

隧洞围岩应力复变函数分析法 中的解析函数求解*

祝江鸿

(浙江科技学院 建工学院,杭州 310023)

摘要: 利用复变函数理论进行地下任意开挖断面隧洞围岩应力分析的前提,是根据围岩应力边界条件方程推导出两个解析函数.从 Harnack 定理出发,将隧洞围岩应力边界条件方程转化成积分方程;把 Laurent 级数有限项表示的映射函数引入积分方程中,将以任意开挖断面为边界条件的解析函数求解转化成以单位圆周线为边界条件的求解问题.对积分方程中各被积函数在讨论域内的解析性进行了分析,在此基础上利用留数理论求解了方程中各项积分值,并获得了用来表示任意开挖断面隧道围岩应力的两个解析函数通式.给出了圆形和椭圆形隧道的两个解析函数求解算例,所获得的结果与文献中的结果一致.利用留数理论推导出的两个解析函数通式,适用于任意开挖断面隧洞的围岩应力解析解的计算,且计算过程更为简单,计算结果更为精确.

关键词: 围岩应力; 解析函数; 开挖断面; Laurent 级数; 留数理论

中图分类号: U451;O302 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.04.003

引 言

尽管地下隧洞围岩应力解析方法解决实际工程问题的作用十分有限,但通过对解析结果的分析获得的规律性认识,在理论价值上是不容忽视的,为此众多学者展开了大量研究.对地下圆形和椭圆形隧洞的围岩应力解析分析,由于开挖洞形相对简单,无论采用实变函数还是复变函数,均可方便地获得各种边界条件下的解析解^[1-3].对其它开挖洞形的地下隧洞围岩应力解析分析,则必须借助于复变函数理论^[4-5].一般思路为:通过保角变换把以复杂开挖断面为边界的问题,映射成以单位圆为边界条件的问题.然而从围岩应力边界条件方程中推导出用来表示围岩应力的两个解析函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$,在推导过程中对映射函数难于处理.从现有研究成果看,对映射函数的研究相对成熟^[6-8].对圆形和椭圆形隧洞的 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的推导,由于映射函数较简单,用 Cauchy 积分法或幂级数法可方便地求得解析函数^[9-11],但对其它开挖断面则显得办法不多.朱大勇等^[12]将应力边界条件方程中的 $\varphi_0(\sigma)$, $\psi_0(\sigma)$ 及映射函数组合项 $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}$ 展开成 Laurent 级数,然后代入到边界条件方程中,根据等式两边同幂项相等原则求解 3 个 Laurent 级数,将对一个方程的求解问题转化成上百个方程的求解,过程非常繁琐.

* 收稿日期: 2013-02-22

基金项目: 浙江省科技厅面上基金资助项目(2008C23009)

作者简介: 祝江鸿(1974—),男,浙江江山人,高级工程师(Tel: +86-571-85070856; E-mail: zhujiang-hong@zust.edu.cn).

吕爱钟、张路青等^[13-15]将应力边界条件方程转化成积分方程后,部分积分项的计算采用了 Cauchy 积分公式,而对被积函数 $(\omega(\sigma)/\omega'(\sigma))\overline{\varphi_0'(\sigma)}$ 则用一个新的级数来代替,赵凯等^[16]利用多角形法获得的映射函数求解了矩形洞室开挖后的围岩应力,在推导用来表示围岩应力的两个解析函数过程中,为简化计算,映射函数只取了 3 项。汤澄波等^[17-18],王润富、刘金高^[19-20]利用复变函数法分别对高地应力区天幕线拱形洞室断面围岩应力及马蹄形和梯形孔口的应力集中问题进行了分析,但均未给出解析函数的显式。

由上可知,现有的研究在利用复变函数理论推导用来表示围岩应力的 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 时,对解析函数或映射函数均作了数学上的处理,这种处理是以损失围岩应力的计算精度作为代价的;而且对于每一个具体问题都要重复上述的求解步骤,计算过程非常繁琐,不具有通用性。因此,对隧洞围岩应力复变函数分析法中的两个解析函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的求解研究是不成熟的。吕爱钟^[13-14]、张路青等^[15]及 Zhang 等^[21]在推导 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 过程中,对应力边界条件积分方程中的部分积分项采用了 Cauchy-Goursat 基本定理和 Cauchy 积分公式进行求解,这是较其它文献合理的地方。事实上, Cauchy-Goursat 基本定理和 Cauchy 积分公式均是留数定理的特殊情况,若地下隧洞应力边界条件积分方程中的每一被积函数解析性均已知,即被积函数在讨论域内的奇点个数和类型均明确,则无需将待求的解析函数或解析函数与映射函数组合项展开成级数求解,可应用留数理论直接求得每一积分项的积分,进而较方便地推导出用来表示围岩应力的 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 通式,使问题的求解大为简化且所获得的任意断面隧洞围岩应力解更为精确。

1 隧洞围岩应力的复变函数表示

1.1 z 变量表示的隧洞围岩应力

据平面弹性力学和复变函数理论知,在围岩容重为 γ ,围岩侧压力系数为 λ 及埋深为 H 的均质围岩中开挖任意断面隧洞,开挖后的围岩应力计算可按洞口平面应变问题考虑^[22-23],计算模型如图 1 所示;且围岩应力的弹性平面解可用两个解析函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 表示如下:

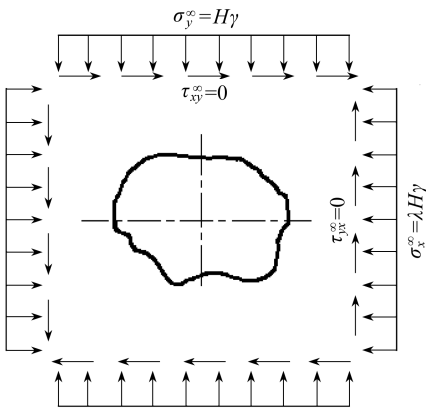


图 1 任意开挖断面隧洞计算模型

Fig. 1 Calculation model for the tunnel with arbitrary excavation cross section

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}[\varphi'(z)], \quad (1)$$

$$\sigma_y - \sigma_x = 2\text{Re}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = \text{Im}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \quad (3)$$

式中, z 为隧洞开挖后围岩中任意点, σ_x , σ_y 和 τ_{xy} 为该点的应力分量, \bar{z} 为 z 的共轭. $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 的表达式及隧洞洞周的应力边界条件方程式为^[4,21]

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi(1+k)}(X+iY)\ln z + Bz + \varphi_0(z), \quad (4)$$

$$\psi(z) = \frac{k}{2\pi(1+k)}(X-iY)\ln z + (B' + iC')z + \psi_0(z), \quad (5)$$

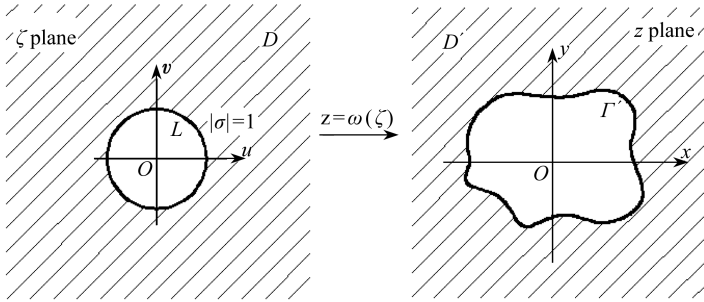
$$\varphi(t) + \overline{t\varphi'(t) + \psi(t)} = f(t), \quad (6)$$

$$B = \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{4}, B' = \frac{\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty}{2}, C' = \tau_{xy}^\infty, \quad (7)$$

式(4)和(5)中的 k 为整数, X 和 Y 为洞周面力沿坐标轴的合力分量; B, B' 和 C' 的值可按式(7)求得, 反映的是围岩应力与隧洞埋深、围岩容重及侧压力系数之间的关系; $\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$ 为待求的解析函数. 式(6)为隧洞洞周应力边界条件方程, t 为洞壁上任意点, $f(t)$ 为该点的面力合力. 式(7)中的 $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty$ 和 τ_{xy}^∞ 的力学意义及计算见图 1. 隧洞开挖后隧洞壁为自由表面, 因此洞周面力 $f(t)$ 为 0, 由此知 X 和 Y 亦为 0. 根据图 1 的计算模型知 C' 亦为 0. 将式(4)和(5)代入式(6)中, 若能求得 $\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$, 则根据式(4)和(5)可求得 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$.

1.2 ζ 变量表示的 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$

对隧洞的任意开挖断面, 直接求 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 是有困难的. 在 z 平面中的任意开挖断面, 可看成由 ζ 平面上的单位圆映射而得, 这样 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 就可用 ζ 变量表示, 因此就涉及到映射函数问题. 本文考虑将单位圆外域映射到任意断面隧洞外域(图 2), 该映射函数可用式(8)的 Laurent 级数有限项表示:



(a) 单位圆外域 (b) 任意断面隧洞外域
 (a) The region exterior to the unit circle (b) The region exterior to the tunnel with arbitrary excavation cross section

图 2 单位圆-任意开挖断面外域映射关系

Fig. 2 The mapping relationship between the region exterior to the unit circle and the region exterior to the tunnel with arbitrary excavation cross section

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{n=1}^m c_n \zeta^{-(n-2)}, \tag{8}$$

式中, m 为映射函数项数, 取值与实际开挖洞形的复杂程度及对映射函数精度的要求有关, c_n 为复常数, 已知 m 和 c_n 便确定了映射函数 $\omega(\zeta)$, 其求解可按文献[5]进行. 将式(8)代入式(4)和(5)并考虑应力边界条件, 则以 ζ 变量表示的 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 为

$$\varphi(z) = B\omega(\zeta) + \varphi_1(\zeta), \tag{9}$$

$$\psi(z) = B'\omega(\zeta) + \psi_1(\zeta), \tag{10}$$

其中

$$\varphi_1(\zeta) = \varphi_0(\omega(\zeta)), \psi_1(\zeta) = \psi_0(\omega(\zeta)).$$

单位圆周线上的点用 σ 表示, 将式(9)和(10)代入式(7)整理后得

$$\varphi_1(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_1(\sigma) + \psi_1(\sigma)} = -2B\omega(\sigma) - B'\overline{\omega(\sigma)}. \tag{11}$$

由于 $\omega(\zeta)$ 已知, 根据方程(11), 若求得 $\varphi_1(\zeta)$ 和 $\psi_1(\zeta)$, 则代入式(9)和(10)便获得了解析函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$.

2 解析函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的求解

2.1 解析函数 $\varphi_1(\zeta)$ 的求解

对式(11)两边作 Cauchy 积分算子:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\varphi_1(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\overline{\omega(\sigma)} \overline{\varphi_1(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}(\sigma - \zeta)} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\overline{\psi_1(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{-2B\omega(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{B' \overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma, \end{aligned} \quad (12)$$

式中规定 L 为图 2(a) 中逆时针方向的单位圆周线, ζ 为单位圆外任意点. 由 Harnack 定理知式(11)与(12)等价, 即将边界条件方程转化为积分方程后求得的解仍为原问题的解. 下面对方程中每一项进行积分求解, 先求等式右边第 1 项的积分.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{-2B\omega(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \\ -2B \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{c_1\sigma + c_2 + c_3\sigma^{-1} + \cdots + c_m\sigma^{-(m-2)}}{\sigma - \zeta} d\sigma, \end{aligned} \quad (13)$$

上式被积函数分子中第 1 和 2 项分别为 $c_1\sigma$ 和 c_2 , 均为圆内解析函数; 其它项 $c_3\sigma^{-1}, \dots, c_m\sigma^{-(m-2)}$, 在圆内除原点是奇点外均解析, 分母中的 ζ 是圆外任意点, 因此分母项在圆内亦是解析函数. 由 Cauchy-Goursat 基本定理知, 被积函数的第 1 和 2 项积分值均为 0. 根据留数理论知, 其它项积分是在原点的留数. 上述积分求解亦可在单位圆外域讨论, 被积函数在 ζ 和无穷远点是孤立奇点, 积分为两个奇点的留数和, 而无穷远点的留数为常数可略去. 两种算法的结果一致为

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{-2B\omega(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = -2B \sum_{n=3}^m c_n \zeta^{(n-2)}. \quad (14)$$

再来求式(12)右边第 2 项积分值. 由于 σ 是单位圆周上的点, 可作如下变换:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{B' \overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \\ -B' \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\overline{c_1\sigma} + \overline{c_2} + \overline{c_3}\sigma^{-1} + \cdots + \overline{c_m}\sigma^{-(m-2)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \\ -B' \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\overline{c_1}\sigma^{-1} + \overline{c_2} + \overline{c_3}\sigma + \cdots + \overline{c_m}\sigma^{(m-2)}}{\sigma - \zeta} d\sigma. \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)右边第 1 项被积函数在圆内有原点这一奇点, 并易知是一级极点; 其他各项被积函数在圆内均解析, 其积分值均为 0, 因此有

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{B' \overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = -\operatorname{Re} \left[s \left[\frac{B' \overline{C_1}}{(\sigma - \zeta)\sigma}, 0 \right] \right] = \frac{B' \overline{C_1}}{\zeta}. \quad (16)$$

式(12)左边第 1 项的被积函数在圆外除 ζ 和无穷远点外处处解析, 由留数定理得

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\varphi_1(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = -\varphi_1(\zeta) + \varphi_1(\infty). \quad (17)$$

再来讨论式(12)左边第 2 项的积分. 令

$$F(\sigma) = \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_1(\sigma)}, \quad (18)$$

则有

$$\overline{F(\sigma)} = \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \varphi_1'(\sigma). \tag{19}$$

$\varphi_1(\zeta)$ 和 $\omega(\zeta)$ 除无穷远点外是圆外解析函数,因此其一阶导数 $\varphi_1'(\zeta)$ 和 $\omega'(\zeta)$ 在圆外有相同的性质;而 $\overline{\omega(\sigma)}$ 可以看成为式(20)在圆周上的取值.

$$\frac{\overline{C_1}}{\zeta} + \overline{C_2} + \overline{C_3}\zeta + \dots + \overline{C_m}\zeta^{(m-2)} = \sum_{n=1}^m \overline{C_n}\zeta^{(n-2)}. \tag{20}$$

显然式(20)在圆外域是除无穷远点的解析函数.由解析函数性质知,上述3个函数的积和商组合在圆外除无穷远点处处解析,而 $\overline{F(\sigma)}$ 是这个组合函数在圆周上的取值.根据圆的对称点原理知, $F(\sigma)$ 必是圆内解析函数在单位圆周上的取值^[24],故有

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\omega(\sigma) \overline{\varphi_1'(\sigma)}}{\omega'(\sigma)(\sigma - \zeta)} d\sigma = 0. \tag{21}$$

同理知式(12)左边第3项的积分:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\overline{\psi_1(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = 0. \tag{22}$$

根据上述讨论结果,并略去常数项有

$$\varphi_1(\zeta) = -2B \sum_{n=3}^m C_n \zeta^{-(n-2)} - B' \overline{C_1} \zeta^{-1}. \tag{23}$$

2.2 解析函数 $\psi_1(\zeta)$ 的求解

再来讨论 $\psi_1(\zeta)$ 的求解.对式(11)取共轭得

$$\overline{\varphi_1(\sigma)} + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \varphi_1'(\sigma) + \psi_1(\sigma) = -2B \overline{\omega(\sigma)} - B' \omega(\sigma). \tag{24}$$

对方程(24)两边作用 Cauchy 积分算子有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\overline{\varphi_1(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\overline{\omega(\sigma)} \varphi_1'(\sigma)}{\omega'(\sigma)(\sigma - \zeta)} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\psi_1(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \\ & - \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{2B \overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{B' \omega(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma, \end{aligned} \tag{25}$$

式中 L 和 ζ 的规定同上.参照 $\varphi_1(\zeta)$ 的求解知

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\overline{\varphi_1(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = 0, \tag{26}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\psi_1(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = -\psi_1(\zeta) + \psi_1(\infty), \tag{27}$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{2B \overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{2B \overline{C_1}}{\zeta}, \tag{28}$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{B' \omega(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = B' \sum_{n=3}^m C_n \zeta^{-(n-2)}. \tag{29}$$

现重点讨论式(25)左边中间项的积分.由前述知 $\overline{F(\sigma)}$ 是圆外域除无穷远点外的解析函数在圆周上的取值,因此该被积函数在圆外有 ζ 和无穷原点两个奇点,其中在 ζ 是一级极点,而

在无穷远处是 $m - 2$ 级极点,可用留数计算规则求其积分,也可由 Cauchy 积分公式求之:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\overline{\omega(\sigma)} \varphi_1'(\sigma)}{\omega'(\sigma)(\sigma - \zeta)} d\sigma = - \frac{\sum_{n=1}^m \overline{c_n} \zeta^{(n-2)} \varphi_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \overline{F(\infty)}, \quad (30)$$

其中 $\overline{F(\infty)}$ 是常数. 根据上述讨论结果,并略去常数项有

$$\psi_1(\zeta) = - \frac{\sum_{n=1}^m \overline{c_n} \zeta^{(n-2)} \varphi_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \frac{2B \overline{C_1}}{\zeta} - B' \sum_{n=3}^m C_n \zeta^{-(n-2)}. \quad (31)$$

2.3 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的求解

将式(23)和(31)代入式(9)和(10)整理后,有

$$\varphi(z) = -B\omega(\zeta) + 2Bc_1\zeta - B' \overline{c_1} \zeta^{-1}, \quad (32)$$

$$\psi(z) = -\varphi_1'(\zeta) [\omega'(\zeta)]^{-1} \sum_{n=1}^m \overline{c_n} \zeta^{(n-2)} + B' c_1 \zeta - 2B \overline{c_1} \zeta^{-1}. \quad (33)$$

3 算 例

3.1 地下隧洞圆形开挖断面

假设在地下开挖一半径为 R 的圆形断面隧道. 要获知用来表示围岩应力的 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$, 首先要明确映射函数的表达式. 根据式(8), 将单位圆外域映射到半径为 R 的圆外域, 映射函数可按下式给出为

$$z = c_1 \zeta, \quad (34)$$

其中 c_1 等于 R , 为实常数. 将式(34)代入式(23)并求一阶导数后得

$$\varphi_1'(\zeta) = B' c_1 \zeta^{-2}. \quad (35)$$

将式(34)和(35)代入式(32)和(33)后得

$$\varphi(z) = Bc_1\zeta - B' c_1 \zeta^{-1}, \quad (36)$$

$$\psi(z) = B' c_1 \zeta - 2Bc_1 \zeta^{-1} - B' c_1 \zeta^{-3}. \quad (37)$$

根据式(34), 将上述两式的 ζ 转化成 z 后有

$$\varphi(z) = Bz - \frac{B'R^2}{z}, \quad (38)$$

$$\psi(z) = B'z - \frac{2BR^2}{z} - \frac{B'R^4}{z^3}. \quad (39)$$

式(38)和(39)给出的 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的表达式与文献中的幂级数法结果^[5,25]是一致的. 由于隧洞埋深、围岩容重及围岩侧压力系数已知, 将 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 代入式(1)、(2)和(3), 便可进行圆形隧洞开挖后的围岩应力计算.

3.2 地下隧洞椭圆形开挖断面

假设在地下开挖一椭圆形隧洞, 隧洞断面尺寸如图3所示. 根据公式(8), 将 ζ 平面上单位圆外域映射到 z 平面上椭圆形断面外域的映射函数为

$$z = \omega(\zeta) = c \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad (40)$$

其中, c 和 m 为实常数, $c = (a+b)/2$, $m = (a-b)/(a+b)$, 上述映射函数亦可参见文献[4-5]. 将式(40)转化成 Laurent 级数有限项的标准形式为

$$z = c_1 \zeta + \frac{c_3}{\zeta}, \tag{41}$$

其中, c_1, c_3 亦为实常数, $c_1 = c, c_3 = cm; c_2$ 为 0, 故没有写出. 将式(41)代入式(23)并求一阶导数后得

$$\varphi_1'(\zeta) = (2Bc_3 + B'c_1)\zeta^{-2}. \tag{42}$$

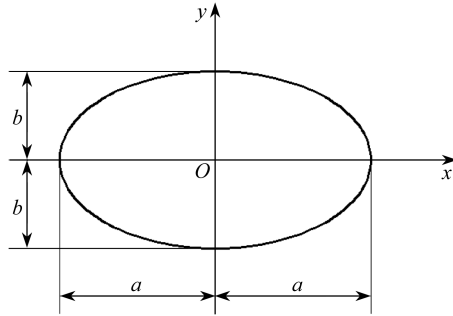


图 3 椭圆形隧洞尺寸

Fig.3 Sizes of the elliptic tunnel

将式(41)和(42)代入式(32)和(33)后得

$$\varphi(z) = Bc_1 \zeta - (B'c_1 + Bc_3)\zeta^{-1}, \tag{43}$$

$$\psi(z) = (2Bc_3 + B'c_1)[c_1 \zeta^2 - c_3]^{-1}(c_1 \zeta^{-1} + c_3 \zeta) + B'c_1 \zeta - 2Bc_1 \zeta^{-1}. \tag{44}$$

将 B, B', c_1 及 c_3 代入式(43)和(44)后, 可知 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 与文献[5, 9, 25]的结果一致.

3.3 地下隧洞其它开挖断面形状

无论是圆形还是椭圆形地下隧洞, 仅用一个方程就能描述它的开挖边界线, 故能给出精确的映射函数且函数的项数分别为 1 和 2 项, 因此用本文的方法求得的 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 在形式上较简单, 也容易和文献中所获得的结果作比较. 对于其它开挖断面形状的隧洞, 只要给出它们的映射函数, 利用本文所获的解析函数通式均可方便地求得 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的表达式. 现有文献对其它开挖断面形状的隧洞, 均未给出 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的显式, 因此无法对其它开挖断面形状的 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 求解作验证. 对其验证的思路是利用 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的通式并结合具体隧洞的映射函数, 进行围岩应力计算, 再将计算结果与数值计算结果或工程经验作比较, 由于篇幅所限, 这部分研究将另文给出. 事实上, 对任意开挖断面的隧洞, 只要给出映射函数, 无需对 $\varphi_0(\sigma)$, $\psi_0(\sigma)$, $\omega(\sigma)$ 及它们的组合项作任何的简化或截项处理, 利用文中的 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 通式可直接进行围岩应力计算, 且整个计算过程不发生任何计算精度损失, 计算精度仅依赖于映射函数的精度.

4 结 论

1) 从 Harnack 定理出发, 将任意开挖断面隧洞围岩应力边界条件方程转化成积分方程; 对每一被积函数在讨论域内的解析性进行了分析, 然后利用留数定理直接求得了积分方程中每一积分项的积分; 最后推导出用来求解任意开挖断面隧洞围岩应力的两个解析函数通式.

2) 与文献中其它方法相比, 本文在推导 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的过程中没有采用新的级数来代替被积函数, 也没对映射函数的项数作截项处理, 实际使用时只需将映射函数代入上述两个通式即可进行围岩应力计算, 因此较其它方法更简单有效且获得的围岩应力解析解更为精确.

3) 利用本文的 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 进行隧洞围岩应力计算是有条件的, 即映射函数是以将单位

圆外域映射到隧洞实际开挖断面外域的 Laurent 级数有限项的形式给出;同时圆形和椭圆形隧洞的两个解析函数求解表明,本文给出的 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 表达式是可靠的。

参考文献(References):

- [1] WANG Shui-lin, WU Zhen-jun, GUO Ming-wei, GE Xiu-run. Theoretical solutions of a circular tunnel with the influence of axial in situ stress in elastic-brittle-plastic rock[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2012, **30**: 155-168.
- [2] LI Shu-cai, WANG Ming-bin. Elastic analysis of stress-displacement field for a lined circular tunnel at great depth due to ground loads and internal pressure[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2008, **23**(6): 609-617.
- [3] Gao G Y, Chen Q S, Zhang Q S, Chen G Q. Analytical elasto-plastic solution for stress and plastic zone of surrounding rock in cold region tunnels[J]. *Cold Regions Science and Technology*, 2012, **72**: 50-57.
- [4] Muskhelishvili N I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity: Fundamental Equations, Plane Theory of Elasticity, Torsion, and Bending*[M]. Groningen: P Noordhoof, 1953.
- [5] 陈子荫. 围岩力学分析中的解析方法[M]. 北京:煤炭工业出版社, 1994. (CHEN Zi-yin. *Analytic Method of Mechanical Analysis for the Surrounding Rock*[M]. Beijing: Coal Industry Publishing House, 1994. (in Chinese))
- [6] Zhu J H, Ji H G. The comparison of surrounding rock stress analytical solutions for three tunnel sections[C]//*Proceeding of the 2nd ISRM International Young Scholars' Symposium on Rock Mechanics*, 2011: 741-744.
- [7] 皇甫鹏鹏, 伍法权, 郭松峰, 熊峥. 基于边界点搜索的洞室外域映射函数求解法[J]. 岩石力学, 2011, **32**(5): 1418-1424. (HUANGFU Peng-peng, WU Fa-quan, GUO Song-feng, XIONG Zheng. A new method for calculating mapping function of external area of cavern with arbitrary shape based on searching points on boundary[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2011, **32**(5): 1418-1424. (in Chinese))
- [8] 朱大勇, 钱七虎, 周早生, 徐文焕. 复杂形状洞室映射函数的新解法[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, **18**(3): 279-282. (ZHU Da-yong, QIAN Qi-hu, ZHOU Zao-sheng, XU Wen-huan. New method for calculating mapping function of opening with complex shape[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 1999, **18**(3): 279-282. (in Chinese))
- [9] 蔡晓鸿, 蔡勇斌, 蔡勇平, 甘晓荣, 孙富学. 二向不等围压和内压作用下椭圆形洞室的计算[J]. 地下空间与工程学报, 2008, **4**(3): 453-459. (CAI Xiao-hong, CAI Yong-bin, CAI Yong-ping, GAN Xiao-rong, SUN Fu-xue. Computation of elliptic tunnel under the combined action of two-dimensional unequal adjoining rock pressure and internal pressure[J]. *Chin J Undergr Sp Eng*, 2008, **4**(3): 453-459. (in Chinese))
- [10] 卢文超, 仲政, 王旭. 浅埋隧道围岩应力场的解析解[J]. 力学季刊, 2003, **24**(1): 50-54. (LU Wen-chao, ZHONG Zheng, WANG Xu. Analytical solution for stress field in surrounding rocks of shallow tunnel[J]. *Chin Quart Mech*, 2003, **24**(1): 50-54. (in Chinese))
- [11] 王明斌, 李术才, 李树忱, 王兆清. 圆形隧道围岩附加应力场的解析解答[J]. 岩土力学, 2006, **27**(增刊): 207-210. (WANG Ming-bin, LI Shu-cai, LI Shu-chen, WANG Zhao-qing. Analytical solution of subsidiary stress field for circular tunnel[J]. *Rock Soil Mech*, 2006, **27**(supp): 207-210. (in Chinese))

- [12] 朱大勇, 钱七虎, 周早生, 徐文焕. 复杂形状洞室围岩应力弹性解析分析[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, **18**(4):402-404. (ZHU Da-yong, QIAN Qi-hu, ZHOU Zao-sheng, XU Wen-huan. Elastic solution to stresses of rock masses around openings with complex shape[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 1999, **18**(4): 402-404. (in Chinese))
- [13] 吕爱钟. 地下洞室最优开挖形状的确定方法[J]. 岩石力学与工程学报, 1996, **15**(3):275-281. (LÜ Ai-zhong. The method for optimum shapes of tunnels and cavities[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 1996, **15**(3): 275-281. (in Chinese))
- [14] 吕爱钟. 高地应力区地下洞室断面形状的选择方法[J]. 煤炭学报, 1997, **22**(5):495-498. (LÜ Ai-zhong. Selection method of section configuration of underground chamber in high strata stress zone[J]. *Journal of China Coal Society*, 1997, **22**(5):495-498. (in Chinese))
- [15] 张路青, 杨志法, 吕爱钟. 两平行的任意形状洞室围岩位移场解析法研究及其在位移反分析中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2000, **19**(5):584-589. (ZHANG Lu-qing, YANG Zhi-fa, LÜ Ai-zhong. Analysis study on displacement field of surrounding rocks of two parallel tunnels with arbitrary shapes[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2000, **19**(5): 584-589. (in Chinese))
- [16] 赵凯, 刘长武, 张国良. 用弹性力学的复变函数法求解矩形洞室周边应力[J]. 采矿与安全工程学报, 2007, **24**(3):361-365. (ZHAO Kai, LIU Chang-wu, ZHANG Guo-liang. Solution for perimeter stresses of rocks around a rectangular chamber using the complex function of elastic mechanics[J]. *Journal of Mining & Safety Engineering*, 2007, **24**(3): 361-365. (in Chinese))
- [17] 汤澄波, 沈其良. 煤矿深部天幕巷道围岩应力分析和围岩稳定性[J]. 煤炭学报, 1994, **19**(5):531-540. (TANG Cheng-bo, SHEN Qi-liang. Stresses and stability analysis of rocks surrounding a tunnel in cyclorama arch section in deep mines[J]. *Journal of China Coal Society*, 1994, **19**(5): 531-540. (in Chinese))
- [18] 汤澄波, 范广勤. 高地应力区天幕线拱形洞室断面的解法[J]. 煤炭工程, 1989(1):16-18. (TANG Cheng-bo, FAN Guang-qin. Determination of the mapping function for the exterior domain of a non-circular opening by means of the multiplication of tree absolutely convergent series[J]. *Coal Engineering*, 1989(1): 16-18. (in Chinese))
- [19] 王润富. 弹性力学的复变函数计算机解[J]. 河海大学学报, 1991, **19**(2):71-74. (WANG Run-fu. Computer solutions for complex function in elasticity[J]. *Journal of Hohai University*, 1991, **19**(2): 71-74. (in Chinese))
- [20] 刘金高, 王润富. 马蹄形孔口和梯形孔口的应力集中问题[J]. 岩土工程学报, 1995, **17**(5):57-63. (LIU Jin-gao, WANG Run-fu. The stress concentration of U-shaped and ladder-shaped holes[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1995, **17**(5): 57-63. (in Chinese))
- [21] Zhang Z Z, Sun Y Z. Analytical solution for a deep tunnel with arbitrary cross section in a transversely isotropic rock mass[J]. *Int J Rock Mech Min*, 2011, **48**(8): 1359-1363.
- [22] 蔡美峰, 何满潮, 刘东燕. 岩石力学与工程[M]. 北京: 科学出版社, 2002. (CAI Mei-feng, HE Man-chao, LIU Dong-yan. *Rock Mechanics and Engineering* [M]. Beijing: Science Press, 2002. (in Chinese))
- [23] 张倬元, 王士天, 王兰生. 工程地质分析原理[M]. 第2版. 北京: 地质出版社, 2005. (ZHANG Zhuo-yuan, WANG Shi-tian, WANG Lan-sheng. *Principles of Engineering Geological Analysis* [M]. 2nd ed. Beijing: Geological Publishing House, 2005. (in Chinese))
- [24] 祝江鸿. 公路小净距隧道围岩稳定性与合理净距研究[D]. 博士论文. 北京: 北京科技大学, 2012. (ZHU Jiang-hong. Study on the surrounding rock stability and reasonable clear interval

for road neighborhood tunnel[D]. Ph D thesis. Beijing: University of Science and Technology, 2012. (in Chinese))

- [25] 吕爱钟, 张路青. 地下隧道力学分析中的复变函数方法[M]. 北京: 科学出版社, 2007. (LÜ Aizhong, ZHANG Lu-qing. *Mechanics Analysis With Complex Variables Function in Tunnel Underground*[M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese))

Analytic Functions in Stress Analysis of the Surrounding Rock for Caverns With the Complex Variable Theory

ZHU Jiang-hong

(School of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, P. R. China)

Abstract: Two analytic functions must be derived from the stress equation for the boundary condition, when the surrounding rock stress is analyzed in the tunnel with arbitrary excavation cross section with the complex variable theory. Based on the Harnack theorem, the stress equation for the boundary condition was transformed into an integral equation in the surrounding rock. The mapping function expressed with the finite Laurent series was introduced into the integral equation, and then the boundary with arbitrary excavation cross section was changed into the boundary with the unit circle line for solving two analytic functions. The analyticity was studied for each integrand in the integral equation in discussed domain. Using above result, each integral term of the equation was solved with the residue theorem and the general formulas of two analytic functions were obtained to calculate the surrounding rock stress in tunnel with arbitrary excavation cross section. Moreover, study examples of the analytic functions were provided for the circular tunnel and the elliptic tunnel and two general formulas for analytic function. The results were in accordance with the literatures. General formulas of two analytic function obtained with the residue theorem are adopted to calculate the surrounding rock stress in the caverns with arbitrary excavation cross section. Compared to other methods, it is much simpler to obtain the analytical solutions and the calculating results are more precise for the actual caverns.

Key words: surrounding rock stress; analytic function; excavation cross section; Laurent series; residue theorem