文章编号:1000-0887(2013)05-0518-07

左 wGF- 封闭环上的弱 Gorenstein 平坦模*

王修建[1,2], 杜先能[2]

(1. 皖西学院 应用数学学院, 安徽 六安 237012;
2. 安徽大学 数学科学学院, 合肥 230039)

摘要: 利用同调代数的工具, 主要证明了弱 Gorenstein 平坦模类为投射预解的当且仅当它是扩张封闭的,进一步的刻画了左 wGF- 封闭环上弱 Gorenstein 平坦模的一些性质,这些内容丰富了 D. Bennis 等人的研究结果.

关 键 词: 弱-Gorenstein 平坦; Gorenstein 平坦; 左 wGF- 封闭环; 投射预解

中图分类号: O153.3 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.05.010

1 引言及预备知识

同调代数在许多领域中都是新技术的根源,这其中就包括量子力学和拓扑动力系统等科研领域. 近年来,Gorenstein 平坦模已成为非常活跃的研究对象,众多学者对这些模类做了大量的研究工作,并积累了丰硕成果[1-8]. 1993 年,Enochs,Jenda 和 Torrecillas 在文献[9]中定义了 Goernstein 平坦模.

定义 1.1[9] 设 M 是左 R- 模. 称 M 是 Gorenstein 平坦的,若存在一个正合列 $\boldsymbol{F} = \cdots \to F_1 \to F_0 \to F^0 \to F^1 \to \cdots$ 使得 $M \cong \ker(F^0 \to F^1)$,其中 F^i 和 F_i 都是平坦模,且对任意的内射右 R- 模 I,序列 $\boldsymbol{F}$ 在函子 $I \otimes_R$- 的作用下仍是正合的. 此时,正合列 $\boldsymbol{F}$ 叫做 M 的一个完备平坦分解(complete flat resolution).

2013 年,文献[2]的作者定义了弱 Gorenstein 平坦模. 即设 M 是左 R- 模,则称 M 是弱 Gorenstein 平坦模,若存在一个平坦左 R- 模正合列 $\boldsymbol{F} = \cdots \to F_1 \to F_0 \to F^0 \to F^1 \to \cdots$ 使得 $M \cong \ker(F^0 \to F^1)$. 此时,正合列 $\boldsymbol{F}$ 叫做 M 的一个完全平坦分解(perfect flat resolution). 显然,每个 Gorenstein 投射左 R- 模是弱 Gorenstein 平坦模,且所有 Gorenstein 平坦左 R- 模均是弱 Gorenstein 平坦模. 本文将继续弱 Gorenstein 平坦模相关性质的研究,进一步丰富文献[1-2,6]的研究内容.

定义 1.2[1,5] 设 R 是一个环且 X 表示左 R- 模类.

(1) 称 X 是扩张封闭的,如果对任意的 R- 模短正合列 $0 \to L \to M \to N \to 0$,若 $L,N \in X$,则有 $M \in X$.

(2) 称 X 是满态射核下封闭的,如果对任意的 R- 模短正合列 $0 \to L \to M \to N \to 0$,若 M,

* **收稿日期:** 2013-03-18; **修订日期:** 2013-04-12
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11126173)
作者简介: 王修建(1982—), 男,安徽人,讲师,博士(通讯作者. E-mail: xjwang@wxc.edu.cn).

$N \in X$,则有 $L \in X$.

(3) 称 X 是单态射余核下封闭的,如果对任意的 R- 模短正合列 $0 \to L \to M \to N \to 0$,若 L, $M \in X$,则有 $N \in X$.

(4) 称 X 是投射预解的, 如果它包含所有的投射 R- 模, 且同时在扩张和满态射核下封闭; 也就是说,对任意的 R- 模短正合列 $0 \to L \to M \to N \to 0$, 其中 $N \in X$, 则 $L \in X$ 当且仅当 $M \in X$.

全文中所有的环都是带有单位元的结合环,所有模都是酉模. 文中未说明的背景材料请参见文献[1,9-11].

2　主要结论

本节,将研究在下述环下的弱 Gorenstein 平坦模性质.

定义 2.1　环 R 称为左 wGF- 封闭环,如果 $w\mathcal{G}\mathcal{F}(R)$ 是扩张封闭的,其中 $w\mathcal{G}\mathcal{F}(R)$ 表示所有弱 Gorenstein 平坦左 R- 模组成的类. 我们可类似的定义右 wGF- 封闭环.

引理 2.2(文献[3]的命题 3.3)　设 M 是左 R- 模,下述各条等价:

(1) M 是弱 Gorenstein 平坦的.

(2) 存在一个左 R- 模正合列 $0 \to M \to F^0 \to F^1 \to \cdots$,其中每个 F^i 都是平坦模.

(3) 存在一个左 R- 模短正合列 $0 \to M \to F \to N \to 0$,其中 F 为平坦模,N 是弱 Gorenstein 平坦的.

定理 2.3　对任意的环 R,$\mathcal{F}(R)$ 表示平坦左 R- 模类. 则下述条件等价:

(1) R 是左 wGF- 封闭的.

(2) $w\mathcal{G}\mathcal{F}(R)$ 是投射预解的.

(3) 对于任意的左 R- 模短正合列 $0 \to Q_1 \to Q_0 \to M \to 0$,若 Q_0 和 Q_1 是弱 Gorenstein 平坦左 R- 模且 $\mathcal{F}(R)$ 在单态射余核下封闭,则有 M 是弱 Gorenstein 平坦左 R- 模.

证明　(1)⇒(2) 要证明 $w\mathcal{G}\mathcal{F}(R)$ 是投射预解的,由定义 1.2,只需证明它在满态射核下封闭. 考虑左 R- 模短正合列 $0 \to L \to M \to N \to 0$,其中 M 和 N 是弱 Gorenstein 平坦的,下证 L 弱 Gorenstein 平坦的. 既然 M 是弱 Gorenstein 平坦的,则存在一个左 R- 模短正合列 $0 \to M \to F \to G \to 0$,其中 F 为平坦模,G 是弱 Gorenstein 平坦的. $M \to N$ 和 $M \to F$ 的推出图如图 1 所示.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & G \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 1　推出图 ($M \to N$, $M \to F$)

Fig. 1　The pullout diagram ($M \to N$, $M \to F$)

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & G \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 2　推出图 ($B \to C$, $F \to C$)

Fig. 2　The pullout diagram ($B \to C$, $F \to C$)

由图 1 右侧垂直短正合列 $0 \to N \to D \to G \to 0$ 及 R 是左 wGF- 封闭可知,D 是弱 Gorenstein 平坦的. 因此由图 1 中间水平短正合列和引理 2.2 可得 L 是弱 Gorenstein 平坦的.

(3)⇒(1) 考虑左 R- 模短正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$，其中 A 和 C 是弱 Gorenstein 平坦的，下证 B 是弱 Gorenstein 平坦的. 既然 C 是弱 Gorenstein 平坦的，则由弱 Gorenstein 平坦的定义知，存在一个左 R- 模短正合列 $0 \to G \to F \to C \to 0$，其中 F 为平坦模，G 是弱 Gorenstein 平坦的. $B \to C$ 和 $F \to C$ 的推出图如图 2 所示.

同时,既然 A 也是弱 Gorenstein 平坦的,则存在一个左 R- 模短正合列 $0 \to A \to F' \to G' \to 0$,其中 F' 为平坦模,G' 是弱 Gorenstein 平坦的. $A \to D$ 和 $A \to F'$ 的推出图如图 3 所示.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F' \arrow[r] \arrow[d] & D' \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] & 0 \\
 & G' \arrow[r] \arrow[d] & G' \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

图 3 推出图 ($A \to D$, $A \to F'$)

Fig. 3 The pullout diagram ($A \to D$, $A \to F'$)

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & G \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

图 4 推出图 ($Q_1 \to F_1$, $Q_1 \to Q_0$)

Fig. 4 The pullout diagram ($Q_1 \to F_1$, $Q_1 \to Q_0$)

在图 3 的左 R- 模短正合列 $0 \to F' \to D' \to F \to 0$ 中,由 F' 和 F 的平坦性知,D' 也是平坦的. 则由图 3 的左 R- 模短正合列 $0 \to D \to D' \to G' \to 0$ 和引理 2. 2 知,D 是弱 Gorenstein 平坦的. 最后考虑图 2 的短正合列 $0 \to G \to D \to B \to 0$,已证 G 和 D 都是弱 Gorenstein 平坦左 R- 模，则有(3) 的题设条件知 B 是弱 Gorenstein 平坦左 R- 模.

(1)⇒(3) 既然 Q_1 是弱 Gorenstein 平坦的,则存在一个左 R- 模短正合列 $0 \to Q_1 \to F_1 \to G \to 0$,其中 F_1 为平坦模,G 是弱 Gorenstein 平坦的. $Q_1 \to F_1$ 和 $Q_1 \to Q_0$ 的推出图如图 4 所示.

由图 4 右侧垂直短正合列 $0 \to Q_0 \to D \to G \to 0$ 及 R 是左 wGF- 封闭可知,D 是弱 Gorenstein 平坦的. 则存在一个左 R- 模短正合列 $0 \to D \to F \to H \to 0$,其中 F 为平坦模,H 是弱 Gorenstein 平坦的. $D \to M$ 和 $D \to G$ 的推出图如图 5 所示.

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & F_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & H \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

图 5 推出图 ($D \to M$, $D \to G$)

Fig. 5 The pullout diagram ($D \to M$, $D \to G$)

由图 5 的短正合列 $0 \to F_1 \to F \to F_2 \to 0$ 及 $\mathcal{F}(R)$ 在单态射余核下封闭知 F_2 是平坦的. 则由图 5 的左 R- 模短正合列 $0 \to M \to F_2 \to H \to 0$ 及引理 2. 2 知 M 是弱 Gorenstein 平坦左 R- 模.

对于整数 $n \geqslant 0$,文献[11] 中称一个环 R 为 n-FC 环,若它是双侧凝聚环且满足正则模 R 的左右 FP 自内射维数不大于 n. 结合文献[1-2]有下述结论:

推论 2.4 设 R 是 n-FC 环且 $n \geqslant 0$，下述条件等价:

(1) R 是左 GF- 封闭的,即 Gorenstein 平坦左 R- 模类是扩张封闭的.

(2) $\mathcal{GF}(R)$ 是投射预解的.

(3) 对于任意的左 R- 模短正合列 $0 \to Q_1 \to Q_0 \to M \to 0$,若 Q_0 和 Q_1 是 Gorenstein 平坦左 R- 模且 $\mathcal{F}(R)$ 在单态射余核下封闭,则有 M 是 Gorenstein 平坦左 R- 模.

(4) 对于任意的左 R- 模短正合列 $0 \to Q_1 \to Q_0 \to M \to 0$,其中 Q_0 和 Q_1 是 Gorenstein 平坦左 R- 模,若 $\mathrm{tor}_1^R(I,M) = 0$ 对任意的内射右 R- 模 I 都成立,则有 M 是 Gorenstein 平坦左 R- 模.

推论 2.5　如果 R 是左 wGF- 封闭环,则 $w\mathcal{G}\mathcal{F}(R)$ 在直和项下是封闭的.

证明　利用文献[6]的命题 1.4 和文献[2]的注记 3.2(3)以及本文定理 2.3 即证.

定理 2.6　如果 R 是左 wGF- 封闭环,则弱 Gorenstein 平坦模类在正向极限下是封闭的.

证明　依据文献[12]的命题2.3,我们仅需证明弱 Gorenstein 平坦模类在良序正向极限下是封闭的,因此我们假设 $(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ 是一个弱 Gorenstein 平坦模良序正向系统. 如果 $\lambda = n < \omega$,则 $\varinjlim M_\alpha = M_{n-1}$ 是弱 Gorenstein 平坦的,就证毕了.

下设 $\lambda = \omega$ 并着手证明 $\varinjlim M_n(n < \omega)$ 是弱 Gorenstein 平坦的. 既然 M_0 是弱 Gorenstein 平坦的,则存在一个正合列

$$A(0) =: 0 \to M_0 \to F_0^0 \to F_0^1 \to F_0^2 \to \cdots,$$

其中对每个 $i \geqslant 0$,F_0^i 都是平坦的,同时由文献[2] 的注记 3.2(3) 知,对于 $i \geqslant 0$,每个模 $K_0^i = \ker(F_0^i \to F_0^{i+1})$ 都是弱 Gorenstein 平坦的,其中 $K_0^0 = M_0$. 态射 $M_0 \to F_0^0$ 和 $M_0 \to M_1$ 的推出图如图 6 所示.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r] \arrow[d] & F_0^0 \arrow[r] \arrow[d] & K_0^1 \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & U \arrow[r] & K_0^1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 6　推出图 ($M_0 \to F_0^0$, $M_0 \to M_1$)

Fig. 6　The pullout diagram ($M_0 \to F_0^0$, $M_0 \to M_1$)

则由 M_1 和 K_0^1 的弱 Gorenstein 平坦性以及 R 是左 wGF- 封闭环知 U 是弱 Gorenstein 平坦的,因此存在短正合列 $0 \to U \to F_1^0 \to L \to 0$,其中 F_1^0 是平坦的以及 L 是弱 Gorenstein 平坦的. 此时推出图如图 7 所示.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "1"] & U \arrow[r] \arrow[d] & K_0^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & F_1^0 \arrow[r] \arrow[d] & K_1^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & L \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 7　推出图 ($U \to F_1^0$, $U \to K_0^1$)

Fig. 7　The pullout diagram ($U \to F_1^0$, $U \to K_0^1$)

既然 L 和 K_0^1 是弱 Gorenstein 平坦的,可得 K_1^1 是弱 Gorenstein 平坦的,则可通过态射 $M_0 \to M_1$ 诱导正合列态射(如图 8 所示).

重复上述方法,则可通过态射 $K_0^1 \to K_1^1$ 诱导正合列态射(如图 9 所示).

这里 F_1^1 是平坦的并且 K_1^2 是弱 Gorenstein 平坦的. 继续使用上述证法可得正合列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r] \arrow[d] & F_0^0 \arrow[r] \arrow[d] & K_0^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & F_1^0 \arrow[r] & K_1^1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 8　由态射 $M_0 \to M_1$ 诱导的交换图

Fig. 8　The commutative diagram induced by $M_0 \to M_1$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0^1 \arrow[r] \arrow[d] & F_1^0 \arrow[r] \arrow[d] & K_0^2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1^1 \arrow[r] & F_1^1 \arrow[r] & K_1^2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 9　由态射 $K_0^1 \to K_1^1$ 诱导的交换图

Fig. 9　The commutative diagram induced by $K_0^1 \to K_1^1$

$$A(1) =: 0 \to M_1 \to F_1^0 \to F_1^1 \to F_1^2 \to \cdots,$$

其中对每个 $i \geqslant 0$,F_1^i 是平坦的,而每个模 $K_0^i = \ker(F_1^i \to F_1^{i+1})$ 都是弱 Gorenstein 平坦的,其中

$K_1^0 = M_1$,并且态射 $A(0) \to A(1)$ 是由 $M_0 \to M_1$ 诱导的. 如果继续重复上述过程,我们可得到一个交换图(如图 10 所示).

$$\begin{tikzcd}
A(0) =: \arrow[d] & 0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r] \arrow[d] & F_0^0 \arrow[r] \arrow[d] & F_0^1 \arrow[r] \arrow[d] & F_0^2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
A(1) =: \arrow[d] & 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_1^0 \arrow[r] \arrow[d] & F_1^1 \arrow[r] \arrow[d] & F_1^2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
A(2) =: \arrow[d] & 0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & F_2^0 \arrow[r] \arrow[d] & F_2^1 \arrow[r] \arrow[d] & F_2^2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

图 10　交换图

Fig. 10　The commutative diagram

这里每一行都正合,对于任意的 $i \geqslant 0$ 和 $j \geqslant 0$,每一个 F_j^i 平坦,并且每一个 $K_j^i = \ker(F_j^i \to F_j^{i+1})$ 都是弱 Gorenstein 平坦的(其中 $K_j^0 = M_j$). 运用正合函子 $\varinjlim$ 到上述交换图,我们可获得一个正合列

$$\varinjlim A(n) =: 0 \to \varinjlim M_n \to \varinjlim F_n^0 \to \varinjlim F_n^1 \to \varinjlim F_n^2 \to \cdots,$$

其中每个 $\varinjlim F_n^i$, $i = 0, 1, 2, \cdots$ 是平坦的. 因此由文献[2]的命题 3.3 知 $\varinjlim M_n$ 是弱 Gorenstein 平坦的.

现在我们重新标注 $M_0, M_1, \cdots, M_\omega, M_{\omega+1}, \cdots$,使得 $M_\omega = \varinjlim M_n$ 并且 $M_{\omega+1}$ 是原来的 M_ω,以此类推. 因此我们可以假设系统 $(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ 是连续的,也就是说,如果 β 是 $\beta < \lambda$ 的极限序,就有 $M_\beta = \varinjlim M_\alpha (\alpha < \beta)$. 利用超限归纳法,可证 $\varinjlim M_\alpha (\alpha < \lambda)$ 是弱 Gorenstein 平坦的,结果即证.

一个环 R 称为 f- 内射环是指对每一 $f.g.$ 生成理想 I,任何 I 到 R 的同态均可扩张成 R 的自同态;R 称为 FC 环,是指 R 为凝聚环且为 f- 内射环. 下述两个结论给出了在一定条件下,FC 环的几个等价刻画.

定理 2.7　对于交换环 R, 考虑下述条件:

(1) 每个 R- 模都是弱 Gorenstein 平坦的.

(2) 每个内射 R- 模都是弱 Gorenstein 平坦的.

(3) 每个 FP- 内射 R- 模都是弱 Gorenstein 平坦的.

(4) 若 $N_1 \subset N$ 都是 FP- 内射的,则 N/N_1 是弱 Gorenstein 平坦的.

(5) 每个 R- 模都是弱 Gorenstein 平坦 R- 模的子模.

(6) R 是 FC 环.

则有(1)⇔(2)⇔(3)⇔(4)⇔(6)⇒(5). 如果 R 是 $w\mathcal{G}\mathcal{F}(R)$ 封闭环,则有(5)⇒(2),因此所有 6 个条件等价.

证明　由文献[2]的推论 3.9 即得(1)⇔(2)⇔(3)⇔(6).

(3)⇒(4)因为 N_1 是 FP- 内射的,所以正合列 $0 \to N_1 \to N \to N/N_1 \to 0$ 是纯正和列. 既然 N_1 和 N 都是弱 Gorenstein 平坦的,由引理 2.2 知存在正合列 $0 \to N \to F \to L \to 0$,其中 F 是平坦的,L 是弱 Gorenstein 平坦的. $N \to N/N_1$ 和 $N \to F$ 的推出图,如图 11 所示.

因为 N_1 是 FP- 内射的,所以正合列 $0 \to N_1 \to F \to D \to 0$ 是纯正和列,对任意的 R- 模 K 都有长正合列

$$\cdots \to \operatorname{tor}_1^R(F,K) \to \operatorname{tor}_1^R(D,K) \to N_1 \otimes K \to$$
$$F \otimes K \to D \otimes K \to 0.$$

由纯正合列的定义得

$$0 \to N_1 \otimes K \to F \otimes K \to D \otimes K \to 0.$$

又由 F 是平坦的知 $\operatorname{tor}_1^R(F,K)=0$,所以有 $0 \to \operatorname{tor}_1^R(D,K) \to 0$,即 $\operatorname{tor}_1^R(D,K)=0$,因此 D 为平坦模. 所以由引理 2.2 知 N/N_1 是弱 Gorenstein 平坦的.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N/N_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & L \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 11 推出图

Fig. 11 The pullout diagram

(4)⇒(2) 因为任意内射模 E 总是 FP- 内射的,又 0 模显然是 FP- 内射的,所以 $E = E/0$ 是弱 Gorenstein 平坦的.

(2)⇒(5) 对于任意 R- 模 M,都有内射包 $E(M)$,使得 $M \subseteq E(M)$,从而由条件(2) 知 $E(M)$ 是弱 Gorenstein 平坦的,即证.

(5)⇒(2) 对于任意内射 R- 模 M,由条件(5) 知存在弱 Gorenstein 平坦模 Q,使得 $0 \to M \to Q$,则由 M 的内射性知 M 是 Q 的直和项,又由推论 2.5 知 M 是弱 Gorenstein 平坦的.

定理 2.8 设 R 是交换环且为 GF- 封闭环和 wGF- 封闭环,则下述条件等价:

(1) 每个 R- 模是弱 Gorenstein 平坦的.

(2) 每个余挠 R- 模是弱 Gorenstein 平坦的.

(3) 每个 Gorenstein 余挠 R- 模是弱 Gorenstein 平坦的.

(4) 每个循环 R- 模是弱 Gorenstein 平坦的.

(5) 每个非零 R- 模包含一个非零弱 Gorenstein 平坦子模.

(6) R 是一个 FC 环.

证明 (1)⇔(2)⇔(6) 见文献[2]的推论 3.9.

(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(1) 设 M 是任意 R- 模,由文献[13] 的定理 3.4 知存在一个正合列 $0 \to M \to C \to N \to 0$,其中 C 是 Gorenstein 余挠的,N 是弱 Gorenstein 平坦的. 另一方面,由(3) 知 C 是弱 Gorenstein 平坦的,既然 R 是左 wGF- 封闭的,由定理 2.3 可得 M 是弱 Gorenstein 平坦的.

(1)⇒(4) 和(4)⇒(5) 显然.

(5)⇒(1) 由定理 2.7 结合文献[13]的命题 3.11 的证明过程即证.

3 结 束 语

近些年来,在研究环与代数的模范畴时,(弱) Gorenstein 投射模、内射模和平坦模引起了人们的关注,尤其是 L. W. Christensen 和 O. Veliche 把弱 Gorenstein 投射模称为“infinite syzygies”,高增辉则系统地研究了弱 Gorenstein 投射模、内射模和平坦模[2]. 而本文给出了左 wGF- 封闭环上的一些性质刻画.

参考文献(References):

[1] Bennis D. Rings over which the class of Gorenstein flat modules is closed under extensions [J]. *Communications in Algebra*, 2009, **37**(3):855-868.

[2] GAO Zeng-hui. Weak Gorenstein projective, injective and flat modules[J]. *J Algebra Appl*, 2013, **12**: 1250165. doi: 10.1142/S0219498812501654

[3] Ding N Q, Li Y L, Mao L X. Strongly Gorenstein flat modules[J]. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 2009, **86**(3): 323-338.

[4] Christensen L W, Frankild A, Holm H. On Gorenstein projective, injective and flat dimensions—a functorial description with applications[J]. *Journal of Algebra*, 2006, **302**(1):231-279.

[5] Bennis D, Mahdou N. Strongly Gorenstein projective, injective, and flat modules[J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2007, **210**(2): 437-445.

[6] Holm H. Gorenstein homological dimension[J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2004, **189**(1/3):167-193.

[7] Holm H. Gorenstein projective, injective and flat modules[D]. MSc thesis. Institute for Mathematical Science, University of Copenhagen, 2004.

[8] YANG Xiao-yan, LIU Zhong-kui. Strongly Gorenstein projective, injective and flat modules [J]. *Journal of Algebra*, 2008, **320**(7): 2659-2674.

[9] Enochs E E, Jenda O M G, Torrecillas B. Gorenstein flat modules[J]. 南京大学学报:数学半年刊, 1993, **10**(1): 1-9. (Enochs E E, Jenda O M G, Torrecillas B. Gorenstein flat modules [J]. *Journal of Nanjing University* (*Mathematical Biquarterly*), 1993, **10**(1): 1-9.)

[10] Hilton P J, Stammbach U. *A Course in Homological Algebra*[M] 2nd ed. Springer-Verlag, 1997.

[11] Rotman J. *An Introduction to Homological Algebra*[M]. New York: Academic Press, 1979.

[12] Enochs E E, López-Ramos J A. Kaplansky classes[J]. *Rend Semin Mat Univ Padova*, 2002, **107**: 67-79.

[13] YANG Gang, LIU Zhong-kui. Gorenstein flat covers over GF-closed rings[J]. *Communications in Algebra*, 2012, **40**(5):1632-1640.

[14] Fieldhouse D J. Character modules, dimension and purity[J]. *Glasgow Mathematical Journal*, 1972, **13**(2): 144-146.

[15] LIU Zhong-kui, YANG Xiao-yan. Gorenstein projective, injective and flat modules[J]. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 2009, **87**(3):395-407.

[16] DING Nan-qing, CHEN Jian-long. Coherent rings with finite self-FP-injective dimension[J]. *Communications in Algebra*, 1996, **24**(9):2963-2980.

Weak Gorenstein Flat Modules Under the Left *wGF*-Closed Rings

WANG Xiu-jian[1,2], DU Xian-neng[2]

(1. *School of Applied Mathematics*, *West Anhui University*, *Lu'an*, *Anhui* 237012, *P. R. China*;
2. *School of Mathematical Sciences*, *Anhui University*, *Hefei* 230039, *P. R. China*)

Abstract: Using homological methods, it is proved that the class of the weak Gorenstein flat modules was projectively resolving if and only if it was closed under extensions. Furthermore, some properties of weak Gorenstein flat modules under the *wGF* rings were also given, which generalized the results of D. Bennis and so on.

Key words: weak Gorenstein flat module; Gorenstein flat module; left *wGF*-closed rings; projectively resolving