  取不同数值时,  $X = 0.25, 0.5, 1.0$  处的稳态速度分布曲线

Fig. 10 Steady state velocity profiles for different  $M$  at  $X = 0.25, 0.5, 1.0$

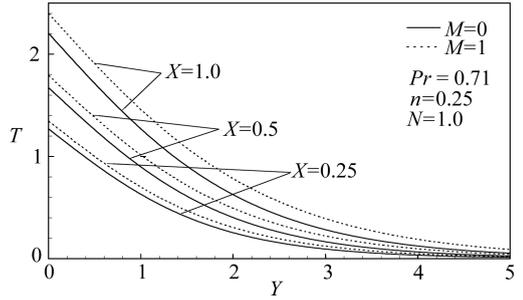


图 11  $M$  取不同数值时,  $X = 0.25, 0.5, 1.0$  处的稳态温度分布曲线

Fig. 11 Steady state temperature profiles for different  $M$  at  $X = 0.25, 0.5, 1.0$

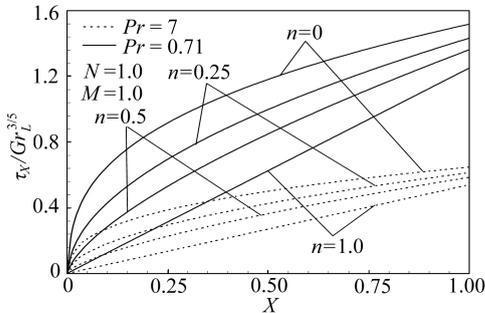


图 12  $Pr$  和  $n$  取不同数值时, 稳态的局部表面摩擦因数

Fig. 12 Steady state local skin friction for different  $Pr$  and  $n$

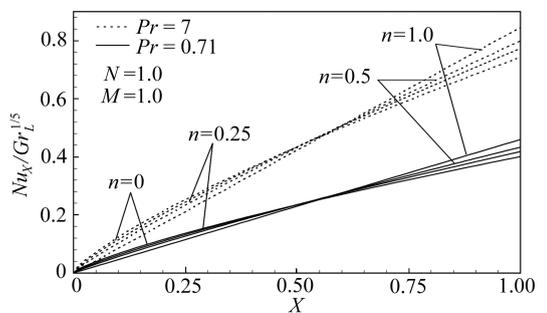


图 13  $Pr$  和  $n$  取不同数值时, 稳态的局部 Nusselt 数

Fig. 13 Steady state local Nusselt number for different  $Pr$  and  $n$

图 10 和图 11 就不同的  $M$  值,分别给出了  $X = 0.25, 0.5, 1.0$  处稳态的速度和温度分布曲线. 温度和速度沿圆锥体表面增加. 可以看到, 磁场对圆锥体主侧边即  $X = 1.0$  处的影响更大.

在热交换问题中, 研究参数对局部剪应力、平均剪应力和传热率的影响是重要的. 对于不同的 Prandtl 数和指数  $n$ , 利用方程(17)数值地计算局部表面摩擦因数和 Nusselt 数的稳态值, 并在图 12 和图 13 中分别描绘出来. 随着  $n$  值的增加, 局部表面摩擦因数在减小, 并且在圆锥体顶点( $X = 0$ ) 附近,  $n$  值对局部表面摩擦因数的影响更大, 这种影响随着离圆锥体顶点的距离增加逐渐减小. 在圆锥体顶点附近, 随着指数  $n$  的增加, 局部 Nusselt 数在减小, 但是随着沿圆锥体面距离的增加, 这种趋势慢慢发生变化并出现逆转. 还可以看到, 随着流体 Prandtl 数的增加, 局部表面摩擦因数在减小. 与其他参数相比,  $Pr$  对传热率的影响更显著, 因为  $Pr$  值越小, 温度分布曲线厚度越高. Prandtl 数越高, Nusselt 数越大.

就磁场参数  $M$  和辐射参数  $N$  取不同数值时, 图 14 和图 15 分别给出了圆锥体主侧稳态的局部剪应力和传热率, 图 16 和图 17 分别给出了圆锥体主侧瞬时的局部剪应力和传热率. 局部的壁面剪应力随着  $M$  和  $N$  值的增加而减小. 局部的传热率随着  $M$  值的增加而减小, 但是, 随着  $N$  值的增加而增加, 因为阻力使速度下降, 同时使温度升高.

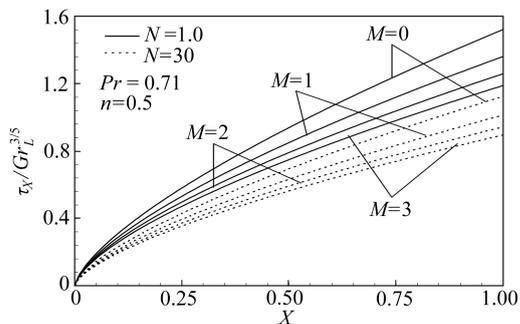


图 14  $N$  和  $M$  取不同数值时, 稳态的局部表面摩擦因数

Fig. 14 Steady state local friction for different  $N$  and  $M$

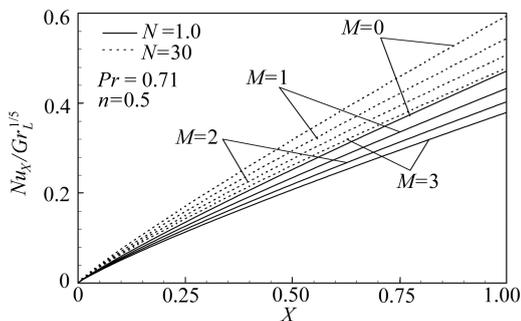


图 15  $N$  和  $M$  取不同数值时, 稳态的局部 Nusselt 数

Fig. 15 Steady state local Nusselt number for different  $N$  and  $M$

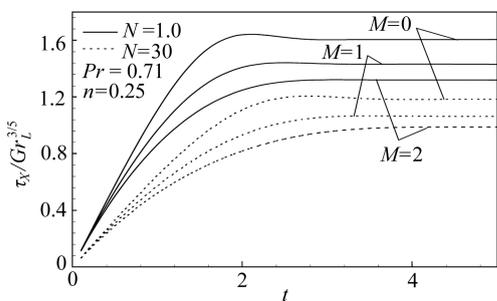


图 16  $N$  和  $M$  取不同数值时,  $X = 1.0$  处的瞬时局部表面摩擦因数

Fig. 16 Transient local skin friction at  $X = 1.0$  for different  $N$  and  $M$

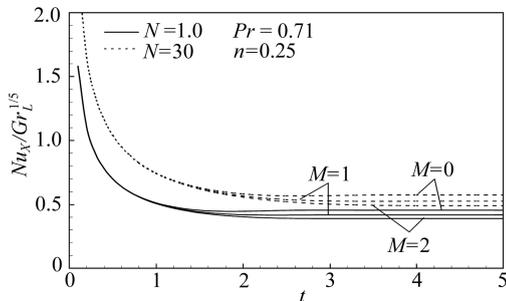


图 17  $N$  和  $M$  取不同数值时,  $X = 1.0$  处的瞬时局部 Nusselt 数

Fig. 17 Transient local Nusselt number at  $X = 1.0$  for different  $N$  and  $M$

对于不同的  $Pr, n, N$  和  $M$  值, 图 18 至图 20 给出了平均的表面摩擦因数和平均的 Nusselt

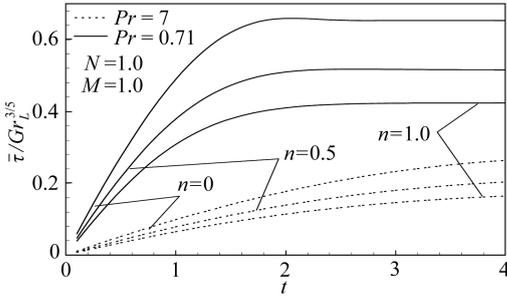


图 18  $Pr$  和  $n$  取不同数值时, 平均的表面摩擦因数  
Fig. 18 Average skin friction for different  $Pr$  and  $n$

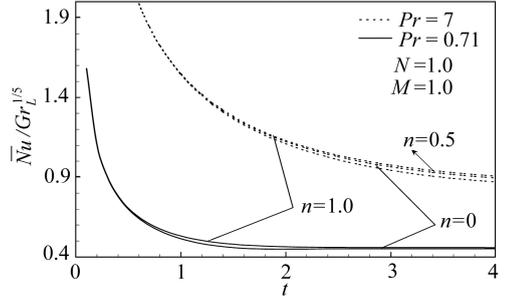


图 19  $Pr$  和  $n$  取不同数值时, 平均的 Nusselt 数  
Fig. 19 Average Nusselt number for different  $Pr$  and  $n$

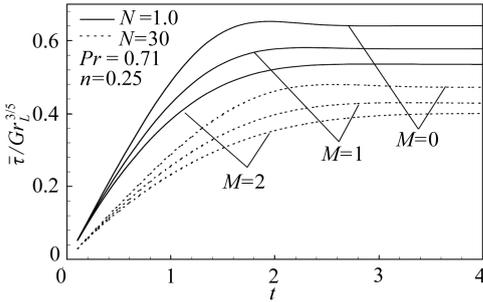


图 20  $N$  和  $M$  取不同数值时, 平均的表面摩擦因数  
Fig. 20 Average skin friction for different  $N$  and  $M$

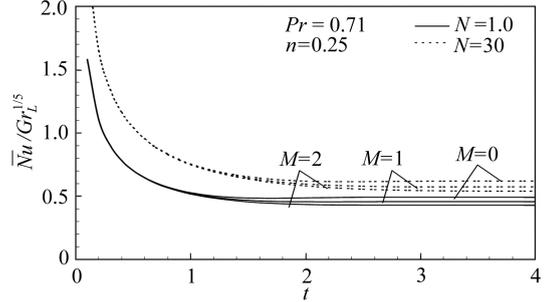


图 21  $N$  和  $M$  取不同数值时, 平均的 Nusselt 数  
Fig. 21 Average Nusselt number for different  $N$  and  $M$

数。当指数  $n$  减小时,  $n$  对平均表面摩擦因数的影响更大。随着  $Pr$  的增加, 平均壁面剪应力在减小, 因为速度随着  $Pr$  的增加而减小, 如图 2 所示。另外, 从这些图中还可以得知, 随着磁场参数  $M$  的增加, 平均表面摩擦因数在减小。因此, 磁场的存在有助于减小界面上的摩擦阻力。还可以看到, 随着辐射参数  $N$  的增加, 平均壁面剪应力在减小, 因为辐射参数  $N$  的增加, 流体的速度趋缓, 如图 6 所示。

开始时平均 Nusselt 数较高, 然后, 随着时间的增长而下降, 并且在一段时间之后, 达到稳定状态。可以看出, 经过不长的时间, 平均 Nusselt 数达到各自变化参数相应的常数。表明仅在开始的时候有热传导。图 19 显示,  $n$  对平均 Nusselt 数不产生显著的影响。随着磁场参数  $M$  的增加, 平均 Nusselt 数在下降。但是, 随着指数  $n$  或辐射参数  $N$  的减小, 平均 Nusselt 数在下降。还发现, 平均 Nusselt 数随着流体 Prandtl 数的减小而减小。

## 5 结 论

竖直圆锥体外表面在可变表面热通量作用下, 计及磁场和热辐射的共同影响时, 建立起其不稳定 MHD 自然对流及其热交换的数学模型。将边界层控制方程无量纲化后, 运用有限差分法求解。得到结论如下:

- 1) 当有磁场存在时, 提高外加磁场的强度, 将会减缓边界层内沿圆锥体壁面流体的运动; 而随着磁场强度的增加, 沿圆锥体壁面流体的温度将升高;
- 2) 热通量指数  $n$  的影响: 圆锥体顶点附近局部表面摩擦因数的影响最大, 随着离圆锥体顶点距离的增大而慢慢减小;

- 3) 因热辐射增加的缘故,无量纲温度出现下降;
- 4) (与较低的辐射参数值相比)辐射参数  $N$  越高,达到稳定状态的速度分布越快,意味着辐射的存在有利于快速达到稳定状态;
- 5) 由于辐射的存在,平均表面摩擦因数在减小。

#### 参考文献(References):

- [1] Merk H J, Prins J A. Thermal convection laminar boundary layer I [J]. *Appl Sci Res*, 1954, **4**(1):11-24.
- [2] Merk H J, Prins J A. Thermal convection laminar boundary layer II [J]. *Appl Sci Res*, 1954, **4**(3): 195-206.
- [3] Alamgir M. Overall heat transfer from vertical cones in laminar free convection: an approximate method[J]. *ASME Journal of Heat Transfer*, 1989, **101**: 174-176.
- [4] Pop I, Takhar H S. Compressibility effects in laminar free convection from a vertical cone [J]. *Appl Sci Res*, 1991, **48**(1): 71-82.
- [5] Pop I, Grosan T, Kumar M. Mixed convection along a vertical cone for fluids of any Prandtl number case of constant wall temperature [J]. *Int J Numerical Methods Heat Fluid Flow*, 2003, **13**(7): 815-829.
- [6] Takhar H S, Chamkha A J, Nath G. Effect of thermo-physical quantities on the natural convection flow of gases over a vertical cone[J]. *Int J Engg Sci*, 2004, **42**: 243-256.
- [7] Lin F N. Laminar convection from a vertical cone with uniform surface heat flux[J]. *Letters Heat Mass Transfer*, 1976, **3**(1/2): 49-58.
- [8] Na T Y, Chiou J P. Laminar natural convection over a frustum of a cone[J]. *Appl Sci Res*, 1979, **35**(5/6): 409-421.
- [9] Gorla R S R, Krishnan V, Pop I. Natural convection flow of a power-law fluid over a vertical frustum of a cone under uniform heat flux conditions[J]. *Mech Res Comm*, 1994, **21**: 139-146.
- [10] Kumari M, Pop I. Free convection over a vertical rotating cone with constant wall heat flux [J]. *J Appl Mech Engg*, 1998, **3**(3): 451-464.
- [11] Hossain M A, Paul S C, Mandal A C. Natural convection flow along a vertical circular cone with uniform surface temperature and surface heat flux in a thermally stratified medium[J]. *Int J Numer Methods Heat Fluid Flow*, 2002, **12**(3): 290-305.
- [12] Bapuji P J, Ekambavannan K, Pop I. Transient laminar free convection from a vertical cone with non-uniform surface heat flux[J]. *Studia Univ, Mathematica*, 2008, **53**(1): 75-99.
- [13] Sparrow E M, Cess R D. The effect of a magnetic field on free convection heat transfer[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1961, **3**(4):267-274.
- [14] Cess R D. The interaction of thermal radiation with free convection heat transfer[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1966, **9**(11):1269-1277.
- [15] Kumari M, Nath G. Development of two dimensional boundary layer with an applied magnetic field due to an impulsive motion[J]. *Indian J Pure Appl Math*, 1999, **30**: 695-708.
- [16] Takhar H S, Chamkha A J, Nath G. Unsteady mixed convection flow from a rotating vertical cone with magnetic field[J]. *Heat and Mass Transfer*, 2003, **39**(4): 297-304.

- [17] Ozturk A. Unsteady laminar mixed convection about a spinning sphere with a magnetic field [J]. *Heat and Mass Transfer*, 2005, **41**(10): 864-874.
- [18] Chamkha A J, Al-Mudaf A. Unsteady heat and mass transfer from a rotating vertical cone with a magnetic field and heat generation or absorption effects[J]. *Int J Thermal Sci*, 2005, **44**(3): 267-276.
- [19] Ece M C. Free convection flow about a vertical spinning cone under a magnetic field[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, **179**(1): 231-242.
- [20] Soundalgekar V M, Takhar H S. Radiation effects on free convection flow past a semi-infinite vertical plate[J]. *Modelling Measurement and Control, B*, 1993, **51**: 31-40.
- [21] Hossain M A, Takhar H S. Radiation effects on mixed convection along a vertical plate with uniform surface temperature[J]. *Heat and Mass Transfer*, 1996, **31**(4): 243-248.
- [22] Raptis A, Perdikis C. Radiation and free convection flow past a moving plate[J]. *Appl Mech and Engg*, 1999, **4**(4): 817-821.
- [23] Muthucumaraswamy R, Ganesan P. Radiation effects on flow past an impulsively started infinite vertical plate with variable temperature[J]. *Int J Appl Mech Engg*, 2003, **8**(1): 125-129.
- [24] Raptis A, Massalas C V. Magnetohydrodynamic flow past a plate by the presence of radiation [J]. *Heat and Mass Transfer*, 1998, **34**(2/3): 107-109.
- [25] Yih K A. Radiation effects on mixed convection over an isothermal cone in porous media[J]. *Heat and Mass Transfer*, 2001, **37**(1): 53-57.
- [26] Takhar H S, Beg O A, Chamkha A J, Filip D, Pop I. Mixed radiation-convection boundary layer flow of an optically dense fluid along a vertical flat plate in a non-Darcy porous medium [J]. *Int J Applied Mechanics and Engineering*, 2003, **8**(3): 483-496.
- [27] Afify A A. The effect of radiation on free convective flow and mass transfer past a vertical isothermal cone surface with chemical reaction in the presence of a transverse magnetic field [J]. *Can J Physics*, 2004, **82**(6): 447-458.
- [28] Bég O A, Zueco J, Takhar H S, Bég T A. Network numerical simulation of impulsively-started transient radiation-convection heat and mass transfer in a saturated Darcy-Forchheimer porous medium[J]. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2008, **13**(3): 281-303.
- [29] Abd El-Naby M A, Elbarbary M E, AbdElazem N Y. Finite difference solution of radiation on MHD unsteady free-convection flow over vertical porous plate[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **151**(2): 327-346.
- [30] Roming M F. The influence of electric and magnetic fields on heat transfer to electrically conducting fluid[C]//*Advances in Heat Transfer*. New York: Academic Press, 1964: 286-354.
- [31] Brewster M Q. *Thermal Radiative Transfer and Properties*[M]. New York: John Wiley and Sons, Inc, 1992.
- [32] Carnahan B, Luther H A, Wilkes J O. *Applied Numerical Methods*[M]. New York: John Wiley and Sons, 1969.

# Influence of Magnetic Field and Thermal Radiation by Natural Convection Past a Vertical Cone Subjected to a Variable Surface Heat Flux

G. Palani<sup>1</sup>, Kwang Yong Kim<sup>2</sup>

(1. *Department of Mathematics, Dr Ambedkar Govt Arts College, Chennai 600-039, Tamil Nadu, India;*

2. *Department of Mechanical Engineering, Inha University, Incheon 402-751, Republic of Korea)*

**Abstract:** A numerical study was performed to examine the heat transfer characteristics of natural convection past a vertical cone under the combined effects of magnetic field and thermal radiation. The surface of the cone was subjected to a variable surface heat flux. The fluid considered was a gray, absorbing-emitting radiation but a non-scattering medium, with approximate transformations the boundary layer equations governing the flow were reduced to a non-dimensional equations valid in the free convection regime. The dimensionless governing equations were solved by an implicit finite difference method of Crank-Nicolson type which is fast convergent, more accurate and unconditionally stable. Numerical results are obtained and presented for velocity, temperature, local and average wall shear stress, local and average Nusselt number in air and water. The present results are compared with the previously published work and are found to be in an excellent agreement.

**Key words:** apex; magnetohydrodynamics; radiation; finite difference; skin friction; vertical cone