

正交各向异性轴对称位势问题的 Trefftz 有限元分析*

王克用^{1,2}, 黄争鸣², 李培超¹, 刘 博¹

(1. 上海工程技术大学 机械工程学院,上海 201620;
2. 同济大学 航空航天与力学学院,上海 200092)

摘要: Trefftz 有限元法(Trefftz finite element method, TFEM)因其独特的优良品质而备受关注. 针对正交各向异性轴对称位势问题,提出了一种4节点四边形环状单元. 在该单元模型中,首先假设两套独立的位势插值模式:即单元域内场和网线场,然后代入修正变分泛函并利用 Gauss 散度定理消除区域积分,最后根据驻值原理求得只含边界积分的单元刚度方程. 数值算例表明了该单元的准确性、稳定性以及对网格畸变的不敏感性.

关键词: Trefftz 有限元法; 修正变分泛函; 位势问题; 轴对称; 正交各向异性介质

中图分类号: O343.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.05.004

引 言

Trefftz 有限元法^[1](Trefftz finite element method, TFEM)是基于 Trefftz 方法^[2]发展起来的一种新型数值计算方法,它融合了传统有限元法和边界元法的诸多优点,同时摒弃了它们的一些缺点^[3-5]. 1977年, Jirousek 和 Leon^[1]在研究薄板弯曲问题时提出了 Trefftz 有限元模型,其基本思想是利用辅助网线位移场或面力场,在一种杂交意义上将单元域内位移场关联起来. 单元域内位移场精确满足问题的控制方程,它可表达为控制方程的特解、截断完备解(即 Trefftz 插值函数)与待定参数三者乘积之和. 而单元间连续性通过网线位移场在一种近似意义上得到满足. 在实际应用过程中,TFEM 显示出了与众不同的独特品质^[3-5],比如对网格畸变不敏感、多边形单元构造便捷、单元列式只含边界积分、局部效应或奇异性问题处理简单等.

力学和物理中的许多现象如热传导、渗流、柱体扭转、腐蚀场及电磁场,最终均可归结为位势问题. Wang 等^[6]基于 Trefftz 有限元模型和相似方程法,对极小曲面问题进行了分析. Fu 等^[7]提出了非线性功能梯度材料热传导问题的 Trefftz 有限元法. Cao 等^[8]利用基本解构造单元域内位势场,研究了功能梯度材料的稳态热传导问题. 针对轴对称位势问题, Wang 等^[9]首先基于准调和多项式求得问题的完备解,然后利用修正变分泛函,构造了一种4节点四边形环状单元,并讨论了网格畸变对计算结果的影响. 复合材料在航空航天、汽车、船舶等领域的广泛

* 收稿日期: 2013-03-04; 修订日期: 2013-04-12

基金项目: 上海高校青年骨干教师国内访问学者计划基金资助项目

作者简介: 王克用(1975—),男,河北人,讲师,博士(通讯作者. E-mail: keyong.wang@hotmail.com).

应用,使得非各向同性材料的有限元分析愈来愈受重视.赵新娟等^[10]推导了基于基本解的 Trefftz 有限元列式,并用于分析各向异性位势问题.王克用等^[11]引入坐标变换,将正交各向异性位势问题转化为各向同性问题,从而直接利用 Laplace 方程的完备解构造单元域内位势场,并基于各向同性问题的杂交泛函求得 Trefftz 有限元列式.文献[11]是在新求解域内求解位势,再经逆变换获得原问题的势流等其他场变量,处理过程简单直观.然而,当原始边界条件较为复杂,尤其是多相问题的界面协调条件经过转化后,会给求解带来很大困难^[12].

本文在文献[9]和文献[11]的基础上,将各向同性化寻求完备解的手段和 TFEM 进一步应用于正交各向异性轴对称位势问题.为避免边界条件的转化,引入的坐标变换关系仅用于获得问题的完备解.基于正交各向异性位势问题的修正变分泛函,求得只含边界积分的单元刚度方程,求解在原始区域内进行.

1 基本方程及其完备解

对于无内源的稳态正交各向异性轴对称位势问题,在区域 Ω 内的控制微分方程可写成

$$k_r \left(\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{\rho})}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(\boldsymbol{\rho})}{\partial r} \right) + k_z \frac{\partial^2 u(\boldsymbol{\rho})}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}), \quad (1)$$

其边界条件为

$$u(\boldsymbol{\rho}) = \bar{u}(\boldsymbol{\rho}) \quad (\text{在 } \Gamma_u \text{ 上}), \quad (2)$$

$$q(\boldsymbol{\rho}) = k_r \frac{\partial u(\boldsymbol{\rho})}{\partial r} n_r + k_z \frac{\partial u(\boldsymbol{\rho})}{\partial z} n_z = \bar{q}(\boldsymbol{\rho}) \quad (\text{在 } \Gamma_q \text{ 上}), \quad (3)$$

式中, $u(\boldsymbol{\rho})$ 为位势函数, $\boldsymbol{\rho} = \{r, z\}^T$, $q(\boldsymbol{\rho})$ 为外法向位势梯度(或势流), k_r, k_z 为介质沿径向和轴向上的特性系数, n_r, n_z 为边界 $\partial\Omega$ 上的外法线方向余弦, \bar{u} 和 \bar{q} 为已知的位势和外法向势流, $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_q$ 为求解域 Ω 围成的边界.

为了寻求控制方程(1)的完备解,引入简单的坐标变换关系

$$\check{r} = k_r^{-1/2} r, \quad \check{z} = k_z^{-1/2} z. \quad (4)$$

将式(4)代入式(1),简化整理,可得

$$\frac{\partial^2 u(\check{\boldsymbol{\rho}})}{\partial \check{r}^2} + \frac{1}{\check{r}} \frac{\partial u(\check{\boldsymbol{\rho}})}{\partial \check{r}} + \frac{\partial^2 u(\check{\boldsymbol{\rho}})}{\partial \check{z}^2} = 0 \quad (\text{在 } \check{\Omega} \text{ 内}). \quad (5)$$

这样就将原问题映射为新求解域 $\check{\Omega}$ 内的各向同性问题.根据文献[9],方程(5)的完备解可表达成 n 阶准调和多项式的形式

$$T(\check{\boldsymbol{\rho}}) = \sum_{i=0}^n a_i \check{r}^{n-i} \check{z}^i \quad (n = 1, 2, \dots, \infty). \quad (6)$$

显然地,方程(1)的完备解就可写成

$$T(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=0}^n a_i k_r^{(i-n)/2} k_z^{-i/2} r^{n-i} z^i \quad (n = 1, 2, \dots, \infty), \quad (7)$$

式中, a_i 为待定系数.

对式(7)关于 r 或 z 求导,可得

$$\frac{\partial T_n(\boldsymbol{\rho})}{\partial r} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i k_r^{(i-n)/2} k_z^{-i/2} (n-i) r^{n-i-1} z^i, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 T_n(\boldsymbol{\rho})}{\partial r^2} = \sum_{i=0}^{n-2} a_i k_r^{(i-n)/2} k_z^{-i/2} (n-i-1)(n-i) r^{n-i-2} z^i, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 T_n(\boldsymbol{\rho})}{\partial z^2} = \sum_{i=0}^{n-2} a_{i+2} k_r^{(i-n)/2} k_z^{-i/2} (i+1)(i+2) r^{n-i-2} z^i. \quad (10)$$

将式(8) ~ (10)代入式(1), 导得下列递推公式:

$$a_{i+2} = -\frac{\psi (n-i)^2}{(i+1)(i+2)} a_i, \quad (11)$$

式中, $\psi = k_r/k_z$, 并且当 n 为偶数时, 有 $a_0 = 1$ 和 $a_{2i+1} = 0$; 当 n 为奇数时, 有 $a_{2i} = 0$.

2 Trefftz 有限元列式

如图 1 所示, Trefftz 有限元模型分别在单元域内和边界上假定两套独立的插值模式: 单元域内场和网线场, 单元域内插值函数(即 Trefftz 函数)精确满足控制方程, 可采用问题的截断完备解构建, 而单元边界插值函数(常称为网线函数)确保单元间的位势协调, 一般采用传统有限元法的形函数构建.

单元域内位势场可表达为

$$u_e(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{j=1}^m N_{ej} c_{ej} = \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{c}_e \quad (\text{在 } \Omega_e \text{ 内}). \quad (12)$$

单元边界网线位势场为

$$\tilde{u}_e(\boldsymbol{\rho}) = \tilde{\mathbf{N}}_e(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{d}_e \quad (\text{在 } \partial\Omega_e \text{ 上}), \quad (13)$$

式中, $\mathbf{N}_e(\boldsymbol{\rho})$ 为 Trefftz 函数矩阵, 由 m 个截断完备解组成, \mathbf{c}_e 为待定参数, $\tilde{\mathbf{N}}_e$ 为传统有限元法的形函数矩阵, \mathbf{d}_e 为单元节点自由度向量. 变量上方的“~”用于区分单元域内和边界. 为了避免出现零能模式并使单元性能稳定, 用来构建 $\mathbf{N}_e(\boldsymbol{\rho})$ 的截断完备解数目(即 Trefftz 项数)满足下列关系式:

$$m > m_d - m_r, \quad (14)$$

式中, m_d, m_r 分别代表单元节点自由度和刚体运动模式的数目. 对于轴对称位势问题, $m_r = 1$.

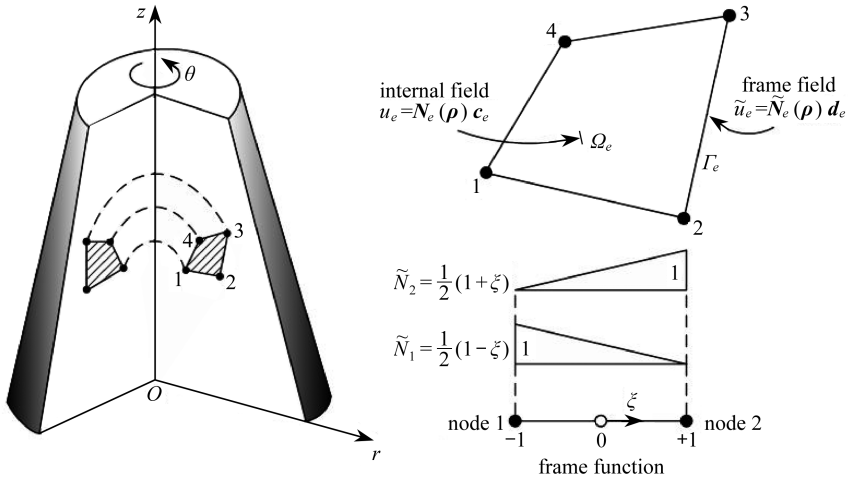


图 1 轴对称环状单元及其位势场

Fig.1 Axisymmetric annular element and its potential fields

利用式(12), 单元边界 $\partial\Omega_e$ 上的外法向势流 q_e 可写成

$$q_e(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{j=1}^m Q_{ej} c_{ej} = \mathbf{A} \mathbf{T}_e(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{c}_e = \mathbf{Q}_e(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{c}_e, \quad (15)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k_r n_r & 0 \\ 0 & k_z n_z \end{bmatrix}, \mathbf{T}_e(\boldsymbol{\rho}) = \left\{ \frac{\partial N_e(\boldsymbol{\rho})}{\partial r}, \frac{\partial N_e(\boldsymbol{\rho})}{\partial z} \right\}^T. \quad (16)$$

与正交各向异性轴对称位势问题等价的修正变分泛函为

$$\begin{aligned} \Pi_{me} = & \pi \iint_{\Omega_e} (k_r q_{er}^2 + k_z q_{ez}^2) r d\Omega - 2\pi \int_{\Gamma_{eu}} q_e \bar{u}_e r d\Gamma + \\ & 2\pi \int_{\Gamma_{eq}} (\bar{q}_e - q_e) \tilde{u}_e r d\Gamma - 2\pi \int_{\Gamma_{el}} q_e \tilde{u}_e r d\Gamma, \end{aligned} \quad (17)$$

式中, $q_{er} = \partial u_e / \partial r, q_{ez} = \partial u_e / \partial z, \Gamma_{el}$ 为单元的公共边界, $\partial\Omega_e = \Gamma_{eu} \cup \Gamma_{eq} \cup \Gamma_{el}, \Gamma_{eu} = \partial\Omega_e \cap \Gamma_u, \Gamma_{eq} = \partial\Omega_e \cap \Gamma_q$. 对泛函(17)第1项应用 Gauss 散度定理,并注意到在边界 $\partial\Omega_e$ 上有 $\bar{u}(\boldsymbol{\rho}) = \tilde{u}(\boldsymbol{\rho})$, 可消去区域积分,从而得到下列只含边界积分的泛函形式:

$$\Pi_{me} = \pi \int_{\partial\Omega_e} q_e u_e r d\Gamma - 2\pi \int_{\partial\Omega_e} q_e \tilde{u}_e r d\Gamma + 2\pi \int_{\Gamma_{eq}} \bar{q}_e \tilde{u}_e r d\Gamma. \quad (18)$$

将式(12)、(13)和(15)代入式(18),有

$$\Pi_{me} = \frac{1}{2} \mathbf{c}_e^T \mathbf{H}_e \mathbf{c}_e - \mathbf{c}_e^T \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_e^T \mathbf{p}_e + \text{不含 } \mathbf{c}_e \text{ 或 } \mathbf{d}_e \text{ 的项}, \quad (19)$$

式中

$$\mathbf{H}_e = \pi \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{Q}_e^T \mathbf{N}_e r d\Gamma, \mathbf{G}_e = 2\pi \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{Q}_e^T \tilde{\mathbf{N}}_e r d\Gamma, \mathbf{p}_e = 2\pi \int_{\Gamma_{eq}} \mathbf{N}_e^T \bar{q}_e r d\Gamma. \quad (20)$$

对泛函式(20)分别关于 \mathbf{c}_e 和 \mathbf{d}_e 取驻值,得

$$\frac{\partial \Pi_{me}}{\partial \mathbf{c}_e^T} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{c}_e = \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \Pi_{me}}{\partial \mathbf{d}_e^T} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{p}_e, \quad (22)$$

其中,式(21)确保单元间公共边界位势的连续性,而式(22)为单元刚度方程, $\mathbf{K}_e = \mathbf{G}_e^T \mathbf{H}_e^{-1} \mathbf{G}_e$ 为对称的单元刚度矩阵.

至此,将单元刚度方程(22)组装成总体刚度方程 $\mathbf{Kd} = \mathbf{p}$, 引入位势边界条件(2)并求解,即可获得所有节点的位势值.值得注意的是,由于式(12)中的 Trefftz 函数矩阵 $\mathbf{N}_e(\boldsymbol{\rho})$ 不包含刚体运动模式,为求单元域内任一点的位势,需要采用文献[9]所述的最小二乘法恢复刚体位势.

3 数值算例

3.1 实体圆柱内稳态轴向热流问题

图2为半径 $R = 2$ 的实体圆柱,介质导热系数为 $k_r = 1$ 和 $k_z = 4$,几何尺寸和边界条件示于图中.圆柱上、下表面施加第一类边界条件,圆柱侧面施加第二类边界条件(即视为绝热面),热流只能沿着轴向流动.本例的温度场解析解为

$$u = \frac{u_2 - u_1}{h} z + u_1, \quad (23)$$

式中, h 为圆柱高度, u_2 和 u_1 分别为圆柱上、下表面给定的温度值.

考虑两种不同形式的网格划分,均包括4个4节点四边形环状单元(记为 AXPT4),如图2所示:图2(b)是规则网格划分;图2(c)是畸变网格划分.其中, $\Delta = w/W = h/H$ 为网格畸变参

数. 选取求解域内若干点进行分析, 沿 AXPT4 单元的每条边设置 3 个 Gauss 点, 算例结果列于表 1 和表 2 中. 由表可以看出, 无论采用网格 A (规则网格) 还是网格 B (畸变网格) ($\Delta < 0.25$), TFEM 和 ABAQUS 计算得到的温度 u , 温度梯度 $\partial u / \partial z$ 均精确收敛于解析解, 几乎不受网格畸变的影响. 但当网格畸变参数 $\Delta \geq 0.25$ 时, 网格 B 右上角单元退化为 4 节点三角形单元或内凹四边形单元, TFEM 计算结果仍与解析解非常吻合, 而 ABAQUS 却无法求解. 究其原因, 主要是因为 Trefftz 单元列式只涉及边界积分, 其 Gauss 点沿单元边界布置, 而 ABAQUS 采用面积积分, 其 Gauss 点在单元内部布置. 由等参变换的条件可知, 在传统有限元法 (ABAQUS) 中, 当单元两邻边内角 $\alpha \geq 180^\circ$ 时, 将出现 Jacobi 行列式 $|J| = 0$ 的情况, 从而导致局部坐标和整体坐标系之间的变换不是一一对应的. 同时, 若 $|J| = 0$, $|J|$ 将不可逆, 则两个坐标系之间的偏导数变换也难以实现. 此外, 我们注意到, 表 1 和表 2 给出的 TFEM 计算结果与精确解相比有稍许差别, 若 AXPT4 单元的每条边设置 4 个 Gauss 点, 则其计算结果将与解析解完全一致.

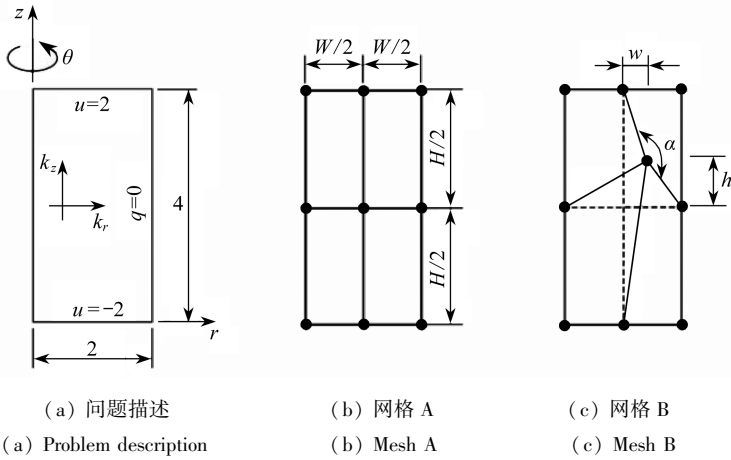


图 2 实体圆柱内稳态轴向热流

Fig. 2 Steady axial flow of heat through a solid cylinder

表 1 温度 u 的计算结果

Table 1 Results for the temperature u

(r, z)	TFEM (ABAQUS)					analytical solution
	$\Delta=0.2$	$\Delta=0.25$	$\Delta=0.3$	$\Delta=0.45$	$\Delta=0.4995$	
$(0.5, 1.0)$	-0.999 61 (-1.000 00)	-1.000 42	-0.999 37	-0.999 59	-0.999 98	-1.0
$(1.5, 1.0)$	-0.999 97 (-1.000 00)	-1.000 14	-0.999 98	-1.000 05	-1.000 08	-1.0
$(1.5, 3.0)$	1.000 03 (1.000 00)	1.000 27	1.000 12	1.000 41	1.000 02	1.0
$(0.5, 3.0)$	1.000 53 (1.000 00)	0.996 96	1.000 04	1.001 71	1.005 02	1.0

注 括号内的数值为 ABAQUS 计算结果; 当 $\Delta \geq 0.25$ 时, ABAQUS 无法获得解答.

表 2 温度梯度 $\partial u / \partial z$ 的计算结果

Table 2 Results for the temperature gradient $\partial u / \partial z$

(r, z)	TFEM (ABAQUS)					analytical solution
	$\Delta=0.2$	$\Delta=0.25$	$\Delta=0.3$	$\Delta=0.45$	$\Delta=0.4995$	
$(0.5, 1.0)$	1.000 19 (1.000 00)	1.000 51	1.000 31	1.000 25	1.000 02	1.0
$(1.5, 1.0)$	1.000 00 (1.000 00)	0.999 91	1.000 00	1.000 02	1.000 10	1.0
$(1.5, 3.0)$	1.000 04 (1.000 00)	0.999 73	1.000 15	1.000 21	1.000 00	1.0
$(0.5, 3.0)$	0.999 96 (1.000 00)	0.999 73	1.000 04	1.004 09	1.005 01	1.0

注 括号内的数值为 ABAQUS 计算结果; 当 $\Delta \geq 0.25$ 时, ABAQUS 无法获得解答.

3.2 含环形孔阶梯圆柱内稳态热传导问题

图3所示为阶梯形圆柱,内部含有半径为 $R=3$ 的环形孔,几何尺寸和边界条件示于图中。圆柱侧面、阶梯面以及环形孔内表面施加第一类边界条件,圆柱上、下表面施加第二类边界条件(即视为绝热面)。本例没有解析解,为便于对比,采用基于网格A的ABAQUS解作为参考解。计算时,我们采用两种网格划分:网格B是规则网格划分,网格C是畸变网格划分。

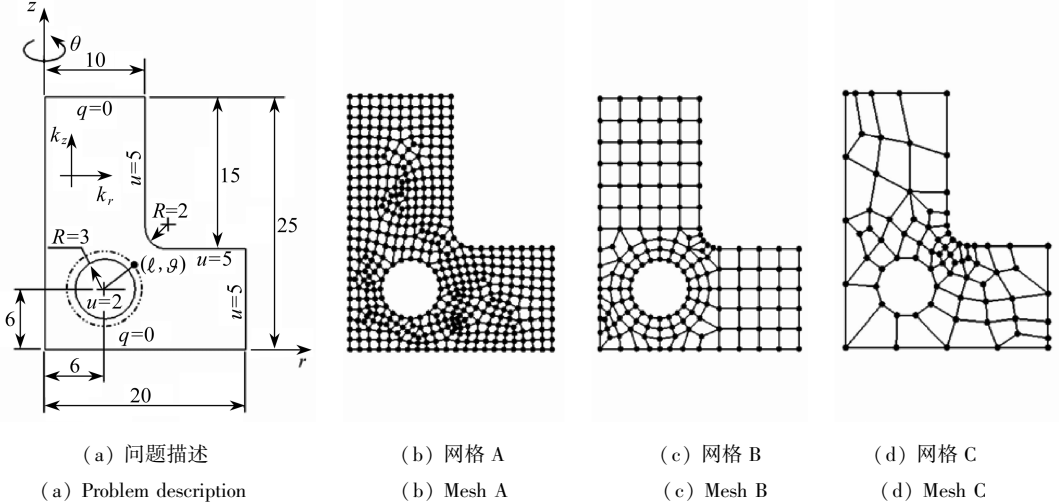


图3 含环形孔阶梯圆柱内稳态热传导

Fig. 3 Steady-state heat conduction through a stepped cylinder with a ring-shaped hole

首先,我们分析介质导热系数为 $k_r=1, k_z=4$ 的情形。采用网格B离散求解域,共包括127个AXPT4单元,距环形孔中心 $\ell=4.5$ 处的温度 u 和温度梯度 $\partial u/\partial r, \partial u/\partial z$ 的分布规律绘于图4中。由图4的计算结果可以看出,在相同的网格划分下,TFEM的精度优于ABAQUS。与参考温度及温度梯度相比,TFEM计算结果的最大偏差分别为0.51%,4.34%,0.54%,而ABAQUS解的最大偏差分别为1.38%,10.19%,1.98%。为了分析TFEM对网格畸变的敏感性,表3列出了网格B和网格C两种网格划分下若干点的温度及偏差对比。最后,我们还研究了计算结果随导热系数比 k_z/k_r 的变化规律,图5给出了场点(15.0,5.0)处的计算结果。

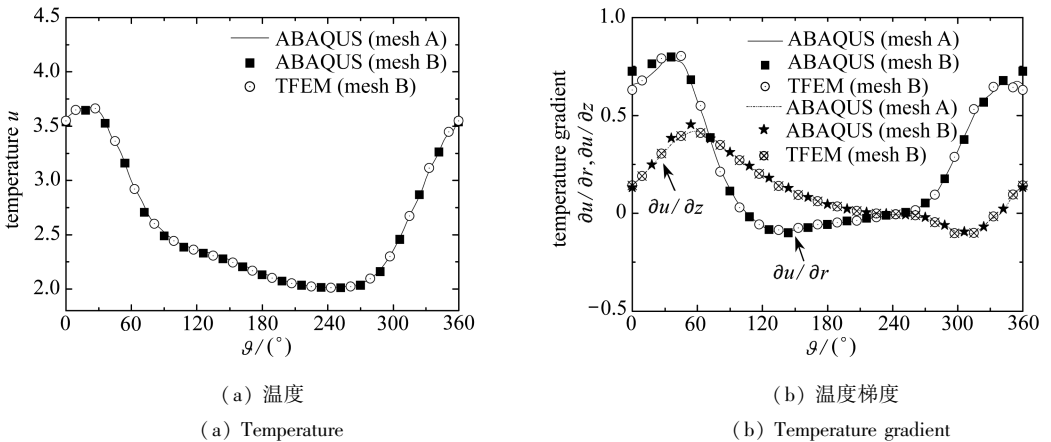


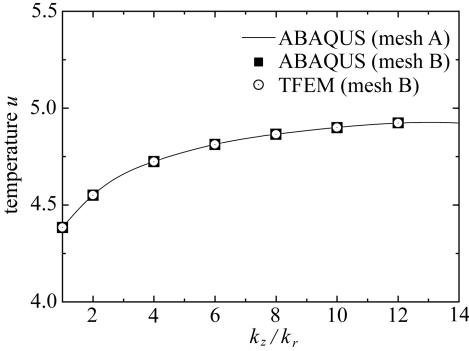
图4 距环形孔中心 $\ell=4.5$ 处的温度和温度梯度分布

Fig. 4 Distributions of temperature and its gradient at a distance of $\ell=4.5$ from the center of ring-shaped hole

表 3 两种网格划分下若干点温度 u 的计算结果对比

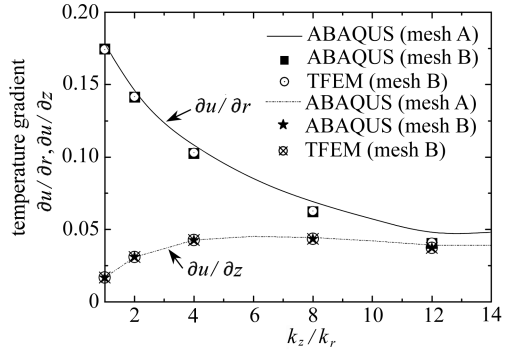
Table 3 Comparison of temperature u at several points under two mesh discretizations

(r, z)	mesh B		mesh C		reference solution
	ABAQUS	TFEM	ABAQUS	TFEM	
(2.0, 2.0)	2.034 99(0.00%)	2.037 68(0.13%)	2.028 731(0.31%)	2.030 14(0.24%)	2.034 99
(9.0, 9.0)	3.158 82(0.00%)	3.144 67(0.45%)	3.228 032(2.19%)	3.152 47(0.20%)	3.158 82
(15.0, 5.0)	4.721 55(0.00%)	4.722 84(0.03%)	4.694 392(0.58%)	4.703 49(0.38%)	4.721 55
(5.0, 19.0)	3.901 30(0.00%)	3.874 74(0.68%)	3.876 041(0.69%)	3.899 85(0.04%)	3.901 30



(a) 温度

(a) Temperature



(b) 温度梯度

(b) Temperature gradient

图 5 不同导热系数比 k_z/k_r 下的场点 (15.0, 5.0) 处的温度和温度梯度

Fig. 5 Temperature and its gradient at field point (15.0, 5.0) for different radii of k_z/k_r

4 结 论

1) Trefftz 有限元解与解析解或 ABAQUS 结果吻合度较高, 这表明本文所建立的位势插值模式及修正变分泛函是正确的。

2) 所用坐标变换关系仅为寻求正交各向异性轴对称位势问题的完备解, 而问题求解仍在原始区域内进行, 从而避免了边界条件的转化可能带来的困难。

3) Trefftz 有限元列式只涉及边界积分, Gauss 点布置在单元边界上, 在畸变网格划分下也能获得满意的解答。

致谢 本文研究得到上海高校青年骨干教师国内访问学者计划基金和校启基金 (2012-gp04) 资助, 特此感谢。

参考文献 (References):

- [1] Jirousek J, Leon N. A powerful finite element for plate bending[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1977, **12**(1): 77-96.
- [2] Trefftz E. Ein Gegenstück zum Ritz'schen Verfahren[C]//*Proceedings of the 2nd International Congress on Applied Mechanics*. Zurich, Switzerland, 1926: 131-137.
- [3] Qin Q H. *The Trefftz Finite and Boundary Element Method*[M]. Southampton: WIT Press, 2000.
- [4] Qin Q H, Wang H. *MATLAB and C Programming for Trefftz Finite Element Methods*[M]. Boca Raton: CRC Press, 2008.
- [5] Jirousek J, Venkatesh A. Hybrid Trefftz plane elasticity elements with p -method capabilities

- [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, **35**(7): 1443-1472.
- [6] Wang H, Qin Q H, Arounsavath D. Application of hybrid Trefftz finite element method to non-linear problems of minimal surface[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, **69**(6): 1262-1277.
- [7] Fu Z J, Qin Q H, Chen W. Hybrid-Trefftz finite element method for heat conduction in non-linear functionally graded materials[J]. *Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, 2011, **28**(5): 578-599.
- [8] Cao L L, Wang H, Qin Q H. Fundamental solution based graded element model for steady-state heat transfer in FGM[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2012, **25**(4): 377-392.
- [9] Wang K Y, Zhang L Q, Li P C. A four-node hybrid-Trefftz annular element for analysis of axisymmetric potential problems[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2012, **60**: 49-56.
- [10] 赵新娟, 赵吉义. 位势问题的杂交有限元算法研究[J]. 中原工学院学报, 2011, **22**(1): 59-61. (ZHAO Xin-juan, ZHAO Ji-yi. Potential problems in anisotropic solids using hybrid finite element model[J]. *Journal of Zhongyuan University of Technology*, 2011, **22**(1): 59-61. (in Chinese))
- [11] 王克用, 李培超, 张敏良. 正交各向异性位势问题的 Trefftz 有限元法[J]. 力学季刊, 2012, **33**(3): 499-506. (WANG Ke-yong, LI Pei-chao, ZHANG Min-liang. Trefftz finite element method for orthotropic potential problems[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2012, **33**(3): 499-506. (in Chinese))
- [12] Marczak R J, Denda M. New derivations of the fundamental solution for heat conduction problems in three-dimensional general anisotropic media[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2011, **54**(15/16): 3605-3612.

Trefftz Finite Element Analysis of Axisymmetric Potential Problems in Orthotropic Media

WANG Ke-yong^{1,2}, HUANG Zheng-ming², LI Pei-chao¹, LIU Bo¹

(1. *School of Mechanical Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, P. R. China;*

2. *School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China)*

Abstract: Trefftz finite element method (TFEM) has received considerable attention due to its excellent features. A four-node quadrilateral annular element was proposed for analyzing axisymmetric potential problems in orthotropic media. In the element model, two independent potential interpolation modes, namely intra-element field and frame field, were firstly assumed. Then, they were both substituted into the modified variational functional and the domain integral involved was eliminated using the Gaussian divergence theorem. Finally, the element stiffness equation including boundary integrals only was derived based on the stationary principle. Numerical examples demonstrate that the developed element is accurate, stable and insensitive to mesh distortion.

Key words: Trefftz finite element method; modified variational functional; potential problem; axial symmetry; orthotropic medium