文章编号:1000-0887(2013)04-0427-09

具有非局部源的快扩散方程组解的熄灭*

王 娟[1], 陈玉娟[1], 张海星[1], 陆 晨[2]

(1. 南通大学 理学院, 江苏 南通 226007;
2. 南通大学 电子信息学院, 江苏 南通 226019)

摘要: 利用上下解的方法和积分估计, 研究了一类具有非局部源的快扩散方程组解熄灭的充分条件,证明当参数和初值满足一定条件时,解在有限时刻发生熄灭.

关 键 词: 快扩散方程组; 熄灭; 非局部源
中图分类号: O175.29 **文献标志码:** A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.04.011

1 引言及主要结论

在本文中,考虑如下具有非局部源的拟线性抛物型方程组问题:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + a\int_\Omega v^p(y,t)\,\mathrm{d}y, & x\in\Omega,\ t>0,\\ v_t = \Delta v^n + b\int_\Omega u^q(y,t)\,\mathrm{d}y, & x\in\Omega,\ t>0,\\ u(x,t)=v(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega \end{cases} \tag{1}$$

解的熄灭性质,其中, $0<m<1$, a, b, p, $q>0$,$\Omega\subset R^N(N>2)$ 具有光滑边界 $\partial\Omega$,u_0, v_0 为 $L^\infty(\Omega)$ 中的非负函数. 对于具有吸收项的抛物型问题:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - u^q, & x\in\Omega,\ t>0,\\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

最早由 Kalashnikov[1] 于上世纪 80 年代研究,并得到在一定条件下解在有限时间熄灭. 1994 年顾永耕[2] 提到问题(2)的解熄灭的充要条件是 $0<q<1$, 这表明强吸收可能导致解熄灭. Peletier 等[3] 研究了快扩散情形.

对于具有源项的抛物型问题:

* **收稿日期:** 2013-02-02; **修订日期:** 2013-03-19
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11271209); 江苏省教育厅自然科学(面上)基金资助项目(12KJB110018);2013 年江苏省政府留学奖学金项目;全国大学生实践创新计划基金资助项目(201210304005)
作者简介: 王娟(1979—), 女, 江苏南通人, 硕士生(E-mail: tzsgwjg@126.com);
陈玉娟(1969—), 女, 江苏南通人, 教授(通讯作者. E-mail: nttccyj@ntu.edu.cn).

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + a u^p, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,\ t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,\ 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

文献[4-6]也研究了该问题解的熄灭性质,并得到在 $0 < m < 1$ 时,如果 $p > m$,当初值充分小时,问题(3) 的唯一解熄灭,如果 $p < m$,问题(3) 的最大解是正的,即解不会熄灭,如果 $p = m$, Dirichlet 问题的第一特征值起到了重要作用. Tian 和 Mu[7] 研究了相应的 p -Laplace 情形. 更多的有关退化或奇异抛物问题的解的结果,可参见文献[8-12].

对于含非局部源项的抛物型方程:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + a\int_\Omega u^p(y,\ t)\,\mathrm{d}y, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,\ t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,\ 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Han 和 Gao[13] 的研究得到了和问题(3)类似的结果,只是当 $p = m$ 时解是否熄灭不与第一 特征值 $-\lambda$ 有关,而与

$$\mu := \int_\Omega \varphi(x)\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

有关,其中 φ 是如下椭圆形问题:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = 1, & x \in \Omega, \\ \varphi(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

的唯一正解.

对于抛物型方程组,有关解的爆破结果较多,可参见文献[14-18],对于熄灭问题的研究文献并不多见. 本文的目的就在于研究形如问题(1)的解的熄灭性质,希望得到解熄灭的条件. 显然,如果 $m > 1$ 问题(1) 退化,如果 $0 < m < 1$ 问题(1)奇异,通常情况下问题(1)没有古典解. 为了陈述弱解的定义,我们首先定义非负的检验函数类

$$F = \{\xi : \xi \in C(\bar{Q}) \cap C^{2,1}(Q_T),\ \xi_t, \Delta\xi \in L^2(Q_T),\ \xi \geqslant 0,\ \xi|_{\partial\Omega\times(0,\ T)} = 0\},$$

其中 $Q_T = \Omega \times (0,\ T)$.

定义 1 一组函数 $(u(x,\ t), v(x,\ t)) \in (L^\infty(Q_T))^2$ 称为问题(1) 在 Q_T 上的一个下解,如果下面的条件成立:

1) $u(x,\ t) \leqslant 0,\ v(x,\ t) \leqslant 0,\ x \in \partial\Omega,\ t > 0$;

2) $u(x,\ 0) \leqslant u_0(x),\ v(x,\ 0) \leqslant v_0(x),\ x \in \Omega$;

3) 对任何 $t \in (0,\ T)$ 以及任意的 $\xi,\ \eta \in F$, 满足

$$\int_\Omega u(x,\ t)\xi(x,t)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega u(x,0)\xi(x,0)\,\mathrm{d}x + \int_0^T\int_\Omega \left[u\xi_s + u^m\Delta\xi + a\xi\int_\Omega v^p(y,s)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}s,$$

$$\int_\Omega v(x,\ t)\eta(x,\ t)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega v(x,\ 0)\eta(x,\ 0)\,\mathrm{d}x + \int_0^T\int_\Omega \left[v\xi_s + v^n\Delta\xi + b\eta\int_\Omega u^q(y,\ s)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}s.$$

如果 $(u(x,\ t),\ v(x,\ t))$ 是满足条件 1) ~ 3) 相反的不等式, 称 $(u(x,\ t), v(x,\ t)) \in (L^\infty(Q_T))^2$ 是问题(1) 在 Q_T 上的一个上解. 对某个 $T > 0$,如果$(u(x,\ t),\ v(x,\ t))$既是上解

又是下解,称函数$(u(x, t), v(x, t))$是问题(1)的局部解.

注 为了得到解熄灭的充分条件,我们分为$pq > mn$和$pq = mn$讨论,当$pq > mn$时,为了陈述方便起见,我们仅讨论$m = n$时的情形,对于$m \neq n$时的情形,方法是类似的.

本文的主要结论如下:

定理 1 假设$m = n$, $pq > m^2$且

$$\left(\frac{a}{\delta_1}\gamma_1^2 |\Omega|^{1+2/N+(m-p)/(m+1)}\right)^{1/m} \| v_0 \|_{1+m}^{p/m} \leqslant \| u_0 \|_{1+m} \leqslant$$

$$\left(\frac{\delta_2}{b\gamma_2^2 |\Omega|^{1+2/N+(m-q)/(m+1)}}\right)^{1/q} \| v_0 \|_{1+m}^{m/q}, \tag{7}$$

这里, $0 < \delta_1, \delta_2 < 1$, γ_1, γ_2如式(17)和(18)定义,那么问题(1)任意解$u(x, t)$, $v(x, t)$在有限时间熄灭.

定理 2 假设

$$pq = mn, \quad \left(a\int_\Omega \varphi^{p/n} \mathrm{d}x\right)^{1/m} \left(b\int_\Omega \varphi^{q/m} \mathrm{d}x\right)^{1/q} < 1,$$

其中, $\varphi(x)$为式(6)的解,那么对于适当小的初值,问题(1)存在有限时间熄灭的解.

推论 1 假设$m = q$, $n = p$且

$$\int_\Omega \varphi \mathrm{d}x \leqslant \min\{1/a, 1/b\},$$

其中, $\varphi(x)$为式(6)的解,那么对于适当小的初值,问题(1)的唯一解在有限时间熄灭.

本文接下来的内容将作这样的安排.在第 2 节,我们给出比较原理、问题(1)的弱解存在和唯一的性质.在第 3 节,着重证明主要结论.

2 解的存在性、唯一性、比较原理

定理 3 设$(u_0(x), v_0(x)) \in (L^\infty(Q_T))^2$,那么存在一个常数$T^* \in [0, T]$,使得问题(1)在$Q_{T^*}$存在一个解.

证 解的局部存在性可利用正则化方法得到,考虑其正则化问题:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + a\int_\Omega v^p(y, t)\mathrm{d}y, & x \in \Omega,\ 0 < t < T, \\ v_t = \Delta v^m + b\int_\Omega u^q(y, t)\mathrm{d}y, & x \in \Omega,\ 0 < t < T, \\ u(x, t) = v(x, t) = \dfrac{1}{k}, & x \in \partial\Omega,\ 0 < t < T, \\ u(x, 0) = u_0(x) + \dfrac{1}{k},\ v(x, 0) = v_0(x) + \dfrac{1}{k}, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

显然对每个$k \in \mathbf{N}$,式(8)存在局部解(u_k, v_k),为了证明$k \to \infty$时,(u_k, v_k)收敛于问题(1)的解(u, v),可以证明$\| u_k \|_\infty + \| v_k \|_\infty$是有界的且不依赖于$k$.事实上,以下常微分方程组:

$$\begin{cases} U_t = a\int_\Omega V^p(y,t)\mathrm{d}y, & t > 0, \\ V_t = b\int_\Omega U^q(y,t)\mathrm{d}y, & t > 0, \\ U(0) = \sup\limits_{x \in \partial\Omega} U_0(x) + 1,\ V(0) = \sup\limits_{x \in \partial\Omega} V_0(x) + 1 \end{cases}$$

的解 $(U(t),V(t))$ 是式(8)的上解。此外，由比较原理，(u_k,v_k) 关于 k 是非增的。所以我们可以定义 $\mathcal{U}(x,t)\equiv\lim_{k\to\infty}u_k(x,t)$，$\mathcal{V}(x,t)\equiv\lim_{k\to\infty}v_k(x,t)$，且易知 $(\mathcal{U}(x,t),\mathcal{V}(x,t))$ 是问题(1)的一个解。 □

接下来比较原理将起重要作用，证明方法类似于文献[4,19]，这里证明略去。

命题1（比较原理） 设 $(\underline{u}(x,t),\underline{v}(x,t))$，$(\bar{u}(x,t),\bar{v}(x,t))$ 分别是问题(1)的下解和上解，且存在 $\delta>0$，使得 $(\underline{u},\underline{v})\geqslant(\delta,\delta)$ 或者 $(\bar{u},\bar{v})\geqslant(\delta,\delta)$，如果 $(\underline{u}(x,0),\underline{v}(x,0))\leqslant(\bar{u}(x,0),\bar{v}(x,0))$，则对几乎所有的 $(x,t)\in\Omega_T$，$\underline{u}(x,t)\leqslant\bar{u}(x,t)$，$\underline{v}(x,t)\leqslant\bar{v}(x,t)$。

引理1 假设 $(u(x,t),v(x,t))$ 是问题(1)的任意一个解，且 $(\mathcal{U}(x,t),\mathcal{V}(x,t))$ 是由定理3得到的解。则对几乎所有的 $(x,t)\in\Omega_T$，$(u,v)\leqslant(\mathcal{U},\mathcal{V})$。

证 设 (u_k,v_k) 是式(8)的一个解。显然，$(u_k,v_k)\geqslant(1/k,1/k)$，且 (u_k,v_k) 是问题(1)的一个上解。由命题1，有

$$(u,v)\leqslant(u_k,v_k),$$

设 $k\to\infty$，我们得到结果。因此 $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 是问题(1)的一个最大解。 □

定理4 设 $m=q$，$n=p$ 且 $\mu\leqslant\min\{1/a,1/b\}$，那么问题(1)的非负解是唯一的，其中 μ 如式(5)所定义。

证 设 (u,v) 是问题(1)的任意一个解且 (u_k,v_k) 表示式(8)的解。那么取 $\varphi(x)$ 作为检验函数，其中 $\varphi(x)$ 为式(6)的唯一解，我们有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(u_k-u)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x=\\&\int_0^t\int_\Omega\Big[(u_k^m-u^m)\Delta\varphi(x)+a\varphi(x)\int_\Omega(v_k^p(y,s)-v^p(y,s))\,\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\\&\frac{1}{k^m}\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}S_x\mathrm{d}s+\frac{1}{k}\int_\Omega\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x=\\&\int_0^t\int_\Omega[-(u_k^m-u^m)+a\mu(v_k^p(x,s)-v^p(x,s))]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\\&\frac{1}{k^m}\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}S_x\mathrm{d}s+\frac{1}{k}\int_\Omega\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

设 $k\to\infty$，有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(\mathcal{U}-u)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x=\\&\int_0^t\int_\Omega[-(\mathcal{U}^m(x,s)-u^m(x,s))+a\mu(\mathcal{V}^p(x,s)-v^p(x,s))]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{9}$$

类似地，有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(\mathcal{V}-v)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x=\\&\int_0^t\int_\Omega[-(\mathcal{V}^n(x,s)-v^n(x,s))+b\mu(\mathcal{U}^q(x,s)-u^q(x,s))]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{10}$$

所以，如果 $m=q$，$n=p$，由式(9)和(10)，得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega[(\mathcal{U}-u)+(\mathcal{V}-v)]\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x=\\&(b\mu-1)\int_0^t\int_\Omega(\mathcal{U}^m-u^m)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s+(a\mu-1)\int_0^t\int_\Omega(\mathcal{V}^p-v^p)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由于 $\mu\leqslant\min\{1/a,1/b\}$，利用引理1，得到

$$\int_\Omega [(\mathcal{U}-u)+(\mathcal{V}-v)]\varphi(x,t)\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

上面的不等式结合 $(u,v)\leqslant(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 保证了 $(u,v)\equiv(\mathcal{U},\mathcal{V})$. 证毕. □

3 解的熄灭

利用 ODE 系统的不变区域理论,我们得到下面的引理:

引理 2 令 a_i, b_i, $i=1,2$, p,q,m,n 是正常数,$m,n<1$, $pq\geqslant mn$. 设

$$\mathcal{Q}=\left\{(W_1,W_2)\in R^2 \mid W_1\geqslant 0,\ W_2\geqslant 0,\ \left(\frac{b_1}{\delta_1 a_1}\right)^{1/m}W_2^{p/n}\leqslant W_1\leqslant\left(\frac{\delta_2 a_2}{b_2}\right)^{1/q}W_2^{n/q}\right\},$$

这里, $0<\delta_1,\delta_2<1$. 如果 (W_1,W_2) 是常微分方程组

$$\begin{cases} W_1'(t)=-a_1W_1^m(t)+b_1W_2^p(t), & t\in(0,T),\\ W_2'(t)=-a_2W_2^n(t)+b_2W_1^q(t), & t\in(0,T)\end{cases}\tag{11}$$

的非负解,且 $(W_1(0),W_2(0))\in\mathcal{Q}$,那么 $(W_1,W_2)\in\mathcal{Q}$.

引理 3 在和引理 2 相同的假设条件下,若 $(W_1(0),W_2(0))\in\mathcal{Q}$, 式(11)的解在有限时间熄灭.

由引理 3 和比较原理,我们得到下面的推论:

推论 2 令 a_i, b_i, $i=1,2$, p,q,m,n 是正常数,$m,n<1$,$pq\geqslant mn$. 假设 (W_1,W_2) 是下面微分不等式组

$$\begin{cases} W_1'(t)\leqslant -a_1W_1^m(t)+b_1W_2^p(t),\\ W_2'(t)\leqslant -a_2W_2^n(t)+b_2W_1^q(t)\end{cases}\tag{12}$$

的一个非负解,那么对每个 $(W_1(0),W_2(0))\in\mathcal{Q}$, 式(12)的解在有限时间熄灭.

定理 1 的证明 分别将问题(1)的前两个方程两边分别同乘 u^{s-1},v^{s-1} 并在 Ω 上积分,得

$$\frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^s\mathrm{d}x+\frac{4m(s-1)}{(m+s-1)^2}\int_\Omega|\nabla u^{(m+s-1)/2}|^2\mathrm{d}x= a\int_\Omega v^p(y,t)\mathrm{d}y\int_\Omega u^{s-1}\mathrm{d}x,\tag{13}$$

$$\frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega v^s\mathrm{d}x+\frac{4m(s-1)}{(m+s-1)^2}\int_\Omega|\nabla v^{(m+s-1)/2}|^2\mathrm{d}x= b\int_\Omega u^q(y,t)\mathrm{d}y\int_\Omega v^{s-1}\mathrm{d}x.\tag{14}$$

下面根据 p,q 的不同取值分 4 种情形讨论.

情形 1 $p,\ q\leqslant 1$

(a) $\dfrac{N-2}{N+2}\leqslant m<1$.

在式(13)中令 $s=m+1$,式(14) 中令 $r=m+1$, 得

$$\frac{1}{m+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^{m+1}\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla u^m|^2\mathrm{d}x=a\int_\Omega v^p(y,t)\mathrm{d}y\int_\Omega u^m\mathrm{d}x,\tag{15}$$

$$\frac{1}{m+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega v^{m+1}\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla v^m|^2\mathrm{d}x=b\int_\Omega u^q(y,t)\mathrm{d}y\int_\Omega v^m\mathrm{d}x.\tag{16}$$

由于

$$m \geqslant (N-2)/(N+2),\ p,\ q \leqslant 1,\ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2N/(N-2)},$$

根据 Hölder 不等式和嵌入定理,得到

$$\begin{aligned}\|u\|_{m+1}^{m} = \left(\int_\Omega |u|^{m+1}\mathrm{d}x\right)^{m/(m+1)} \leqslant \\ \left(\int_\Omega u^{m(2N/(N-2))}\mathrm{d}x\right)^{((m+1)/m)((N-2)/(2N))(m/(m+1))} \times \\ \left(\int_\Omega 1\mathrm{d}x\right)^{[(Nm+2m-N+2)/(2Nm)]m/(m+1)} = \\ \|u^m\|_{2N/(N-2)} |\Omega|^{m/(m+1)-(N-2)/(2N)} \leqslant \\ \gamma_1 |\Omega|^{m/(m+1)-(N-2)/(2N)} \|\nabla u^m\|_2,\end{aligned} \tag{17}$$

同理可得

$$\|v\|_{m+1}^{m} \leqslant \gamma_2 |\Omega|^{m/(m+1)-(N-2)/(2N)} \|\nabla v^m\|_2, \tag{18}$$

其中, γ_1, γ_2 是嵌入常数. 又

$$\int_\Omega v^p \int_\Omega u^m \mathrm{d}x \leqslant \|u\|_{m+1}^{m} \|v\|_{m+1}^{p} |\Omega|^{(m+2-p)/(m+1)}, \tag{19}$$

$$\int_\Omega u^q \int_\Omega v^m \mathrm{d}x \leqslant \|v\|_{m+1}^{m} \|u\|_{m+1}^{q} |\Omega|^{(m+2-q)/(m+1)}. \tag{20}$$

将不等式(17)~(20)代入式(15)~(16)得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{m+1}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{m+1}^{m+1} + \gamma_1^{-2}|\Omega|^{(N-2)/N-2m/(m+1)}\|u\|_{m+1}^{2m} \leqslant \\ \qquad a|\Omega|^{2-(p+m)/(1+m)}\|u\|_{m+1}^{m}\|v\|_{m+1}^{p}, \\ \dfrac{1}{n+1}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|_{n+1}^{n+1} + \gamma_2^{-2}|\Omega|^{(N-2)/N-2n/(n+1)}\|v\|_{n+1}^{2n} \leqslant \\ \qquad b|\Omega|^{2-(q+m)/(1+m)}\|v\|_{m+1}^{m}\|u\|_{m+1}^{q}.\end{cases} \tag{21}$$

设 $J_1(t) = \|u\|_{m+1}$, $J_2(t) = \|v\|_{m+1}$, 由式(21)得

$$J_1'(t) \leqslant -\gamma_1^{-2}|\Omega|^{(N-2)/N-2m/(m+1)}J_1^m + a|\Omega|^{2-(p+m)/(1+m)}J_2^p,$$

$$J_2'(t) \leqslant -\gamma_2^{-2}|\Omega|^{(N-2)/N-2m/(m+1)}J_2^m + b|\Omega|^{2-(q+m)/(1+m)}J_1^q.$$

利用推论 2 得, $(J_1(t), J_2(t))$ 在有限时间熄灭. 因此, $(u(x,t), v(x,t))$ 在有限时间熄灭.

(b) $0 < m < \dfrac{N-2}{N}$.

设 $s = (N/2)(1-m) > 1$,使用嵌入定理以及对 s 的特殊取值,我们得到

$$\|u\|_s^{(m+s-1)/2} = \|u^{(m+s-1)/2}\|_{2N/(N-2)} \leqslant \gamma \|\nabla u^{(m+s-1)/2}\|_2,$$

$$\|v\|_s^{(m+s-1)/2} = \|v^{(m+s-1)/2}\|_{2N/(N-2)} \leqslant \gamma \|\nabla v^{(m+s-1)/2}\|_2.$$

令 $J_1(t) = \|u\|_s$, $J_2(t) = \|v\|_s$, 对式(13)右边使用 Hölder 不等式得到

$$J_1'(t) + \gamma^{-2}\frac{4m(s-1)}{(m+s-1)^2}J_1^m(t) \leqslant a|\Omega|^{(s+1-p)/s}J_2^p(t),$$

$$J_2'(t) + \gamma^{-2}\frac{4m(s-1)}{(m+s-1)^2}J_2^m(t) \leqslant b|\Omega|^{(s+1-p)/s}J_1^q(t).$$

同理, 利用推论 2 得, $(J_1(t), J_2(t))$ 在有限时间熄灭. 因此, $(u(x,t), v(x,t))$ 在有限时间熄灭.

情形 2 $p,\ q > 1$

对于 $p,\ q > 1$,由于 $0 < m < 1$,易证对于充分小的 $k > 0$,如果在 Ω 中 $u_0(x),\ v_0(x) \leqslant k\varphi_1^{1/m}(x)$,则 $(k\varphi_1^{1/m}(x), k\varphi_1^{1/m}(x))$ 是问题(1) 的一个上解,这里 $\varphi_1(x)$ 是下面椭圆方程:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1(x) = 1, & x \in \Omega_1, \\ \varphi_1(x) = 0, & x \in \partial\Omega_1 \end{cases} \tag{22}$$

的唯一正解,其中, $\Omega \subset\subset \Omega_1$. 令

$$M_1 = \sup_{x\in\bar{\Omega}}\varphi_1(x),\ \delta = \inf_{x\in\bar{\Omega}}\varphi_1(x).$$

那么 $\delta > 0$, 由命题 1 知

$$u(x,t) \leqslant k\varphi_1^{1/m}(x) \leqslant kM_1^{1/m}, \qquad t > 0,$$

将上面的不等式代入式(13)和(14),右边使用 Hölder 不等式,可得

$$\frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^s\mathrm{d}x + \frac{4m(s-1)}{(m+s-1)^2}\int_\Omega |\nabla u^{(m+s-1)/2}|^2\mathrm{d}x \leqslant$$

$$ak^{p-p_1}M_1^{(p-p_1)/m}\int_\Omega v^{p_1}(y,t)\mathrm{d}y\int_\Omega u^{s-1}\mathrm{d}x, \tag{23}$$

$$\frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega v^s\mathrm{d}x + \frac{4m(s-1)}{(m+s-1)^2}\int_\Omega |\nabla v^{(m+s-1)/2}|^2\mathrm{d}x \leqslant$$

$$bk^{q-q_1}M_1^{(q-q_1)/m}\int_\Omega u^{q_1}(y,t)\mathrm{d}y\int_\Omega v^{s-1}\mathrm{d}x, \tag{24}$$

其中, p_1, q_1 满足 $p_1 \leqslant 1,\ q_1 \leqslant 1$, 且 $p_1q_1 > m^2$. 问题转化为情形 1,类似地,我们能得到熄灭的结果,过程略.

情形 3 $p < 1,\ q > 1$

与情形 2 类似,只要在式(23)中,令 $p_1 = p$ 即可.

情形 4 $p > 1,\ q < 1$

同理,与情形 2 类似,只要在式(24)中,令 $q_1 = q$ 即可. 证毕. □

下面考虑临界情形 $pq = mn$.

定理 2 的证明 我们通过构造一个合适的上解来证明定理. 首先, 存在区域 Ω_1, 使得 $\Omega \subset\subset \Omega_1$. 仍然设 $\varphi_1(x)$ 是式(22) 的唯一正解,令 $\mu_1 = \int_\Omega \varphi_1(x)\mathrm{d}x$,由椭圆问题的比较原理知,当 $x \in \Omega$ 时, $\varphi(x) < \varphi_1(x)$, $\delta > 0$, $\mu < \mu_1$. 由特征函数关于区域的连续性, 我们能找到这样的区域 Ω_1, 使得

$$\left(a\int_\Omega \varphi_1^{p/n}\mathrm{d}x\right)^{1/m}\left(b\int_\Omega \varphi_1^{q/m}\mathrm{d}x\right)^{1/q} < 1.$$

设 $(g_1(t), g_2(t))$ 是下列常微分不等式组:

$$\begin{cases} g_1'(t) = M_1^{-1/m}\left(g_1^m(t) - ag_2^p(t)\int_\Omega \varphi_1^{p/n}\mathrm{d}x\right), \\ g_2'(t) = M_1^{-1/n}\left(g_2^n(t) - bg_1^q(t)\int_\Omega \varphi_1^{q/m}\mathrm{d}x\right), \\ \left(\dfrac{a}{\delta}g_2^p(0)\int_\Omega \varphi_1^{p/n}\mathrm{d}x\right)^{1/m} \leqslant g_1(0) \leqslant \left(\delta\dfrac{g_2^n(0)}{\int_\Omega \varphi_1^{q/m}\mathrm{d}x}\right)^{1/q} \end{cases}$$

的正解,这里 $0 < \delta < 1$ 是正常数. 由推论 2,我们知道 $(g_1(t), g_1(t))$ 在有限时间 T_0 熄灭. 设

$$\bar{u}(x,t) = g_1(t)\varphi_1^{1/m},\ \bar{v}(x,t) = g_2(t)\varphi_1^{1/n}.$$

通过简单的计算,有

$$\begin{aligned}&\bar{u}_t - \Delta\bar{u}^m - \int_\Omega \bar{v}^p(y,t)\,\mathrm{d}y = \\ &\quad \varphi_1^{1/m} g_1'(t) + g_1^m(t) - g_2^p(t)\int_\Omega \varphi_1^{p/n}\mathrm{d}x \geqslant \\ &\quad \varphi_1^{1/m}\left[g_1'(t) + M_1^{-1/m}\left(g_1^m(t) - a g_2^p(t)\int_\Omega \varphi_1^{p/n}\mathrm{d}x\right)\right].\end{aligned} \tag{25}$$

类似地,有

$$\bar{v}_t - \Delta\bar{v}^m - \bar{u}^q \geqslant \varphi_1^{1/n}\left[g_2'(t) + M_1^{-1/n}\left(g_2^n(t) - b g_1^q(t)\int_\Omega \varphi_1^{q/m}\mathrm{d}x\right)\right]. \tag{26}$$

现在我们选择足够小的 u_0, v_0,使得 $u_0 \leqslant g_1(0)\varphi_1^{1/m}(x)$, $v_0 \leqslant g_2(0)\varphi_1^{1/n}(x)$,则 $(\bar{u},\bar{v})$ 是问题(1) 的一个上解,且 $(\bar{u},\bar{v})$ 在有限时间 T_0 熄灭. 对于任何固定的 $0 < T < T_0$, 存在两个正常数 C_1 和 C_2 使得 $C_1 \leqslant \bar{u},\bar{v} \leqslant C_2$. 设 $(u(x,t),v(x,t))$ 为问题(1) 的解,因此由比较原理(命题1),我们知道对于任意 $(x,t) \in \Omega\times[0,T]$, $(u(x,t),v(x,t)) \leqslant (\bar{u}(x,t),\bar{v}(x,t))$, 故存在某个 $T_1 \leqslant T_0$, $u(x,T_1) \equiv u(x,T_1) \equiv 0$. 那么对于所有 $t \geqslant T_1$, 如果我们取

$$u(x,T) \equiv v(x,T) \equiv 0,$$

这意味着 $(u(x,t),v(x,t))$ 在有限时间 T_1 熄灭,且显然它是问题(1)的一个解. 证毕. □

使用定理 4 和定理 2,我们能得到推论 1.

参考文献(References):

[1] Kalashnikov A S. Some problems of the qualitative theory of second order nonlinear degenerate parabolic equations[J]. *Uspekhi Mat Nauk*, 1987, **42**(2): 135-176.

[2] 顾永耕. 抛物方程的解的熄灭的充要条件[J]. 数学学报, 1994, **37**(1): 73-79. (GU Yong-geng. Necessary and sufficient conditions of extinction of solution on parabolic equations[J]. *Acta Math Sinica*, 1994, **37**(1): 73-79. (in Chinese))

[3] Peletier L A, Zhao J N. Large time behavior of solution of the porous media equation with absorption: the fast diffusion case[J]. *Nonlinear Anal*, 1991, **17**(10): 991-1009.

[4] Galaktionov V A, Vazquez J L. Asymptotic behaviour of nonlinear parabolic equations with critical exponents[J]. *A Dynamical System Approach*, *J Funct Anal*, 1991, **100**(2): 435-462.

[5] Galaktionov V A, Vazquez J L. Extinction for a quasilinear heat equation with absorption I[J]. *Technique of Intersection Comparison Comm Partial Differential Equations*, 1994, **19**(7/8): 1075-1106.

[6] Galaktionov V A, Vazquez J L. Extinction for a quasilinear heat equation with absorption II[J]. *A Dynamical System Approach Comm Partial Differential Equations*, 1994, **19**(7/8): 1107-1137.

[7] Tian Y, Mu C L. Extinction and non-extinction for a p-Laplacian equation with nonlinear source[J]. *Nonlinear Anal*, 2008, **69**(8): 2422-2431.

[8] Ferreira R, Vazquez J L. Extinction behavior for fast diffusion equations with absorption[J]. *Nonlinear Anal*, 2001, **43**(8): 943-985.

[9] Yin J X, Li J, Jin C H. Non-extinction and critical exponent for a polytropic filtration equation[J]. *Nonl Anal*, 2009, **71**(1/2): 347-357.

[10] Yin J X, Jin C H. Critical extinction and blow-up exponents for fast diffusive polytropic filtra-

tion equation with sources[J]. *Proc Edinburgh Math Soc*, 2009, **52**(2): 419-444.

[11] Yin J X, Jin C H. Critical extinction and blow-up exponents for fast diffusive p-Laplacian with sources[J]. *Math Method Appl Sci*, 2007, **30**(10): 1147-1167.

[12] Yuan H J, Lian S Z, Gao W J, Xu X J, Cao C L. Extinction and positivity for the evolution p-Laplacian equation in R^N[J]. *Nonl Anal TMA*, 2005, **60**(6): 1085-1091.

[13] Han Y Z, Gao W J. Extinction for a fast diffusion equation with a nonlinear nonlocal source [J]. *Arch Math*, 2011, **97**(4): 353-363.

[14] Friedman A, Mcleod B. Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations[J]. *Indiana Univ Math J*, 1985, **34**(2): 425-447.

[15] Furter J, Grinfeld M. Local vs nonlocal interactions in population dynamics[J]. *J Math Biology*, 1989, **27**(1): 65-80.

[16] Lu H L, Wang M X. Global solutions and blow-up problems for a nonlinear degenerate parabolic system coupled via nonlocal sources[J]. *J Math Anal Appl*, 2007, **333**(2): 984-1007.

[17] Zheng S N, Wang L D. Blow-up rate and profile for a degenerate parabolic system coupled via nonlocal sources[J]. *Comput Math Appl*, 2006, **52**(10/11): 1387-1402.

[18] Deng W B, Li Y X, Xie C H. Blow-up and global existence for a nonlocal degenerate parabolic system[J]. *J Math Anal Appl*, 2003, **277**(1): 199-217.

[19] Du L L. Blow-up for a degenerate reaction-diffusion system with nonlinear nonlocal sources [J]. *J Comput Appl Math*, 2007, **202**(2): 237-247.

Extinction for a Class of Fast Diffusion System With Nonlocal Sources

WANG Juan[1], CHEN Yu-juan[1], ZHANG Hai-xing[1], LU Chen[2]

(1. *School of Sciences*, *Nantong University*, *Nantong*, *Jiangsu* 226007, *P. R. China*;

2. *School of Electronic and Information*, *Nantong University*,

Nantong, *Jiangsu* 226019, *P. R. China*)

Abstract: The sufficient conditions for the extinction of solutions of a class of fast diffusion system with nonlocal sources were investigated, where the upper and lower solution method and integral estimates were used. It is shown that when the initial values and the parameters satisfy some conditions, the solution of the system extincts in finite time.

Key words: fast diffusion system; extinction; nonlocal sources