

双向分布水翼周围有势流动时的 耗散自由表面解*

陈志敏^{1,2}, W·G·普莱斯¹

(1. 南安普敦大学 工程学院,南安普敦 SO171BJ,英国;
2. 南开大学 数学系,天津 300071)

摘要: 为浸没于自由表面下部的2维水翼,建立水翼周围作耗散有势流动时的二次积分方程.假设自由表面具有能量的耗散,也就是阻尼的来源.根据耗散 Green 函数的无旋性近似和水翼表面的双向分布,提出了双向的面元法(doublet panel method).数值计算后得到的结果,与分析解和已有实验数据均吻合得很好.

关键词: 面元法; 有势流动; 自由表面波; 能量的耗散; 水翼

中图分类号: O351.3;O241.85 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.11.011

引 言

水下的浸没结构或水上的漂浮物体周围流体的真实流动,总是因为粘性的存在导致能量的耗散.有自由表面时,除旋涡从物体上脱落等原因之外,所生成的波有能量的耗散.水域中流体的运动由 Navier-Stokes 方程和连续性方程^[1]所确定.物体周围粘滞流动的数值模拟将耗费较长的时间,因而在结构的初步设计中并不实用.在海洋流体动力学中,对生成波阻力的评估、自由表面波与结构之间的相互作用,以及辐射和衍射问题的求解,总是采用简化的数学模型,假设流体的流动是无旋的.从而流域中与线性连续方程耦合的非线性 Navier-Stokes 方程的解,可以简化为单个线性连续方程或 Laplace 方程的解.于是,流体的速度势或 Laplace 方程解,可以简单地表达为 Rankine 源积分和流体边界上的双向分布^[2],这样的近似显著地简化了自由表面的流动问题.但是, Bernoulli 方程定义的无旋流动动量项并不包含粘性,由流体与结构之间相互作用产生的自由表面波的能量保持为常数.无旋流动流体与结构的相互作用问题中,自由表面出现非物理现象的原因是,在2维情况,由结构产生的自由表面波长距离保持没有衰减的振荡形式,但是,在3维情况,由于辐射胜于能量的耗散,振荡表面波出现空间衰减.另一方面,无旋流体流动与结构相互作用的数值模拟,一般用自由表面 Green 函数来消去自由表面的边界积分,不幸的是,这些边界积分含有奇异积分,为了克服奇异性的影响,造成数值计算复杂

* 收稿日期: 2012-01-10; 修订日期: 2012-06-22

作者简介: 陈志敏(1959—),男,教授,博士生导师(联系人. Tel: +86-23-80592910; Fax: +86-23-80593299; E-mail: z.chen@soton.ac.uk).

本文原文为英文,海洽译,张禄坤校.

程度的提高^[3]。

在线性自由表面情况下,处理漂浮体或水下物体周围无旋流动的数值模拟方法已有长足的发展.例如,Inglis 和 Price^[4-5]基于自由表面 Green 函数法,数值求解了 3 维辐射问题. Hess 和 Smith^[6], Giesing 和 Smith^[7]对 2 维水翼周围的有势流动,提出了基于自由表面源的方法.为了避免自由表面 Green 函数中出现的奇异积分, Dawson^[8]对无升力的水翼问题提出了双体法. Kouh 等^[9]将 Dawson 的方法推广至有升力的水翼问题. Yeung 和 Bouger^[10-11]提出了一种混合的方法,将流域划分为近场流域和远场流域,他们使用 Rankine 源和结构附近的双向分布,在近流域场中,用样条函数近似自由表面边界;在远流域场中,基于线性自由表面的特征函数展开,提出竖向的辐射边界条件.还有一个可以用来分析水翼周围无旋流动的分析方法为保角映射法^[12]。

频率域中的 Green 函数存在各种不同的形式^[13],可以用正则积分和正则函数来近似奇异积分,作为例子可以列出以下几位, Bessho^[14], Newman^[3], Iwashita 和 Ohkusu^[15].实际上,出现奇异积分的原因是,没有考虑到自由表面波能量的耗散。

近年来, Chen^[16]对无旋流体流动的数值模拟,利用水翼边界周围漩涡的分布,提出了耗散的自由表面法. Chen 在文献[16]中导出的耗散自由表面 Green 函数,消除了非物理的自由表面波现象,同时,在自由表面 Green 函数的波积分中出现奇异性.从而,可以正则地测定波积分,显著地简化了数值计算的复杂性。

本文对水翼周围 2 维流动的数值模拟,将给出耗散的二次边界积分算法.应用表面的边界条件,或者无旋流动的 Neumann 边界条件,在结构的边界积分中消除了分布源.从而,使用面元法求解速度势,仅在结构表面出现双向分布的边界积分.本方法的新意在于,对结构表面应用 Neumann 边界条件,提出了不含波蚀的二次边界积分方程.此外,将二次边界积分方程与耗散自由表面 Green 函数相结合,就可以运用正则的波积分法^[16],由 Dirichlet 边界条件(可参考 Lamb^[2], Katz 和 Plotkin^[17]),导出常规的二次边界积分方程。

1 二次边界积分公式

考虑图 1 所示的 2 维水翼,浸没在均匀流速 U 的自由表面下部.假设流动是无旋的,流体和水翼之间的相互作用所产生的扰动速度势为 ϕ , 故总速度势为

$$\Phi = Ux + \phi,$$

总速度势 Φ 在流域 W 中满足 Laplace 方程:

$$\Delta\Phi = 0,$$

自由表面 W 上带耗散项的 Bernoulli 方程为^[18]

$$\frac{1}{2} |\nabla\Phi|^2 + g\chi + \mu'\phi = \frac{1}{2} U^2, \quad (1)$$

其中, g 为重力加速度, χ 为自由表面的波高, μ' 为流体的摩擦因数, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 为梯度算子.在无旋流动的假设下,方程(1)可以应用文献[16,19-21]引入能量的耗散机制,由带附加摩擦力 $\mu' \nabla\Phi$ 的 Navier-Stokes 方程导出。

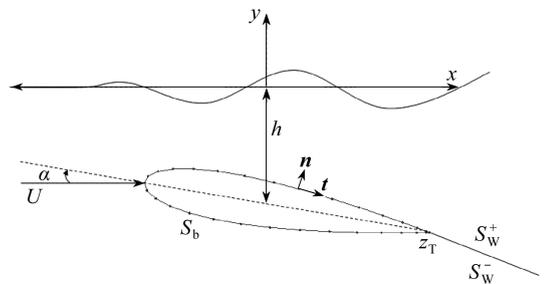


图 1 水翼周围流体运动的剖面图

Fig. 1 The profile of the fluid motion problem

总速度势 Φ 满足表面的边界条件, 或者, 在水翼表面和在流体的水平底部 ($y \rightarrow -\infty$) 满足 Neumann 边界条件:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi = 0, \quad (2)$$

其中 $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x, y)$ 表示指向流场的法向矢量场. 采用关于水翼弦长 c 的无量纲变换 (x, y) = $c(x', y')$ 并忽略撇号以后, 扰动速度势 ϕ 满足线性耗散的自由表面条件:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \nu = \frac{gc}{U^2}, \mu = \frac{\mu' c}{U}. \quad (3)$$

方程(3)由 Havelock^[18]为评估传统自由表面 Green 函数的奇异波积分而提出, 由此可以得到线性耗散的 Bernoulli 方程:

$$\frac{U}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x} + g\chi + \mu' \phi = 0, \quad y = 0$$

和线性运动的自由表面边界方程:

$$U \frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad y = 0.$$

设自由表面 Green 函数 $G(\zeta, z)$ 满足耗散自由表面边界条件(3), 描述了位于 z 处的奇异源, 在 ζ 处的无旋流动. Chen^[16]得到了 2 维自由表面的 Green 函数表达式:

$$G(\zeta, z) = \text{Re}(\ln(\zeta - z) + \mathcal{F}(\zeta - \bar{z})),$$

其中, \bar{z} 为 z 的共轭复数, \mathcal{F} 为全纯函数:

$$\mathcal{F}(\zeta - \bar{z}) = \frac{i\nu - \mu}{i\nu + \mu} \ln(\zeta - \bar{z}) + \frac{2i\nu}{i\nu + \mu} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ik(\zeta - \bar{z})}}{k - \nu + i\mu} dk, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (4)$$

设 S_b 为无量纲的水翼表面, S_w^+ 和 S_w^- 分别由表示无限长水翼尾迹分开的上下表面. 对调和函数 ϕ 和流域中的 Green 函数 G , 应用 Gauss 散度定理, 将扰动速度势 ϕ 表达为边界的积分公式:

$$2\pi\phi(\zeta) = \int_{S_b} \mathbf{n} \cdot \nabla G(\zeta, z) ds - \int_{S_b \cup S_w^+ \cup S_w^-} \phi(z) \mathbf{n} \cdot \nabla G(\zeta, z) ds, \quad \zeta \in W, \quad (5)$$

其中, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ 表示水翼表面 S_b 上无穷小的弧长. 类似地, 对调和函数 Ucx 和以 S_b 为边界的内域 W_1 中的 Green 函数 G , 应用 Gauss 散度定理:

$$0 = \int_{S_b} \mathbf{n} \cdot \nabla(Ucx) G(\zeta, z) ds - \int_{S_b} Ucx \mathbf{n} \cdot \nabla G(\zeta, z) ds, \quad \zeta \in W. \quad (6)$$

考虑到越过截面的函数 Ucx 是连续的, 得到结果:

$$\int_{S_w^+ \cup S_w^-} Ucx \mathbf{n} \cdot \nabla G(\zeta, z) ds = 0.$$

方程(5)和(6)相加得到

$$2\pi\phi(\zeta) = \int_{S_b} \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi(z) G(\zeta, z) ds - \int_{S_b \cup S_w^+ \cup S_w^-} \Phi(z) \mathbf{n} \cdot \nabla G(\zeta, z) ds, \quad \zeta \in W. \quad (7)$$

根据水翼表面 S_b 的壁面边界条件(2), 得到边界积分公式:

$$2\pi\phi(\zeta) + \int_{S_b \cup S_w^+ \cup S_w^-} \Phi(z) \mathbf{n} \cdot \nabla G(\zeta, z) ds = 0, \quad \zeta \in W. \quad (8)$$

上述公式中, 仅包含了 $\mathbf{n} \cdot \nabla G(\zeta, z)$ 沿水翼表面及其尾迹上下表面耗散自由表面的二次积分, 其中 ξ 为 ζ 的水平分量. 因此, 流动的总速度势完全可以由边界 $S_b \cup S_w^+ \cup S_w^-$ 上的总速度势 $\Phi(z)$ 来定义, 从而得到解方程:

$$2\pi\Phi(\zeta) + \int_{S_b \cup S_w^+ \cup S_w^-} \Phi(z) \mathbf{n} \cdot \nabla G(\zeta, z) ds = 2\pi U c \xi, \quad \zeta \in W. \quad (9)$$

但是,为了易于进行数值计算,将无限长的尾迹用有限长尾迹来近似.为了消除波蚀的显形式,在 S_w^+ 上,记 $\Phi = \Phi_+$;在 S_w^- 上,记 $\Phi = \Phi_-$.运用函数 $\ln(\zeta - z)$ 和 $\Im(\zeta - \bar{z})$ 的全纯性,找到 S_w^+ 上的切向速度向量场 $\mathbf{t} = \mathbf{t}(z)$:

$$\begin{aligned} & \int_{S_w^+ \cup S_w^-} \Phi(z) \mathbf{n} \cdot \nabla G(\zeta, z) ds = \\ & \int_{S_w^+} (\Phi_+(z) - \Phi_-(z)) \mathbf{n} \cdot \nabla G(\zeta, z) ds = \\ & \int_{S_w^+} (\Phi_+(z) - \Phi_-(z)) \mathbf{t} \cdot \nabla \operatorname{Re} [i \ln(\zeta - z) - i \Im(\zeta - \bar{z})] ds. \end{aligned}$$

上式右端分部积分后简化为

$$\begin{aligned} & -(\Phi_+(z_T) - \Phi_-(z_T)) \operatorname{Re} [i \ln(\zeta - z_T) - i \Im(\zeta - \bar{z}_T) - C] + \\ & \lim_{z \rightarrow z_\infty} (\Phi_+(z) - \Phi_-(z)) \operatorname{Re} [i \ln(\zeta - z) - i \Im(\zeta - \bar{z}) - C] - \\ & \int_{S_w^+} (\mathbf{t} \cdot \nabla \Phi_+(z) - \mathbf{t} \cdot \nabla \Phi_-(z)) \operatorname{Re} [i \ln(\zeta - z) - i \Im(\zeta - \bar{z}) - C] ds, \end{aligned}$$

其中, C 为常量, z_T 为水翼的后缘点, z_∞ 为水翼尾迹无限远点.从而由关于沿波蚀切向速度的 Kutta 条件,上式末项为 0.因而,通过适当地选择常量 C 后,便有

$$\begin{aligned} & \int_{S_w^+ \cup S_w^-} \Phi(z) \mathbf{n} \cdot \nabla G(\zeta, z) ds = -(\Phi_+(z_T) - \Phi_-(z_T)) \operatorname{Re} [i \ln(\zeta - z_T) - \\ & i \Im(\zeta - \bar{z}_T) - i \ln(-t_T) + i \frac{i\nu - \mu}{i\nu + \mu} \ln(-\bar{t}_T)], \end{aligned}$$

其中,复数 t_T 表示水翼后缘点 z_T 处 S_w^+ 上的单位切向矢量.上式结合方程(9),得到二次边界积分方程:

$$\begin{aligned} 2\pi U c \xi = & 2\pi\Phi(\zeta) + \int_{S_b} \Phi(z) \frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial \mathbf{n}} ds + (\Phi_+(z_T) - \Phi_-(z_T)) \times \\ & \operatorname{Re} [i \ln(\zeta - z_T) - i \Im(\zeta - \bar{z}_T) - i \ln(-t_T) + i \frac{i\nu - \mu}{i\nu + \mu} \ln(-\bar{t}_T)], \end{aligned}$$

其中, $\zeta = \xi + i\eta \in W$, 或者

$$\begin{aligned} 2\pi U c \xi = & 2\pi\Phi(\zeta) + \lim_{\hat{\zeta} \rightarrow \zeta, \hat{\zeta} \in W} \int_{S_b} \Phi(z) \mathbf{n} \cdot \nabla G(\hat{\zeta}, z) ds - (\Phi_+(z_T) - \Phi_-(z_T)) \times \\ & \operatorname{Re} [i \ln(\zeta - z_T) - i \Im(\zeta - \bar{z}_T) - i \ln(-t_T) + i \frac{i\nu - \mu}{i\nu + \mu} \ln(-\bar{t}_T)], \quad (10) \end{aligned}$$

其中, $\zeta = \xi + i\eta \in S_b$.

2 边界积分方程的离散化

为了阐明数值方法并充分了解能量的耗散过程,本文运用积分方程(10),求解自由表面下部水翼的2维流体运动问题,为简化起见,

- i) 将流域定义于复平面内,原点为静止的水面 $y = 0$ 与经过水翼弦中点的竖向直线的交点;
- ii) 将无量纲边界 S_b 近似地顺时针方向分割为 N 个映射面;
- iii) S_b 上网格点的位置为 z_1, z_2, \dots, z_{n+1} , 水翼后缘点 $z_1 = z_{n+1}$.

将 S_b 上第 i 映射面的中点定义为配置点:

$$\zeta_i = \frac{z_{i+1} + z_i}{2}. \quad (11)$$

S_b 上沿第 j 个映射面的切向和法向矢量分别定义为

$$t_j = \frac{z_{j+1} - z_j}{|z_{j+1} - z_j|}, \quad n_j = it_j, \quad (12)$$

并取切向矢量 $t_T = t_N$.

为了离散化方程 (10), 假设第 j 映射面上 Φ 为常数 $\Phi_j (j = 1, 2, \dots, N)$, 则有

$$2\pi\Phi_i + \sum_{j=1}^N \Phi_j A_{i,j} + (\Phi_+(z_T) - \Phi_-(z_T))A_i = 2\pi U c \xi_i, \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_i, \zeta \in W} \int_{\text{panel}_j} \mathbf{n} \cdot \nabla G(\zeta, z) ds = \\ &= \text{Re} \left(\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_i, \zeta \in W} \int_{\text{panel}_j} n_j \frac{\partial \ln(\zeta - z)}{\partial z} ds + \int_{\text{panel}_j} \bar{n}_j \frac{\partial \overline{\ln(\zeta - \bar{z})}}{\partial \bar{z}} ds \right), \\ A_i &= -\text{Re} \left[i \ln(\zeta_i - z_T) - i \overline{\ln(\zeta_i - \bar{z}_T)} - i \ln(-t_T) + i \frac{i\nu - \mu}{i\nu + \mu} \ln(-\bar{t}_T) \right], \end{aligned}$$

这里的 ξ_i 为 $\zeta_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 的实部.

由于 $\mu \neq 0$, 因此 Green 函数 G 的频率域积分无奇异性. 根据 Chen^[16], 单元 $A_{i,j}$ 和 A_i 可以直接在频率域中合适的网格 $\{k_0, k_1, \dots, k_M\}$ 上离散化:

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \text{Re} \left(\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_i, \zeta \in W} i \ln \frac{\zeta - z_{j+1}}{\zeta - z_j} + \frac{\nu + i\mu}{i\nu + \mu} \ln \frac{\zeta_i - \bar{z}_{j+1}}{\zeta_i - \bar{z}_j} \right) + \\ &= \text{Re} \left(\frac{2\nu}{i\nu + \mu} \sum_{m=0}^M (e^{-ik_{m+1}(\zeta_i - \bar{z}_{j+1})} - e^{-ik_{m+1}(\zeta_i - \bar{z}_j)}) \ln \frac{k_{m+1} - \nu + i\mu}{k_m - \nu + i\mu} \right) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} A_i &= \text{Re} \left(i \ln \left(-\frac{t_T}{\zeta_i - z_{N+1}} \right) + i \frac{i\nu - \mu}{i\nu + \mu} \ln \left(-\frac{\bar{t}_T}{\zeta_i - \bar{z}_{N+1}} \right) \right) + \\ &= \text{Re} \left(i \frac{2i\nu}{i\nu + \mu} \sum_{m=0}^M e^{-ik_m(\zeta_i - \bar{z}_{N+1})} \ln \frac{k_{m+1} - \nu + i\mu}{k_m - \nu + i\mu} \right). \end{aligned}$$

进一步由 Kutta 条件, z_T 处的上表面的切向速度, 与 $z_T = z_1 = z_{n+1}$ 处下表面的切向速度值相反, 则有

$$\Phi_+(z_T) - \Phi_N = -(\Phi_1 - \Phi_-(z_T)).$$

从而, 方程 (13) 可简化为如下的代数方程组:

$$\sum_{j=1}^N \Phi_j a_{i,j} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

其中, $b_i = 2\pi U c \xi_i$, 又

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2\pi\delta_{i,j} + A_{i,j}, & 1 < j < N, \\ 2\pi\delta_{i,j} + A_{i,1} - A_1, & j = 1, \\ 2\pi\delta_{i,j} + A_{i,N} + A_N, & j = N, \end{cases}$$

其中 $\delta_{i,j}$ 为 Kronecker 符号. 因而, 定义在控制点 ζ_i 上的总速度势 $\Phi_i (i = 1, 2, \dots, N)$, 可以由上

述代数方程得到. 因此, 总切向速度 V_j 可以由配置点 ζ_i 定义:

$$V_j = \frac{\Phi_j - \Phi_{j-1}}{|\zeta_j - \zeta_{j-1}|}, \quad 2 \leq j \leq N.$$

从而, 分布在配置点上的压力系数为

$$C_p = 1 - \frac{V_j^2}{U^2 c^2}. \quad (14)$$

由静止的水平面 $\zeta = \xi$, 得到自由表面波高 χ 的表达式:

$$\frac{\chi(\xi)}{c} = -\frac{U}{gc} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -\frac{Fn^2}{Uc} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad Fn = \frac{U}{\sqrt{gc}}, \quad (15)$$

这里, 自由表面的速度势 $\Phi(\xi) = Uc\xi + \phi(\xi)$, 由包含能量耗散的方程(10)给出.

3 Joukowski 型水翼周围流动的分析解

为了验证本文提出的数值计算方法, 对一个深深浸没于无限水深的 Joukowski 型水翼, 给出其有势流的分析解. 与 van de Vooran 翼相类似^[17], 水翼表面由如下保角映射来定义:

$$\frac{z}{c} = \frac{f}{c} \left(1 - \frac{\lambda}{f}\right)^\tau + 1, \quad 1 < \tau \leq 2,$$

这里, z 是将圆心为 $-\lambda\epsilon/c$, 半径为 $a/c = \lambda(1+\epsilon)/c$ 间的流动, 保角映射变换到 $f/c = -\lambda\epsilon/c + ae^{i\theta}/c$ 定义翼周围的流动. 参数 c 表示水翼的弦长, 参数 ϵ 和 τ 控制了翼的厚度, 参数 λ 的定义为

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{(2\epsilon + 1)^{\tau-1}}{2^\tau(\epsilon + 1)^\tau}. \quad (16)$$

在 $\tau = 2$ 的极限情况, 变为常规对称的 Joukowski 翼型:

$$\frac{z}{c} = \frac{f}{c} + \frac{\lambda^2}{cf} - 2\frac{\lambda}{c} + 1.$$

利用后缘点处的 Kutta 条件, 翼型的无量纲总速度势为

$$\frac{\Phi(z)}{Uc} = 2\frac{a}{c} [\cos(\alpha - \theta) - \theta \sin(\alpha)].$$

翼型上的法向速度为 0, 翼型上的无量纲切向速度为

$$\frac{V}{Uc} = 2^{3-\tau} \cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) \sin^{2-\tau}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left| \frac{(-\epsilon + (1+\epsilon)e^{i\theta})^\tau}{(1+\epsilon)^{\tau-1}[\tau + (1+\epsilon)(e^{i\theta} - 1)]} \right|.$$

因此, 当 $\tau = 2$ 或对称的 Joukowski 翼型时, 后缘点 z_T 处的速度不为 0; 而当 $\tau < 2$ 时, 后缘点为流动的一个驻点.

从而, 翼型表面上的压力系数为

$$C_p(z) = 1 - \frac{|V|^2}{U^2 c^2} = 1 - \left| 2^{3-\tau} \cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) \sin^{2-\tau}\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{(-\epsilon + (1+\epsilon)e^{i\theta})^\tau}{(1+\epsilon)^{\tau-1}[\tau + (1+\epsilon)(e^{i\theta} - 1)]} \right|^2.$$

因此, 后缘点 z_T 处对称的 Joukowski 翼型 ($\tau = 2$) 和非 Joukowski 翼型 ($\tau < 2$) 的压力系数定义如下:

$$C_p(z_T) = \begin{cases} 1 - \frac{\cos^2 \alpha}{4(1+\epsilon)^2}, & \tau = 2, \\ 1, & 1 < \tau < 2. \end{cases}$$

4 数值模拟结果

运用本文第 1 和第 2 节给出的数值算法,在水深无限的耗散自由表面下,计算浸没在水深 h 的水翼周围的势流.取水翼的冲角 $\alpha = 5^\circ$,映射面数 $N = 80$,如果映射面数大于 80,也不会看到太显著的变化.浸没深度 h 为静止水面到水翼弦中点的竖向距离.

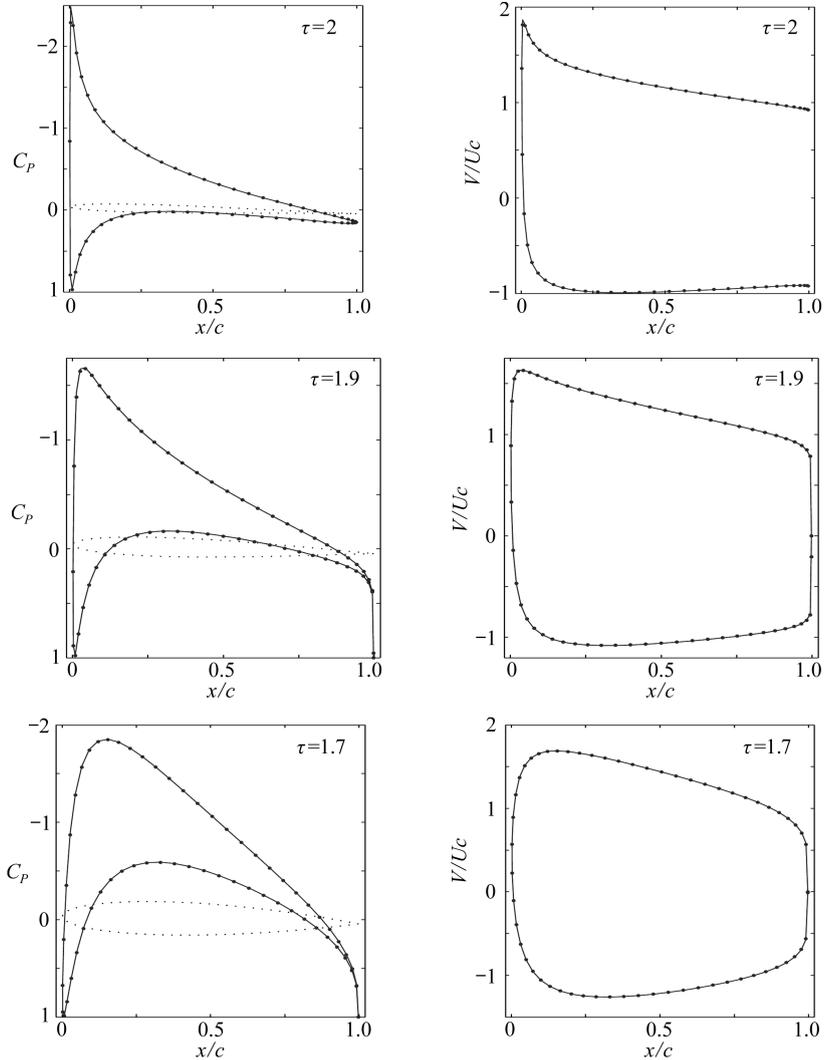


图 2 浸没的 Joukowski 型水翼(虚线)冲角 $\alpha = 5^\circ$, $\epsilon = 0.8$,取不同厚度 τ 时,压力系数 C_p 和切向速度的分析解(点线)和数值解(实线)的比较

Fig.2 Comparisons of analytical (point lines) and numerical (solid lines) solutions of the pressure coefficient C_p and tangential velocity for deeply submerged Joukowski type hydrofoils of varying thickness (τ , $\epsilon = 0.8$). The hydrofoils (dotted lines) operate at an angle of attack $\alpha = 5^\circ$

首先对深度浸没的 Joukowski 型水翼 ($\tau \leq 2$) 进行数值模拟.由于耗散 Green 函数的像源和自由表面部分的 $\nabla(\zeta - \bar{z})$ 为 0,因而在这种情况下,水翼的动态特性与 Froude 数的选取无

关. 图2 给出了数值解和分析解的比较, 对称的 Joukowski 翼型 ($\tau = 2$) 和翼型后缘点相应驻点 ($\tau = 1.7, 1.9$) 的计算结果是精确的.

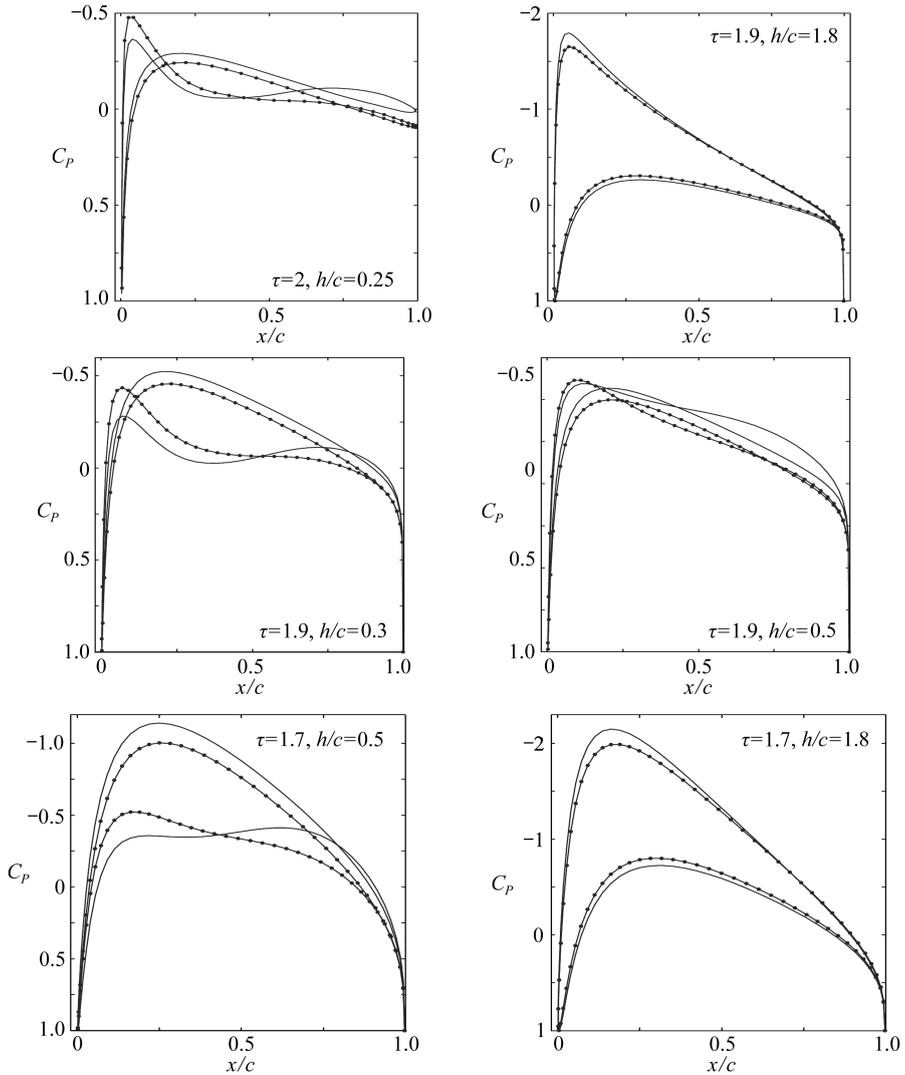


图3 Joukowski 型水翼的冲角 $\alpha = 5^\circ$, $\epsilon = 0.95$, 耗散系数 $\mu = 0.001$ (即耗散几乎可以忽略), 厚度 τ 和浸没深度 h/c 可变时, 水翼压力系数 C_p 的数值解 (其中, Froude 数 $Fn = 1$ (点实线) 或 $Fn = 0.8$ (实线))

Fig. 3 Numerical pressure coefficients C_p for Joukowski type hydrofoils of varying thickness ($\tau, \epsilon = 0.95$). The hydrofoil operates at either Froude number $Fn = 1$ (point-solid lines) or $Fn = 0.8$ (solid lines) at angle of attack $\alpha = 5^\circ$, differing submerged depths h/c and chosen dissipative number $\mu = 0.001$ (i. e., dissipation practically ignored)

接着在图3中, 给出了在不同浸没深度 h 下水翼压力系数的数值解, 用 Froude 数 Fn 量度自由表面的影响, 其中耗散系数 $\mu = 0.001$ 很小, 表明流体流动过程中能量的耗散可以忽略不计.

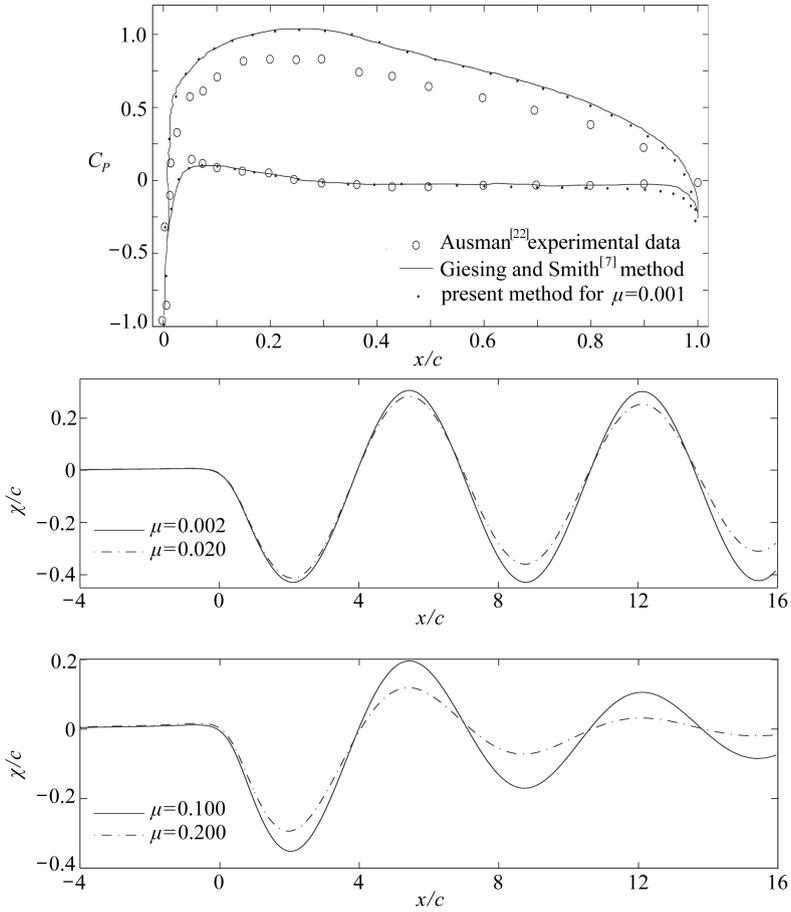
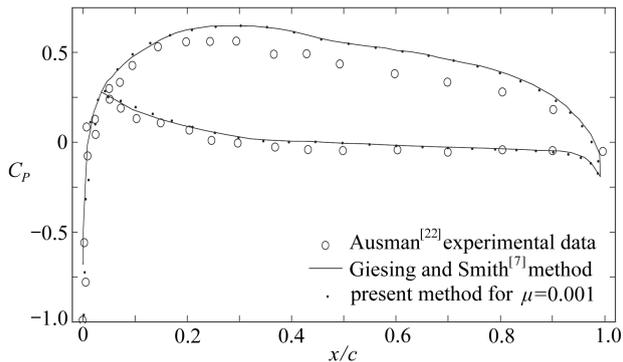


图4 NACA4412翼型的冲角 $\alpha = 5^\circ$, Froude数 $Fn = 1.03$, 浸没深度 $h/c = 0.94$ 时, 压力系数的比较及其所生成的自由表面波

Fig. 4 Comparisons of pressure coefficients and generated free-surface waves for a NACA4412 foil operating at an angle of attack $\alpha = 5^\circ$, Froude number $Fn = 1.03$ and water depth $h/c = 0.94$

为了进一步验证 Chen^[16] 提出的耗散法的适应性和精度, 就 NACA4412 翼型冲角 $\alpha = 5^\circ$, Froude 数 $Fn = 1.03$, 浸没深度 $h/c = 0.94$ 时, 本文的计算结果与 Giesing^[7] 的结果和 Ausmann^[22] 的实验数据进行比较, 见图 4。



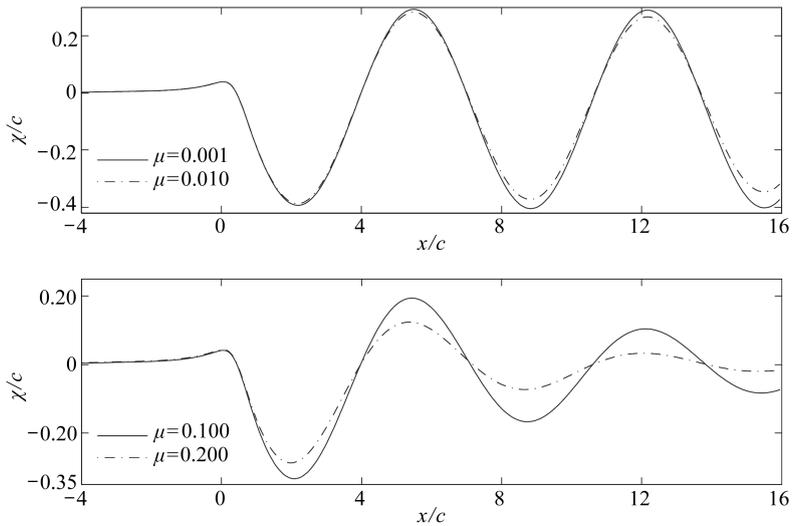


图5 NACA4412翼型的冲角 $\alpha = 5^\circ$, Froude数 $Fn = 1.03$, 浸没深度 $h/c = 0.6$ 时, 压力系数的比较及其所生成的自由表面波

Fig. 5 Comparisons of pressure coefficients and generated free-surface waves for a NACA4412 foil operating at an angle of attack $\alpha = 5^\circ$, Froude number $Fn = 1.03$ and a submerged water depth $h/c = 0.6$

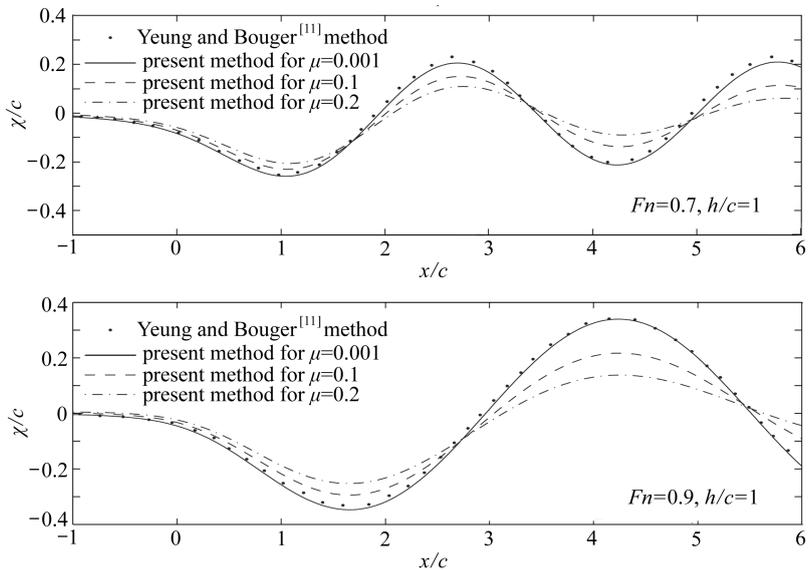


图6 NACA4412翼型的冲角 $\alpha = 5^\circ$, 浸没深度 $h/c = 1$, Froude数可变时, 生成的自由表面波的比较

Fig. 6 Comparisons of generated free-surface waves for a NACA4412 hydrofoil operating at various Froude number, an angle of attack $\alpha = 5^\circ$ and a submerged water depth $h/c = 1$

当耗散系数 $\mu \leq 0.002$ 时, 计算得到的流体运动等价于无耗散的情况, 相关的数值结果几乎相同. 图4显示, 当 $h/c = 0.94$, $\mu = 0.001$ 时, 本文得到的压力系数, 与 Giesing^[7]得到的结果是十分接近的, 这些结果和 Ausmann^[22]得到的实验数据也吻合得很好. 从图4还可以看出, 自

由表面波的阻尼由耗散系数 μ 所控制, 类似于粘性阻尼, 波高随着相互作用距离的增加而减少. 例如, 当 $\mu = 0.002$ 时, 耗散完全可以忽略不计, 流体运动几乎可以看成守恒的; 但是当 $\mu = 0.02, 0.1, 0.2$ 时, 自由表面波的阻尼变得非常明显, $\mu = 0.1$ 时的阻尼已经很强了. 因此, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 波的扰动减少至 0, 今后看作是一个内含的条件, 在有势流假设的基础上建立起船舶运动的数学模型.

图 5 给出了 NACA4412 翼型压力系数的比较, 这时 $\alpha = 5^\circ, Fn = 1.03, h/c = 0.6$. 图 5 确认了图 4 得到的压力系数现象: 当 μ 从 0.001 起逐渐增大, 压力系数接近于 Ausmann^[22] 的实验数据, Chen^[16] 发现了该现象, 本文也得到了同样的结果.

最后, 图 6 给出了 NACA4412 翼型生成的自由表面波, 这时 $\alpha = 5^\circ, h/c = 1, \mu$ 和 Fn 是可变的. 从图 6 可以看出, 本文与 Yeung 和 Bouger^[10] 混合方法得到的结果吻合得很好.

5 讨论和总结

本文利用耗散自由表面 Green 函数法^[16], 描述耗散自由表面下水翼周围流体的流动, 水翼表面用双向分布表示. 流动按线性耗散自由表面边界条件作用下的无旋流动, 或者有势流动进行数学建模. 所得到的边界积分方程, 仅水翼表面出现双向分布, 它描述了流体与结构之间的相互作用. 用本方法得到的数值结果与已有实验数据进行了比较, 数值解和分析解进行了比较, 验证了 Chen^[16] 对自由表面波阻尼能量耗散效应所作的讨论.

耗散系数 μ 描述了流体的摩擦效应, 类似于 Havelock^[18] 对 Rayleigh 粘性参数的讨论. 当 $\mu \rightarrow 0$ 时, Newman^[3] 所采用的耗散系数, 了解频率域中自由表面 Green 函数的奇异积分的特性.

本文得到的数值解, 与 Joukowski 型水翼的分析解、Giesing 等^[7] 得到的数值解, 以及 Ausmann^[22] 就的 NACA4412 翼型的实验数据, 均有良好的一致性. 本文在 $\mu < 0.001$ 时的数值解类似于, Giesing 和 Smith^[7] 就无耗散势流动得到的结果. 关系波高的数值解, 揭示了空域中耗散系数(即波阻尼)的影响, 表明在流体的运动中, 随着波无限传播时的能量耗散, 波高逐渐地减小.

常规的自由表面 Green 函数的奇异积分, 导致出现非物理的自由表面波振荡. 基于耗散自由表面 Green 函数的数值解消除了频率域的奇异性, 为有势流动自由表面波的阻尼, 提供了一个介绍、描述和理解的方法.

参考文献 (References):

- [1] Batchelor G K. *An Introduction to Fluid Dynamics*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1967.
- [2] Lamb H. *Hydrodynamics*[M]. sixth edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1932.
- [3] Newman J N. Evaluation of the wave-resistance Green function—part 1: the double integrals [J]. *Journal of Ship Research*, 1987, **31**(2): 79-90.
- [4] Inglis R B, Price W G. Calculation of the velocity potential of a translating pulsating source [J]. *Transactions of Royal Institution of Naval Architects*, 1981, **123**: 163-175.
- [5] Inglis R B, Price W G A. Three dimensional ship motion theory: comparison between theoretical predictions and experimental data of the hydrodynamic coefficients with forward speed

- [J]. *Transactions of Royal Institution of Naval Architects*, 1981, **124**:141-157.
- [6] Hess J L, Smith A M O. Calculation of potential flow about arbitrary bodies[J]. *Progress in Aeronautical Sciences*, 1966, **8**: 1-138.
- [7] Giesing J P, Smith A M O. Potential flow about two-dimensional hydrofoil[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, **28**(1): 113-129.
- [8] Dawson C W. A practical computer method for solving ship wave problems[C]//*Proceedings of 2nd International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics*. Berkeley: University of California, 1977:30-38.
- [9] Kouh J S, Lin T J, Chau S W. Performance analysis of two-dimensional hydrofoil under free surface[J]. *Journal of Engineering at National Taiwan University*, 2002, **86**: 113-123.
- [10] Yeung R W, Bouger Y C. Hybrid integral-equation method for the steady ship-problem[C]//*Second International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics*, Berkeley, 1977:160-175.
- [11] Yeung R W, Bouger Y C. A hybrid integral-equation method for steady two-dimensional ship waves[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1979, **14**(3):317-336.
- [12] Faltinsen O M, Semenov Y A. The effect of gravity and cavitation on a hydrofoil near the free surface[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2008, **597**(1):371-394.
- [13] Wehausen J V, Laitone E V. *Surface Waves, Handbuch der Physik*[M]. Berlin: Springer, 1960, **9**:446-778.
- [14] Bessho M. On the fundamental singularity in the theory of ship motions in a seaway[J]. *Memories of the Defense Academy Japan*, 1977, **17**(3): 95-105.
- [15] Iwashita H, Ohkusu M. The green function method for ship motions at forward speed[J]. *Ship Technology Research*, 1992, **39**(2): 3-21.
- [16] Chen Z M. A vortex based panel method for potential flow simulation around a hydrofoil[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2012, **28**(1):378-391.
- [17] Katz J, Plotkin A. *Low-Speed Aerodynamics*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [18] Havelock T H. Wave Resistance[J]. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 1928, **118**(779): 24-33.
- [19] Bondarenko N F, Gak M Z, Dolzhanskiy F V. Laboratory and theoretical models of plane periodic flows[J]. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 1979, **15**(10):711-716.
- [20] Chen Z M, Price W G. Supercritical regimes of liquid-metal fluid motions in electromagnetic fields: wall-bounded flows[J]. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 2002, **458**(2027):2735-2757.
- [21] Chen Z M, Price W G. Secondary fluid flows driven electromagnetically in a two-dimensional extended duct[J]. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 2005, **461**(2058): 1659-1683.
- [22] Ausman J S. Pressure limitation on the upper surface of a hydrofoil[D]. Ph D thesis. Berkeley: Mechanical Engineering at the University of California, 1954.

Dissipative Free-Surface Solver for the Potential Flow Around a Hydrofoil Distributed With Doublets

CHEN Zhi-min^{1,2}, W. G. Price

(1. *School of Engineering Sciences, University of Southampton,
Southampton SO171BJ, UK;*

2. *School of Mathematics, Nankai University, Tianjin 300071, P. R. China*)

Abstract: A doublet integral equation was formulated for a two-dimensional dissipative potential flow around a hydrofoil submerged below the free-water surface. The free-water surface was assumed to involve energy dissipation and thus was source of damping. A doublet panel method was developed from incorporation of dissipative Green function approach and doublets distribution on the hydrofoil surface. Numerical computations were implemented and derived numerical results were in good agreement with analytic solutions and experimental measurements.

Key words: panel method; potential flow; free-surface wave; energy dissipation; hydrofoil