

PSE 在边界层中预测转捩位置的应用*

李 佳, 罗纪生

(天津大学 机械工程学院 力学系,天津 300072)

(本刊编委罗纪生来稿)

摘要: 层流到湍流的转捩是自然界和各项工程实践中广泛存在的现象,层流和湍流的性质大不相同.因此,预测转捩位置是流体力学中的重要理论和实际问题.针对不可压缩边界层,入口加入展向等幅值型和展向波包型两类扰动,展向等幅值型扰动是由一个二维波(2-D)和两个三维波(3-D)组成,使用抛物化稳定性方程(PSE)的方法来研究扰动的演化和预测转捩位置,并且与数值模拟的结果相比较.结果表明,PSE可以研究扰动的演化和预测转捩位置,同时其计算比数值模拟快得多.

关键词: 转捩位置; 不可压缩边界层; 抛物化稳定性方程; 数值模拟

中图分类号: O357.41 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.06.001

引 言

预测转捩位置是流体力学的重要研究课题之一,边界层中存在层流和湍流两种流态,层流时物体所受的摩擦阻力、传热能力及边界层厚度增长比湍流时小得多.因此,在某些飞行器的设计中,确定层流到湍流的转捩位置显得非常重要.

目前可用的转捩位置预测方法较少,常用的方法有 e^N 方法和转捩模式. e^N 方法基于线性稳定性理论,并且 N 值的选取需要很多经验.转捩模式中的许多系数需要根据实验结果进行调整.

Herbert^[1-2], Bertolotti 等^[3], Chang 等^[4] 提出了利用抛物化稳定性方程来分析扰动的演化,此法考虑了非平行性和非线性的扰动演化,在预测转捩位置时不依赖于经验,另外还有减少计算存储和计算时间^[5]的优点.因此,PSE被广泛地用于扰动演化的研究中.

对于PSE在不可压缩流动中的应用,前人做了大量的工作. Joslin 等^[6] 阐述了用PSE能准确预测二维T-S波演化、亚谐不稳定波转捩和斜波的转捩. Esfahanian 等^[7] 使用PSE方法对不可压缩平板进行了稳定性分析并预测了转捩的位置,计算域入口的扰动是一个二维波和一对三维波,得到了PSE可以研究扰动的演化以及预测转捩位置的结论.但是在他们的研究中,入

* 收稿日期: 2011-07-20; 修订日期: 2012-03-19

基金项目: 国家重点基础研究发展计划基金资助项目(2009CB724103)

作者简介: 李佳(1984—),女,河北人,博士生(E-mail:lijia107@163.com);

罗纪生(1954—),男,教授,博士生导师(联系人. Tel: +86-22-27407025;E-mail: jsluo@tju.edu.cn).

口加的扰动都是几个扰动的组合,情况相对简单一些。

在自然界中扰动的形式是复杂的,波包型扰动是自然界中常见的扰动形式之一,比简单几个扰动相加复杂一些。因此,研究波包型扰动的演化具有一定的实际意义。本文使用 PSE 计算扰动的演化,当非线性演化非常强烈时,PSE 计算发散,壁面摩擦因数曲线开始抬升,则认为此位置是转换位置,将结果和数值模拟所得进行比较。

1 计算模型和基本流

1.1 计算模型

考虑直角坐标系下的平板边界层,如图 1 所示模型,流体沿平板的方向流动。设流动的方向为 x ,平板法向为 y ,流动展向为 z ,3 个方向的速度分别为 u, v, w 。如图 1 所示,坐标的原点 O 取在 $x = x_0$ 处。 U_∞ 为自由来流的速度。

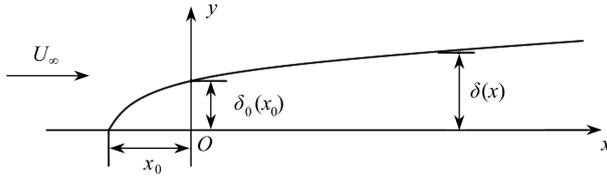


图 1 平板边界层模型

Fig. 1 Flat plate boundary layer model sketch

1.2 基本流

基本流通过求解 Blasius 方程得到,Blasius 方程的形式和边界条件为

$$\begin{cases} f'''(\eta) + \frac{c_0^2}{2} \cdot f(\eta) \cdot f'(\eta) = 0, \\ \eta = 0: f'(0) = f(0) = 0, \\ \eta = \infty: f'(\infty) = 1, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\eta = y/\delta$, δ 表示当地边界层的排移厚度,其定义为

$$\delta = c_0 \sqrt{\frac{\nu(x_0 + x)}{U_\infty}}, \quad \delta_0 = c_0 \sqrt{\frac{\nu x_0}{U_\infty}}, \quad (2)$$

其中, ν 表示运动粘性系数, $c_0 = 1.7208$ 。定义 Reynolds 数为

$$Re = \frac{U_\infty \delta_0}{\nu}. \quad (3)$$

利用 Runge Kutta 的方法可以求出 $f(\eta)$, $f'(\eta)$, $f''(\eta)$, 速度 u 和 v 与 $f(\eta)$ 的关系如下:

$$\begin{cases} u = U_\infty \cdot f'(\eta), \\ v = \frac{c_0^2 U_\infty \delta_0}{2Re\delta^*} [\eta f'(\eta) - f(\eta)]. \end{cases} \quad (4)$$

2 控制方程及数值方法

本文从完全 Navier-Stokes (N-S) 方程出发,推导出扰动方程,再针对扰动特点推出稳定性方程,最后将其抛物化得到抛物化稳定性方程。

用自由来流速度 U_∞ , 计算域入口的边界层排移厚度 δ_0 , 对方程无量纲化。将瞬时量分解为基本流与扰动量之和

$$u_i = U_i + u'_i, p = P + p', \quad (5)$$

其中, U_i 和 P 表示基本流项, u'_i 和 p' 表示扰动量, 将瞬时量式(5)代入无量纲的 N-S 方程, 再减去基本流满足的方程就可以得到扰动方程, 为

$$\begin{cases} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) u_i \quad (i = 1, 2, 3). \end{cases} \quad (6)$$

考虑到扰动沿着空间的演化, 将扰动设为如下形式^[8]:

$$\boldsymbol{\phi}(x, y, z, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \hat{\boldsymbol{\phi}}_{mn}(x, y) e^{i \left(\int_{x_0}^x \alpha_{mn}(x) dx + n\beta_0 z - m\omega_0 t \right)} + \text{c. c.}, \quad (7)$$

其中, $\hat{\boldsymbol{\phi}}_{mn} = [\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}]^T$ 为扰动的形状函数, α_{mn} 为流向波数, $n\beta_0$ 为展向波数, $m\omega_0$ 为频率, c. c. 表示复共轭, 形状函数 $\hat{\boldsymbol{\phi}}_{mn}$ 和波数 α_{mn} 都是 x 的缓变函数.

将方程(7)代入扰动方程(6), 忽略形状函数沿着流向的二阶导数, 我们就得到了非线性的抛物化稳定性方程, 形式为

$$\mathbf{L}_0 [\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}]^T + \mathbf{L}_1 \frac{\partial}{\partial x} [\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}]^T = \mathbf{f}, \quad (8)$$

其中 \mathbf{f} 为非线性项. $\mathbf{L}_0, \mathbf{L}_1$ 和 \mathbf{f} 的表达式为

$$\mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} i\alpha & \frac{\partial}{\partial y} & in\beta & 0 \\ K_3 + \left(K_2 - \frac{\partial U}{\partial x} \right) & -\frac{\partial U}{\partial y} & -\frac{\partial U}{\partial z} & -i\alpha \\ -\frac{\partial V}{\partial x} & K_3 + \left(K_2 - \frac{\partial V}{\partial y} \right) & -\frac{\partial V}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial W}{\partial x} & -\frac{\partial W}{\partial y} & K_3 + \left(K_2 - \frac{\partial W}{\partial z} \right) & -in\beta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ K_1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & K_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{w} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \hat{u} \frac{\partial v}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial v}{\partial y} + \hat{w} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \hat{u} \frac{\partial w}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial w}{\partial y} + \hat{w} \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix},$$

其中

$$K_1 = \frac{2i\alpha}{Re} - U,$$

$$K_2 = \frac{1}{Re} \left(i \frac{d\alpha}{dx} - \alpha^2 \right) - \frac{1}{Re} n^2 \beta_0^2 - i\alpha U - in\beta_0 W + im\omega_0,$$

$$K_3 = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - V \frac{\partial}{\partial y}.$$

对方程进行求解时, 流向导数第 1 步采用一阶精度的差分格式, 第 2 步采用二阶精度的差分格式, 以后采用三阶精度的差分格式. 方程形式为

$$L_1 \frac{\gamma_0}{\Delta x} \hat{u}^{n+1} + L_0 \hat{u}^{n+1} = \sum_{k=0}^2 \left(L_1 \frac{1}{\Delta x} \sigma_k \hat{u}^{n-k} + \zeta_k f^{n-k} \right), \quad (9)$$

其中, γ_0, σ_k 和 ζ_k 随着要求的精度不同而取不同的值, 具体数值如表 1 所示.

表 1 不同精度下的系数

Table 1 The coefficients of different orders

| | γ_0 | σ_0 | σ_1 | σ_2 | ζ_0 | ζ_1 | ζ_2 |
|--------------|------------|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|
| first-order | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| second-order | 3/2 | 2 | -1/2 | 0 | 2 | -1 | 0 |
| third-order | 11/6 | 3 | -3/2 | 1/3 | 3 | -3 | 1 |

法向采用 Malik 提出的四阶紧致差分格式^[9].

壁面满足无滑移边界条件 $y = 0, u = v = w = 0$, 边界层外使用自由流条件 $y \rightarrow \infty, u = v = w = 0$.

y 方向采用的是变间距网格分布, 坐标变化的形式为

$$y_j = \frac{L_y \cdot R_j}{1 + C_b \cdot (1 - R_j^2)}, \quad (10)$$

其中, L_y 为法向的计算域长度, 计算坐标 $R_j = (j - 1)/(j_n - 1)$, j_n 为法向网格数, C_b 为常数, 表达式为 $C_b = (\sqrt{1 + 8k_2} - 3)/4$, $k_2 = (y_{j_n} - y_{j_n-1})/(y_2 - y_1)$ 为两端坐标网格间距的比.

3 计算结果和分析

本文对两类不同的扰动情况进行了计算. 一类是入口加 1 个二维波和 2 个三维波, 扰动沿展向都是等幅值的, 对不同的二维波幅值进行了计算; 另一类是入口加入经 Gauss 分布调制的 T-S 波, 扰动幅值沿展向是波包型的. 两类计算都给出了 PSE 和数值模拟的结果, 并对结果进行比较和分析.

3.1 展向等幅值扰动的计算结果

入口扰动是 1 个二维波和 2 个三维波, 针对不同的二维波幅值进行了 3 种计算. 选取的 Reynolds 数 $Re = 732$, 基本频率 $\omega_0 = 0.04545$, 基本展向波数 $\beta_0 = 0.2418$. 扰动形式为

$$A_2 \mathbf{u}_2(y) e^{i(\alpha_2 x - \omega_2 t)} + A_3 (\mathbf{u}_3^+(y) e^{i(\alpha_3 x + \beta_3 z - \omega_3 t)} + \mathbf{u}_3^-(y) e^{i(\alpha_3 x - \beta_3 z - \omega_3 t)}) + c. c., \quad (11)$$

其中, ω_2 和 ω_3 分别为二维扰动波、三维扰动波的频率, β_3 为三维扰动的展向波数; α_2 和 α_3 为二维扰动和三维扰动的流向波数. $\mathbf{u}_2(y)$ 和 $\mathbf{u}_3^\pm(y)$ 为稳定性方程的解, A_2 和 A_3 为扰动幅值. $\omega_2 = 2\omega_0, \omega_3 = 2\omega_0, \beta_3 = \beta_0$, 根据稳定性分析得

$$\alpha_2 = (0.2491053, -0.0034965), \alpha_3 = (0.1103229, 0.0065115).$$

$A_3 = 0.0001, A_2$ 分别取 0.01, 0.006, 0.004.

图 2 给出 3 种情况的 PSE 计算结果, 同时也给出了数值模拟的结果. 图 2(a) 给出二维扰动基本波随 x 的演化, 图 2(b) 给出了壁面摩擦因数 C_f 沿流向的分布, 图 2(c) 给出了 PSE 得到的二维波和三维基本波幅值沿流向的演化.

从图 2(a) 中可以看出在转捩前的扰动演化阶段, PSE 和 DNS 的计算结果一致, 说明可以用 PSE 研究扰动的演化. 图 2(b) 表明 DNS 和 PSE 计算的壁面摩擦因数 C_f 有很小的差别, 曲线开始抬升的位置为转捩位置, 对于情况 $A_2 = 0.01$, 转捩位置为 $x = 340$; 情况 $A_2 = 0.006$, 转捩位置为 $x = 440$; 情况 $A_2 = 0.004$, 转捩位置为 $x = 560$. 因此对于展向等幅值型扰动来说, PSE 是可以用于研究扰动的演化和预测转捩位置的. 从图 2(c) 中可以看到, 转捩之前二维基本波幅

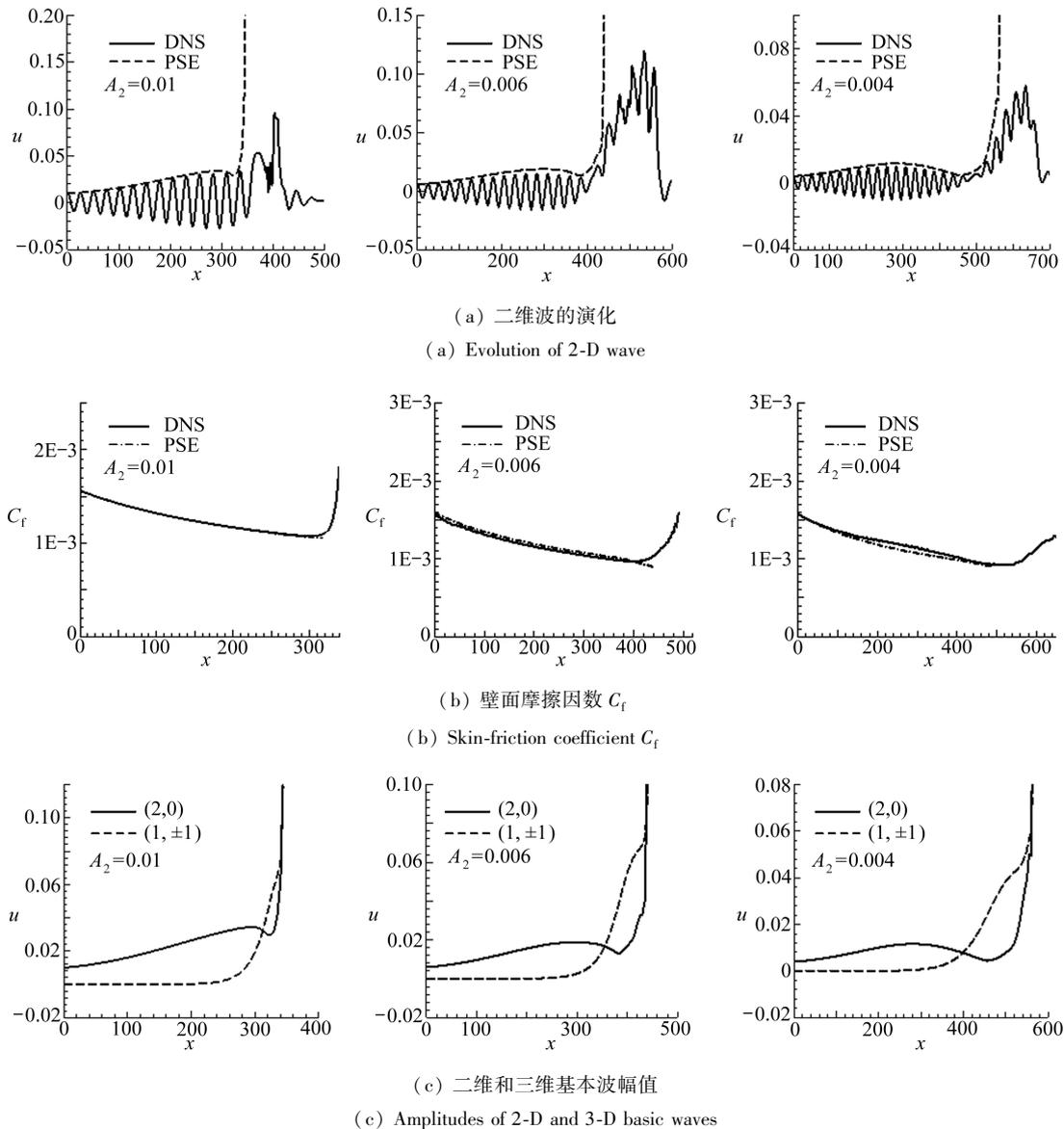


图2 不同二维波幅值的计算结果

Fig. 2 Results of the different 2-D wave amplitudes

值达到最大值,之后开始下降,三维波快速的增长起来,导致转捩。

3.2 展向波包型扰动的计算结果

为了研究更复杂的情况,本文计算了入口波包型的扰动.使用 PSE 方法对不同 Reynolds 数,不同扰动频率情况进行了计算,并将结果与相应的数值模拟结果比较,以确定其有效性.

在入口加入波包型扰动,波包型扰动由 Gauss 分布调制 T-S 波得到.扰动形式为

$$e^{-a(z-L_z/2)^2} [A_2 \mathbf{u}_2(y) e^{i(\alpha_2 x - \omega_2 t)} + A_3 (\mathbf{u}_3^+(y) e^{i(\alpha_3 x + \beta_3 z - \omega_3 t)} + \mathbf{u}_3^-(y) e^{i(\alpha_3 x - \beta_3 z - \omega_3 t)}) + c. c.], \quad (12)$$

其中, A_2 和 A_3 为二维波和三维波的扰动幅值, \mathbf{u}_2 和 \mathbf{u}_3 为对应于特征值 α, β, ω 的特征函数. 计算中选取 $a = 0.002, A_2 = 0.01, \beta_0 = 0.04836$, 分 4 种情况进行计算,4 种情况下的参数分别为

$$A: \quad Re = 732, \omega_2 = 0.09090, A_3 = 0;$$

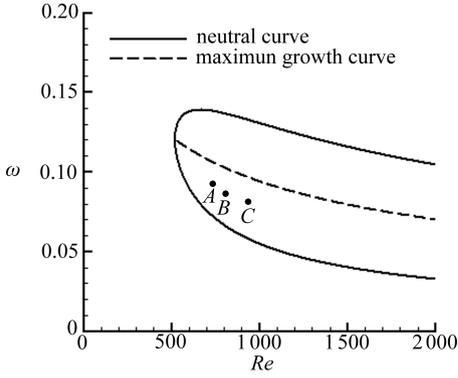


图3 中性曲线和最大增长率曲线

Fig. 3 Neutral curve and maximum growth curve

B: $Re = 800, \omega_2 = 0.084\ 90, A_3 = 0;$

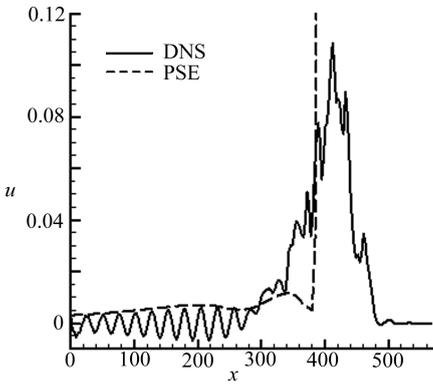
C: $Re = 932, \omega_2 = 0.080\ 90, A_3 = 0;$

D: $Re = 732, \omega_2 = 0.090\ 90, A_3 = 0.000\ 1.$

图3给出了二维波的中性曲线和扰动最大增长率曲线,图中还表示了3种计算情况的位置.从图3中可以看出,选取参数的增长率均小于最大增长率,这样就保证了扰动能充分增长,可以发生转捩.

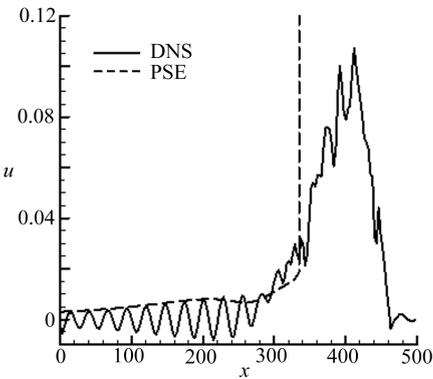
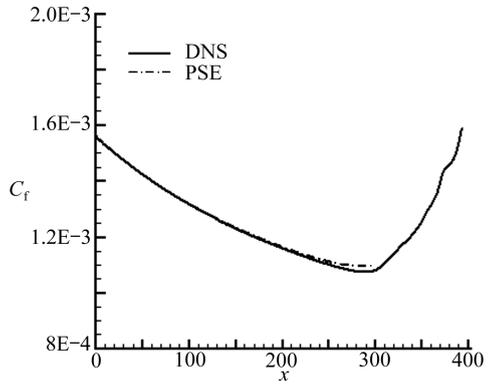
图4给出了扰动速度 u 随 x 的演化和壁面摩擦因数 C_f 的演化结果.

从这4种情况我们可以看到,在转捩前 PSE 计算的二维波幅值的演化曲线和数值模拟结果基本吻合,说明 PSE 可以研究扰动的演化.在转捩位置附近,非线性作用很强,扰动幅值演化很快的阶段,PSE 计算发散.从 C_f 曲线来看,PSE 的结果和直接数值模拟结果比较符合,说明了 PSE 可以预测波包型入口扰动的转捩位置.



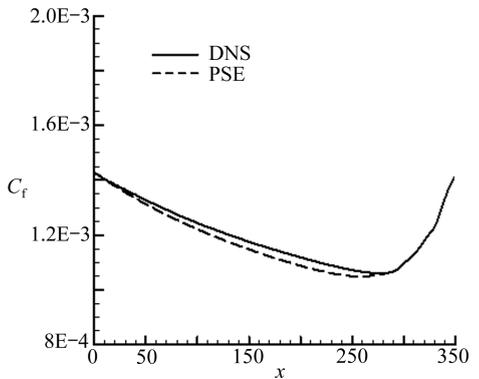
(i) 情况 A

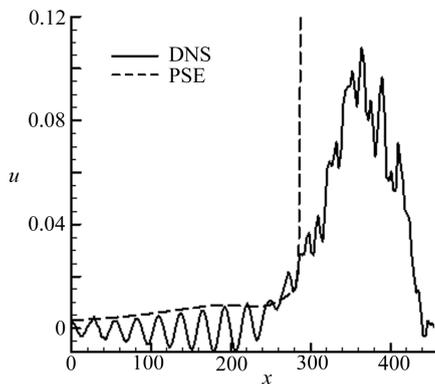
(i) Case A



(ii) 情况 B

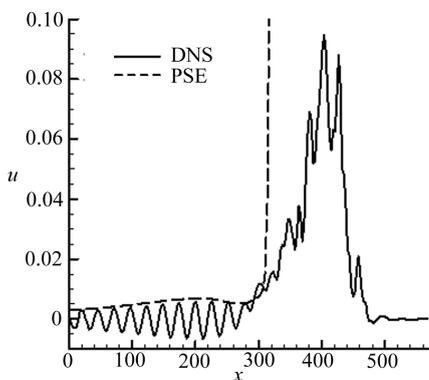
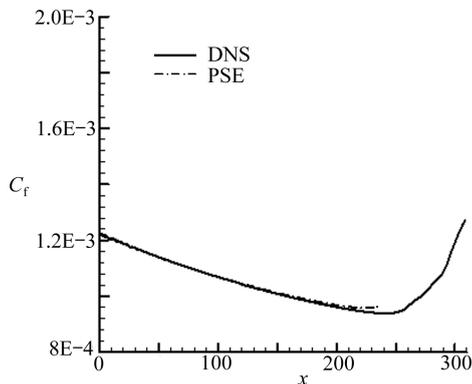
(ii) Case B





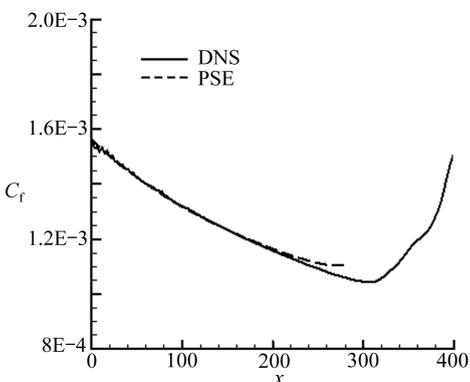
(iii) 情况 C

(iii) Case C



(iv) 情况 D

(iv) Case D



(a) 二维波的扰动速度

(b) 壁面摩擦因数 C_f 曲线

(a) Disturbance velocity of 2-D wave

(b) Skin-friction coefficient C_f 图 4 不同情况下的扰动速度和 C_f 曲线Fig. 4 Disturbance velocity and skin-friction coefficient C_f of different cases

4 结 论

本文以三维不可压缩边界层为研究对象,基本流为二维的平板层流 Blasius 相似性解,采用非线性 PSE 方法和直接数值模拟分别研究了展向等幅值型扰动及展向波包型扰动的演化和转捩,比较两种方法得到的二维波的幅值演化和壁面摩擦因数曲线,得出以下结论:

(i) 在扰动演化的线性阶段,PSE 的计算结果和 DNS 结果相符合,说明可以用 PSE 代替直接数值模拟来研究扰动演化的线性阶段。

(ii) 结合 DNS 的计算结果分析发现,在扰动演化的非线性作用很强或壁面摩擦因数曲线开始抬升,或者 PSE 计算发散的位置,可作为转捩位置。

(iii) PSE 计算的结果表明,转捩之前二维波幅值先增大后减小,在减小的同时三维波快速地增长起来,导致转捩.因此,与转捩直接相关的是三维波的快速生长,二维波起着辅助、促进的作用。

参考文献 (References) :

- [1] Herbert T H. Boundary-layer transition-analysis and prediction revisited[C]//*AIAA, Aerospace Sciences Meeting*, 29th. Reno, NV, 1991: 23.
- [2] Herbert T H. Parabolized stability equation[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1997, **29** (1): 245-283.
- [3] Bertolotti F P, Herbert T H. Analysis of linear stability of compressible boundary layers using the PSE[J]. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 1991, **3**(2): 117-124.
- [4] Chang C L, Malik M R, Erlebacher G, Hussaini M Y. Compressible stability of growing boundary layer using parabolized stability equations [C]//*AIAA, Fluid Dynamic, Plasma Dynamics and Lasers Conference*, 22nd. Honolulu, United States, 1991.
- [5] Bertolotti F P, Herbert T H, Spalart P R. Linear and nonlinear stability of the Blasius boundary layer[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1992, **242**(1): 441-474.
- [6] Joslin R D, Chang C L, Streett C L. Spatial direct numerical simulation of boundary-layer transition mechanisms: validation of PSE theory[J]. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 1993, **4**(6): 271-288.
- [7] Esfahanian V, Hejranfar K, Sabetghadam F. Linear and nonlinear PSE for stability analysis of the blasius boundary layer using compact scheme [J]. *Journal of Fluids Engineering*, 2001, **123**(3): 545-550.
- [8] 张永明, 周恒. 抛物化稳定性方程在可压缩边界层中的检验[J]. *应用数学和力学*, 2007, **28** (8): 883-893. (ZHANG Yong-ming, ZHOU Heng. Verification of the parabolized stability equations for its application to compressible boundary layers[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2007, **28**(8): 987-998.)
- [9] Malik M R, Chuang S, Hussaini M Y. Accurate numerical solution of compressible, linear stability equation[J]. *Z Angew Math Phys*, 1982, **33**(2): 189-201.

Applications of PSE to Predict the Transition Position in Boundary Layers

LI Jia, LUO Ji-sheng

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: The phenomenon of laminar-turbulent transition exists universally in nature and various engineering practices. The prediction of transition position was one of crucial theories and practical problems in fluid mechanics due to different natures of laminar flow and turbulent flow. Two types of disturbances imposed at the entrance were identical amplitude and wave-packet disturbances along the spanwise in incompressible boundary layers. The disturbances of identical amplitude consist of a two-dimensional (2-D) wave and two three-dimensional (3-D) waves. The parabolized stability equation (PSE) was used to research the evolution of disturbances and predict the transition position, and the results were compared with those obtained by numerical simulation. It's revealed that the PSE method could investigate the evolution of disturbances and predict the transition position. At the same time, the speed of calculation was much faster than numerical simulation.

Key words: transition position; incompressible boundary layers; parabolized stability equations; numerical simulation