

# 动载下缝端应力强度因子 计算的扩展有限元法\*

江守燕<sup>1,2</sup>, 杜成斌<sup>2</sup>

(1. 河海大学 水利水电学院,南京 210098;

2. 河海大学 力学与材料学院,南京 210098)

**摘要:** 在扩展有限元法(extended finite element methods, XFEM)的理论框架下,重点研究了动荷载作用下稳定裂纹尖端动态应力强度因子(dynamic stress intensity factors, DSIFs)的求解方法.根据 XFEM 的位移模式,推导了动力 XFEM 的支配方程,采用 Newmark 隐式算法进行时间积分.同时,提出一种 XFEM 质量矩阵的集中策略,给出了求解 DSIFs 的相互作用积分方法,与静态问题的相互作用积分方法相比,增加了惯性项的贡献.最后,若干典型算例的计算结果表明:XFEM 可以准确评价稳定裂纹尖端的 DSIFs,建议的质量矩阵集中策略是有效的,为得到正确的 DSIFs,惯性项的贡献不可忽略.

**关键词:** 扩展有限元法; 动载; 裂纹; 动应力强度因子; 相互作用积分

**中图分类号:** TB115; O346.1 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.06.005

## 引言

扩展有限元法(extended finite element methods, XFEM)及其基本思想已被广泛地用于分析工程领域中的各种不连续问题,如结构的断裂分析<sup>[1]</sup>、非均质材料的热分析<sup>[2]</sup>等.在结构的断裂分析中,很多实际结构多是受动载条件,因此,动力 XFEM 的研究显得十分必要,而动应力强度因子(dynamic stress intensity factors, DSIFs)是判断裂纹在动载下是否发展以及发展方向的重要参数.

Belytschko 等<sup>[3]</sup>和他的学生 Chen<sup>[4]</sup>最早利用 XFEM 对动力开裂问题进行了研究;随后, Réthoré 等<sup>[5-6]</sup>发展了时空扩展有限元法(STX-FEM)去处理动载下裂纹生长问题;Menouillard 等<sup>[7-9]</sup>基于显式时间积分算法研究了改进函数的不同形式对 DSIFs 及动力裂纹生长的影响,他们提出通过纠正力(correction force)的方法释放裂尖单元,从而避免裂纹生长过程由于裂尖单元的突然释放产生的伪应力波;针对显式积分算法的稳定性问题,Menouillard 等<sup>[10-11]</sup>研究了积分步长的取值,同时指出常规有限元处理动力问题时的质量矩阵集中策略不适用于基于显式算法的动力 XFEM,并给出了一种质量矩阵的集中方法;基于谱单元法和显式时间积分算法,

\* 收稿日期: 2012-09-11; 修订日期: 2013-05-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11132003);中国博士后科学基金资助项目(2013M530233)

作者简介: 江守燕(1986—),女,安徽舒城人,博士(E-mail: syjiang@hhu.edu.cn);

杜成斌(1965—),男,江苏盐城人,教授(通讯作者.E-mail: cbdu@hhu.edu.cn).

Liu 等<sup>[12]</sup>发展了高阶的 XFEM 作为动力裂纹生长的模拟; Motamedi 等<sup>[13]</sup>将动力 XFEM 的研究对象从各向同性介质发展到各向异性介质. 相比之下, 国内动力 XFEM 的研究明显滞后, 方修君等<sup>[14]</sup>最早在 ABAQUS 程序中嵌入了动力 XFEM 的功能, 并应用于重力坝地震开裂过程的模拟, 但不能提取缝端 DSIFs; 王志勇等<sup>[15]</sup>运用不含裂尖增强函数的 XFEM, 研究了动态载荷作用下颗粒增强复合材料的断裂行为; 此外, 清华大学庄茁教授等<sup>[16-17]</sup>长期致力于动力 XFEM 的理论和应用研究, 在动力 XFEM 的研究方面做出了较大的贡献, 但文献[17]对于 DSIFs 的求解仍然基于静力条件下的相互作用积分法.

本文基于 XFEM 的理论, 采用 Newmark 隐式动力学算法进行时间积分, 重点研究了稳定裂纹缝端 DSIFs 的求解方法, 并提出一种 XFEM 质量矩阵的集中策略, 给出了求解 DSIFs 的相互作用积分方法. 最后, 通过若干典型算例验证了 XFEM 可以准确评价稳定裂纹缝端的 DSIFs, 也验证了建议的质量矩阵集中策略的有效性, 同时也表明惯性项对 DSIFs 的贡献是不可忽略的.

## 1 动力问题的扩展有限元法

对于外荷载随时间变化但裂纹是稳定情形, 这时的裂纹尖端解析场与静态情形完全类似<sup>[18]</sup>, 因此, 静力 XFEM 的裂尖改进函数仍然适用于动力 XFEM. 动力 XFEM 的位移模式可表达为

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{i \in I_{\text{abs}}^*} N_i^*(\mathbf{x}) [\mathbf{H}(\mathbf{x}) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_i)] \mathbf{a}_i + \sum_{i \in I_{\text{br}}^*} N_i^*(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^4 [F_j(\mathbf{x}) - F_j(\mathbf{x}_i)] \mathbf{b}_i^j, \quad (1)$$

式中,  $I$  为求解域中所有结点的集合;  $N_i(\mathbf{x})$  为结点  $i$  处的常规有限元插值形函数;  $\mathbf{u}_i$  为常规有限元部分在结点  $i$  处的未知量;  $N_i^*(\mathbf{x})$  为单位分解函数, 其形式可以和  $N_i(\mathbf{x})$  相同, 也可不同, 文中取二者相同;  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  为 Heaviside 改进函数;  $I_{\text{abs}}^*$  为 Heaviside 改进结点集合;  $\mathbf{a}_i$  为与 Heaviside 改进相关的结点未知量;  $I_{\text{br}}^*$  为裂尖改进结点集合;  $\mathbf{b}_i^j$  为与裂尖改进相关的结点未知量.

如图 1 所示, 对于裂尖改进单元, 其改进函数形式为

$$\begin{cases} F_1(r, \theta) = \sqrt{r} \sin(\theta/2), \\ F_2(r, \theta) = \sqrt{r} \cos(\theta/2), \\ F_3(r, \theta) = \sqrt{r} \sin \theta \sin(\theta/2), \\ F_4(r, \theta) = \sqrt{r} \sin \theta \cos(\theta/2), \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $r$  和  $\theta$  为裂尖局部坐标系. 对于裂纹完全贯穿单元的结点采用 Heaviside 函数进行改进, 即

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{cases} +1, & (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n} > 0, \\ -1, & (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n} < 0, \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{x}$  为考察点,  $\mathbf{x}^*$  为考察点在裂纹面上的投影点,  $\mathbf{n}$  为  $\mathbf{x}^*$  处裂纹面的单位外法向.

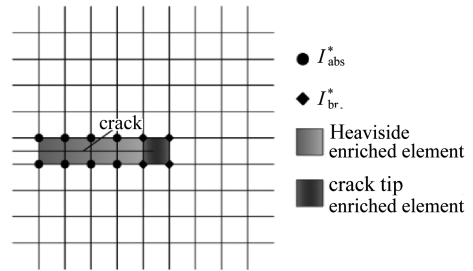


图 1 改进结点的选取

Fig. 1 Selection of enriched nodes

文中单元类型为平面四结点等参元, 不考虑阻尼的影响, 由弹性动力学的基本方程<sup>[19]</sup>及式(1)给出的动力 XFEM 的位移模式, 运用虚功原理, 可得动力 XFEM 的支配方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{uu} & \mathbf{M}^{ua} & \mathbf{M}^{ub} \\ \mathbf{M}^{au} & \mathbf{M}^{aa} & \mathbf{M}^{ab} \\ \mathbf{M}^{bu} & \mathbf{M}^{ba} & \mathbf{M}^{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{a}} \\ \ddot{\mathbf{b}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{K}^{ua} & \mathbf{K}^{ub} \\ \mathbf{K}^{au} & \mathbf{K}^{aa} & \mathbf{K}^{ab} \\ \mathbf{K}^{bu} & \mathbf{K}^{ba} & \mathbf{K}^{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^u(t) \\ \mathbf{f}^a(t) \\ \mathbf{f}^b(t) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{M}^{uu} = \int_{\Omega^e} \rho (\mathbf{N})^T \mathbf{N} d\Omega, \\ \mathbf{M}^{ua} = [\mathbf{M}^{au}]^T = \int_{\Omega^e} \rho (\mathbf{N})^T (\mathbf{N}\varphi) d\Omega, \\ \mathbf{M}_j^{ub} = [\mathbf{M}_j^{bu}]^T = \int_{\Omega^e} \rho (\mathbf{N})^T (\mathbf{N}\psi_j) d\Omega, \\ \mathbf{M}^{aa} = \int_{\Omega^e} \rho (\mathbf{N}\varphi)^T (\mathbf{N}\varphi) d\Omega, \\ \mathbf{M}_j^{ab} = [\mathbf{M}_j^{ba}]^T = \int_{\Omega^e} \rho (\mathbf{N}\varphi)^T (\mathbf{N}\psi_j) d\Omega, \\ \mathbf{M}_{jk}^{bb} = \int_{\Omega^e} \rho (\mathbf{N}\psi_j)^T (\mathbf{N}\psi_k) d\Omega, \end{cases} \quad j, k = 1, 2, 3, 4, \quad (5)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_4], \\ \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \end{cases} \quad (6)$$

$$\varphi = \mathbf{H}(\mathbf{x}) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_i), \quad (7)$$

$$\psi_j = F_j(\mathbf{x}) - F_j(\mathbf{x}_i), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (8)$$

$\rho$  为材料的密度; 劲度矩阵和荷载列阵的推导与静力 XFEM 完全一致, 可参见文献[19].

由式(5)确定的质量矩阵为一致质量矩阵 (consistent mass matrix, CM), 与传统有限元类似, 为提高计算效率, 在编程中往往采用集中质量矩阵, 然而, 与传统有限元不同的是, 对于改进单元, 单元被裂纹分割, 两边的材料分开, 单元结点包含附加自由度, 文中尝试采用如下的质量矩阵集中策略, 集中质量矩阵 (lumped mass matrix, LM) 可表示为

$$\mathbf{M}_{ij}^e = \begin{cases} \frac{2 \sum_{j'=1}^{n_e} \int_{\Omega^e} \rho N_i N_{j'} d\Omega}{T_{\text{dof}}} & (i = j), \\ 0 & (i \neq j, i_{\text{edof}} = 0), \end{cases} \quad (9)$$

式中,  $i, j = 1, 2, \dots, 48$ ,  $n_e$  为单元结点数, 文中  $n_e = 4$ ;  $i'$  为自由度  $i$  所属的结点数;  $T_{\text{dof}}$  为单元总的自由度数 (常规自由度和改进自由度之和);  $i_{\text{edof}}$  为改进自由度  $i$ . 式(9)确定的集中质量矩阵满足单元的质量守恒.

采用 Newmark 隐式算法进行时间积分, 即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}_t + (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}_t \Delta t + \gamma \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \Delta t, \\ \mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}_t + \dot{\mathbf{U}}_t \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{\mathbf{U}}_t \Delta t^2 + \beta \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \Delta t^2, \end{cases} \quad (10)$$

式中,  $\mathbf{U}_t, \dot{\mathbf{U}}_t$  和  $\ddot{\mathbf{U}}_t$  为  $t$  时刻的位移、速度和加速度向量,  $\Delta t$  为时间步长,  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 0.25$ .

## 2 相互作用积分

考虑两种应力状态,状态 1( $\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)}$ ) 为真实场,状态 2( $\sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)}$ ) 为辅助场. Song 等<sup>[20]</sup> 推导了用于求解非均匀材料 DSIFs 的相互作用积分方法,忽略材料的非均匀性,相互作用积分公式可退化为

$$M^{(1,2)} = \int_A (\sigma_{ij}^{(1)} u_{i,1}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} u_{i,1}^{(1)} - \sigma_{ik}^{(2)} \varepsilon_{ik}^{(1)} \delta_{lj}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA + \int_A \rho \ddot{u}_i^{(1)} u_{i,1}^{(2)} q dA, \quad (11)$$

式(11)中,第 1 项即为裂纹在静态条件下的相互作用积分,第 2 项为增加的惯性项贡献. $A$  为以裂尖点为圆心且半径为  $R$  的圆形域;半径  $R$  为

$$R = r_k h_c, \quad (12)$$

式中, $h_c$  为裂尖单元特征尺寸, $r_k$  为自定义的常数;在积分区域  $A$  内的结点  $q = 1$ ,在积分区域  $A$  外的结点  $q = 0$ . 在单元任意位置, $q$  的值通过下式插值得到

$$q = \sum_{i=1}^4 N_i q_i. \quad (13)$$

相互作用积分和 DSIFs 之间的关系为

$$M^{(1,2)} = \frac{2}{E^*} [K_I K_I^{\text{aux}} + K_{II} K_{II}^{\text{aux}}], \quad (14)$$

式中, $K_I^{\text{aux}}$  和  $K_{II}^{\text{aux}}$  为辅助场的 DSIFs, $E^*$  的表达式为

$$E^* = \begin{cases} E & (\text{平面应力}), \\ \frac{E}{1-\nu^2} & (\text{平面应变}). \end{cases} \quad (15)$$

选择合适的辅助场 DSIFs 值,真实场的 DSIFs 可表示为

$$\begin{cases} K_I = \frac{E^*}{2} M^{(1,2)} & (K_I^{\text{aux}} = 1, K_{II}^{\text{aux}} = 0), \\ K_{II} = \frac{E^*}{2} M^{(1,2)} & (K_I^{\text{aux}} = 0, K_{II}^{\text{aux}} = 1), \end{cases} \quad (16)$$

辅助应力场、位移场的形式可参见文献[18].

## 3 数值算例

### 3.1 算例 1: 含半无限长裂纹的无限大板问题

如图 2(a) 所示,含静止裂纹两端水平向约束板受到动态荷载作用. 数值计算时板的尺寸为  $l = 10$  m,  $h = 4$  m, 假设板处于平面应变状态,板被离散成  $39 \times 99$  的均匀网格(图 2(b)), 裂纹长度  $a = 5$  m, 材料的弹性模量  $E = 210$  GPa, Poisson 比  $\nu = 0.3$ , 密度  $\rho = 8\,000$  kg/m<sup>3</sup>. 在  $t = 0$  时刻,板的上边缘受到突然施加的均布拉应力  $\sigma_0 = 500$  MPa 的作用. 数值计算的总时间为 0.001 s, 时间步长取为  $\Delta t = 5.0$   $\mu$ s.

Freund(1990)<sup>[21]</sup> 给出了该问题的理论解,其 I 型 DSIFs 的表达式为

$$K_I(t) = \begin{cases} 0, & t < t_c, \\ \frac{2\sigma_0}{1-\nu} \sqrt{\frac{c_1(t-t_c)(1-2\nu)}{\pi}}, & t \geq t_c, \end{cases} \quad (17)$$

式中, $t_c = h/2c_1$ ,  $c_1 = 5\,944$  m/s.

将计算得到的 DSIFs 除以  $K_0 = \sigma_0 \sqrt{h/2}$  进行无量纲化处理,时间  $t$  除以  $t_c$  进行无量纲化处

理,如图3,分别给出了采用一致质量矩阵和集中质量矩阵得到的数值结果与解析解进行比较,均与解析解吻合较好,数值计算时,式(12)中 $r_k = 2$ 。

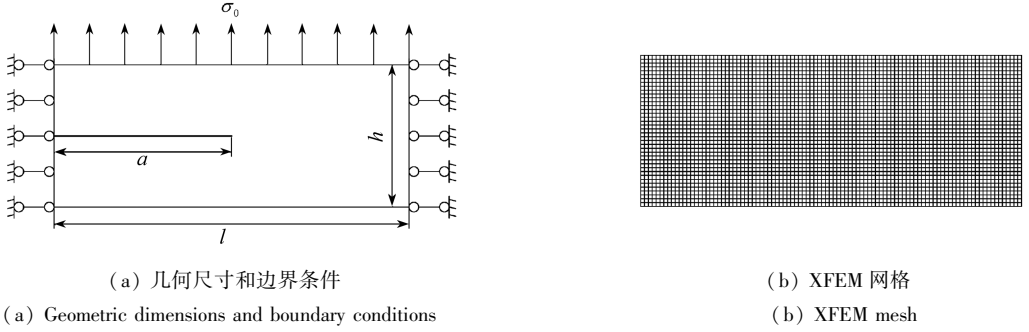


图2 含半无限长裂纹的无限大板问题

Fig.2 An infinite plate with a semi-infinite crack

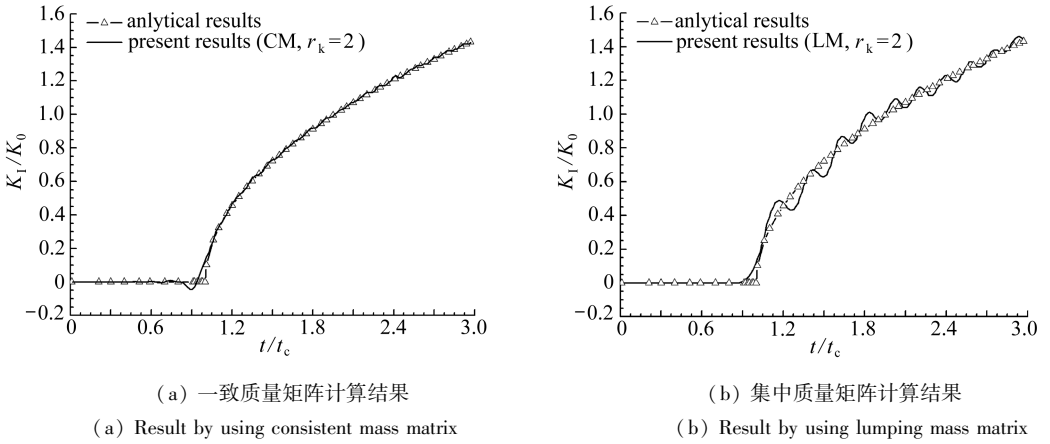
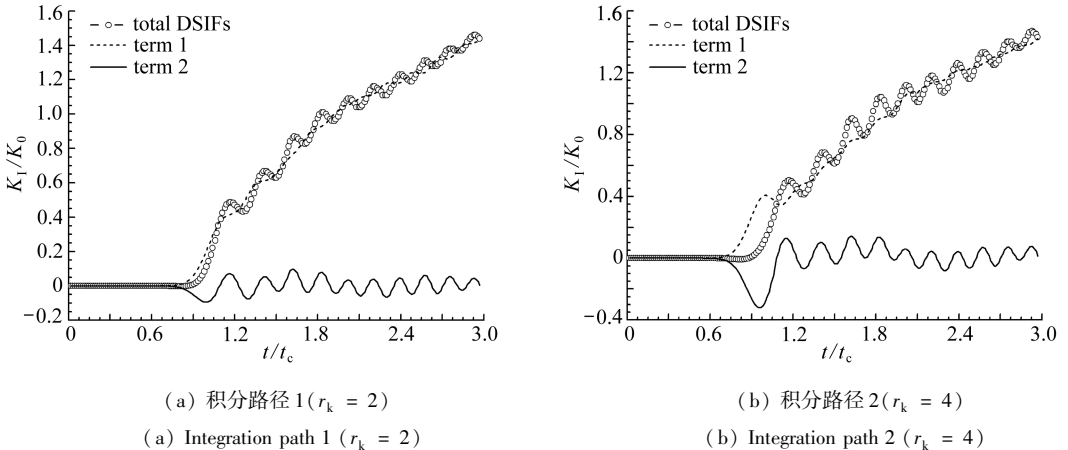


图3 解析解和数值解的比较

Fig.3 Comparisons of analytical and numerical results

为考察 DSIFs 中惯性项的贡献,图4给出了不同积分路径下( $r_k = 2, 4, 6$ ) DSIFs 随时间的变化曲线。图4中 term1 为式(11)中第1项积分,与静力条件下的积分式相同,term2 为式(11)中第2项积分,即为惯性项的贡献。从图中可看出,相比 term1,惯性项的数值贡献较小,但是,



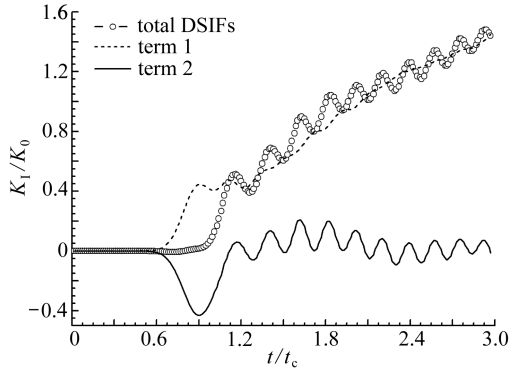
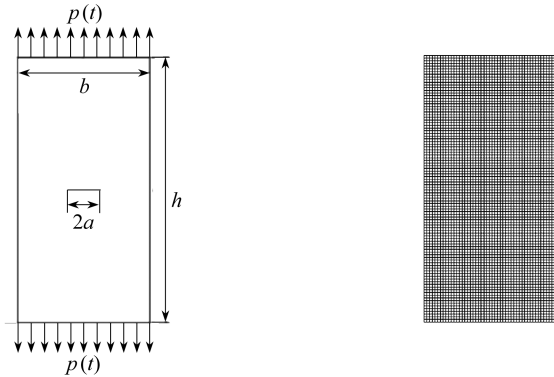
(c) 积分路径 3 ( $r_k = 6$ )(c) Integration path 3 ( $r_k = 6$ )

图 4 不同积分路径下 DSIFs 随时间的变化曲线

Fig. 4 DSIFs versus time curves with different contours

随着相互作用积分中积分区域的增大,惯性项的影响亦增大.若动力问题中不考虑惯性项的贡献,相互作用积分表现出很强的积分路径相关性.因此,为得到正确的 DSIFs,惯性项的贡献不可忽略.

### 3.2 算例 2: 中心断裂的拉伸试件



(a) 几何尺寸和边界条件

(a) Geometric dimensions and boundary conditions



(b) XFEM 网格

(b) XFEM mesh

图 5 CCT 试件

Fig. 5 CCT specimen

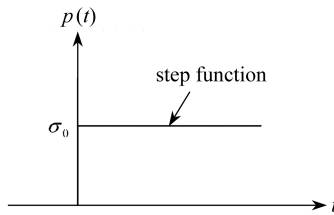


图 6 荷载-时间曲线(阶跃函数)

Fig. 6 Applied load versus time (step function)

如图 5(a)所示,一个中心断裂的拉伸(center cracked tension, CCT)试件两端受阶跃荷载  $p(t)$  (图 6)作用,Chen<sup>[22]</sup>最早研究了该问题在阶跃荷载作用下 DSIFs 的变化趋势.数值计算

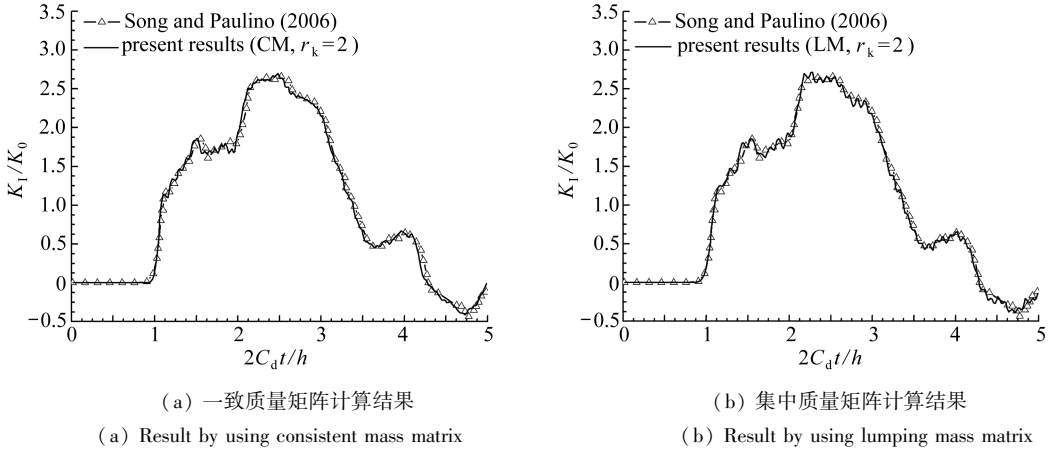


图7 本文数值解和文献结果(Song and Paulino<sup>[20]</sup>, 2006)的比较

Fig. 7 Comparisons of the present numerical results and the reference solution by Song and Paulino<sup>[20]</sup> (2006)

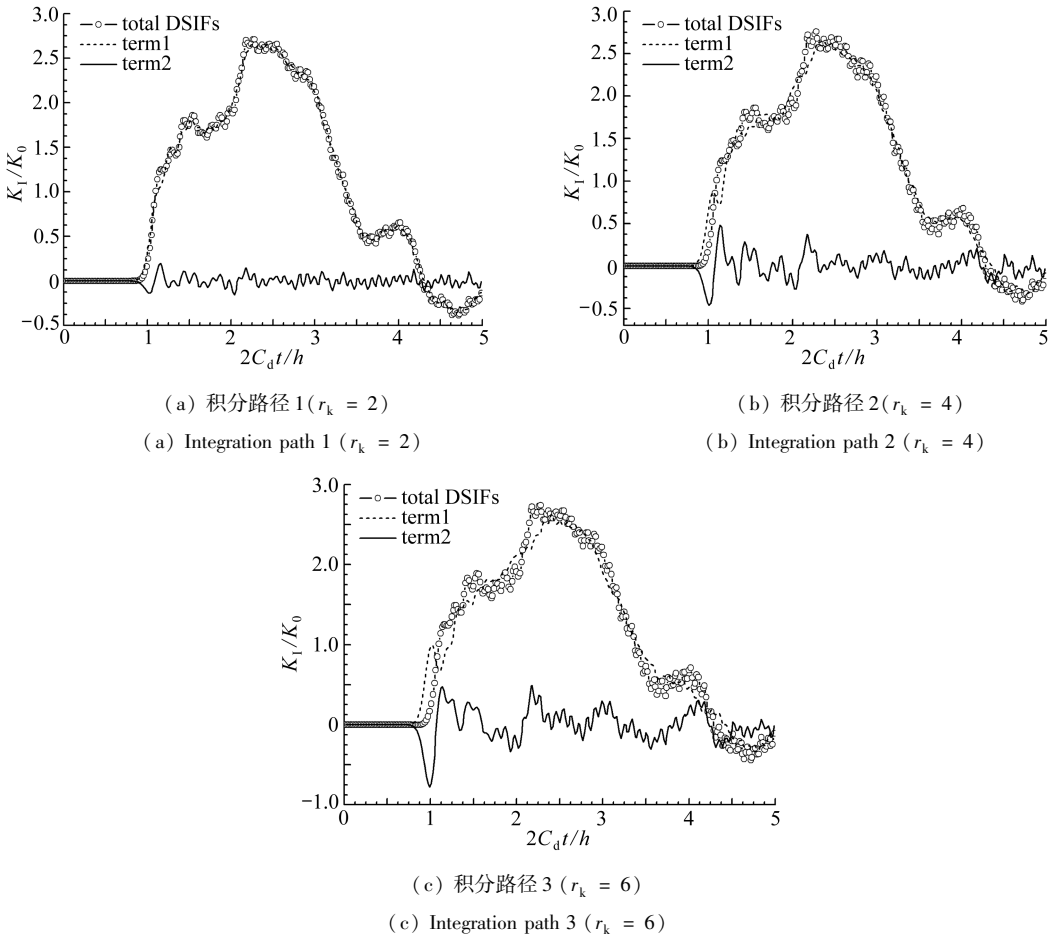


图8 不同积分路径下 DSIFs 随时间的变化曲线

Fig. 8 DSIFs versus time curves with different contours

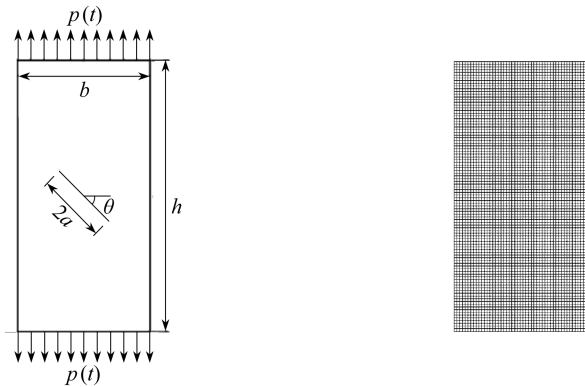
时,试件的尺寸  $b = 20 \text{ mm}$ ,  $h = 40 \text{ mm}$ , 假设试件处于平面应变状态, 试件被离散成  $49 \times 99$  的均匀网格(图 5(b)), 裂纹半长度  $a = 2.4 \text{ mm}$ , 材料的弹性模量  $E = 199.992 \text{ GPa}$ , Poisson 比  $\nu =$

0.3, 密度  $\rho = 5\,000\text{ kg/m}^3$ , 纵波速度  $C_d = 7.34\text{ mm}/\mu\text{s}$ . 数值计算的总时间为  $13.62\ \mu\text{s}$ , 时间步长取为  $\Delta t = 0.05\ \mu\text{s}$ . 将计算得到的 DSIFs 除以  $K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$  进行无量纲化处理, 时间  $t$  乘以  $2C_d/h$  进行无量纲化处理. 如图 7 所示, 分别给出了采用一致质量矩阵和集中质量矩阵得到的数值解与文献结果<sup>[20]</sup> 进行比较, 均与文献结果吻合较好, 数值计算时, 式(12)中  $r_k = 2$ .

图 8 也给出了不同积分路径下 ( $r_k = 2, 4, 6$ ) DSIFs 随时间的变化曲线. 本算例的计算结果也揭示了与算例 1 同样的规律, 表明求解 DSIFs 时, 惯性项的贡献不可忽略.

### 3.3 算例 3: 含倾斜裂纹的矩形板问题

本算例的荷载条件与材料参数均与算例 2 相同, 如图 9(a) 所示. 板的尺寸  $b = 30\text{ mm}$ ,  $h = 60\text{ mm}$ , 假设试件处于平面应变状态, 试件也被离散成  $49 \times 99$  的均匀网格 (图 9(b)), 裂纹半长度  $a = 7.07\text{ mm}$ , 裂纹倾角  $\theta = 45^\circ$ . 数值计算的总时间为  $20\ \mu\text{s}$ , 时间步长取为  $\Delta t = 0.1\ \mu\text{s}$ .



(a) 几何尺寸和边界条件

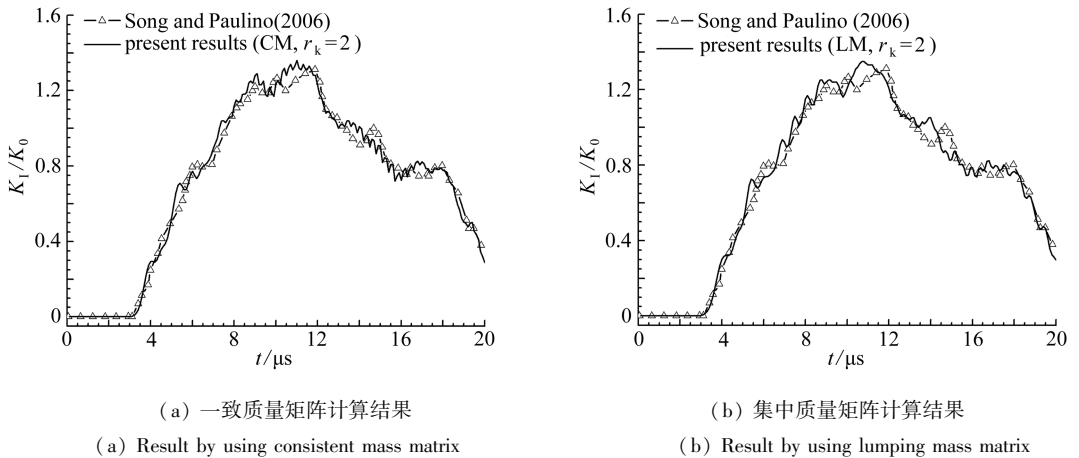
(b) XFEM 网格

(a) Geometric dimensions and boundary conditions

(b) XFEM mesh

图 9 含倾斜裂纹矩形板问题

Fig. 9 Rectangle plate with an inclined crack



(a) 一致质量矩阵计算结果

(b) 集中质量矩阵计算结果

(a) Result by using consistent mass matrix

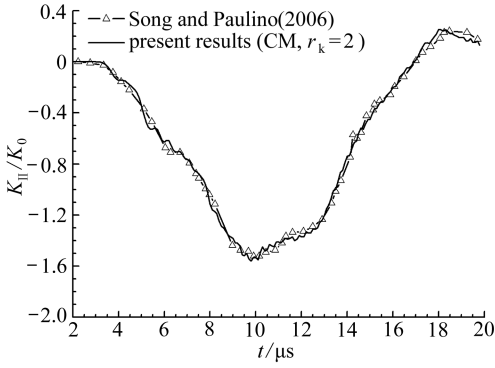
(b) Result by using lumping mass matrix

图 10 本文数值解  $K_I$  和文献结果 (Song and Paulino<sup>[20]</sup>, 2006) 的比较

Fig. 10 Comparisons of the present numerical results  $K_I$  and the reference solution by Song and Paulino<sup>[20]</sup> (2006)

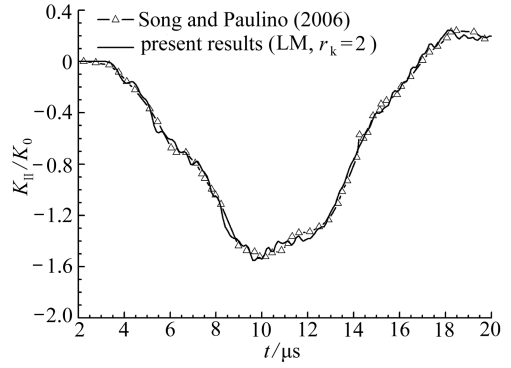
本算例为复合型裂纹问题, 将计算得到的 DSIFs 除以  $K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$  进行无量纲化处理, 如图 10、11 所示, 分别给出了采用一致质量矩阵和集中质量矩阵得到的  $K_I$  和  $K_{II}$  的数值解与文献 [20] 的结果进行比较, 均与文献结果吻合较好.





(a) 一致质量矩阵计算结果

(a) Result by using consistent mass matrix

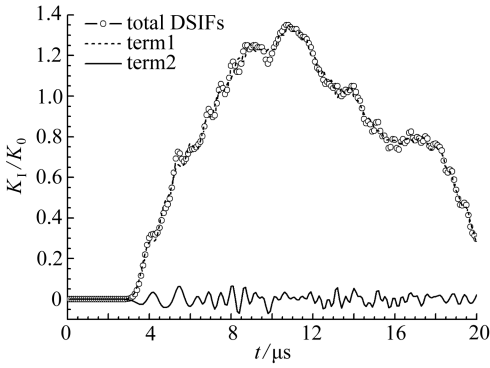


(b) 集中质量矩阵计算结果

(b) Result by using lumping mass matrix

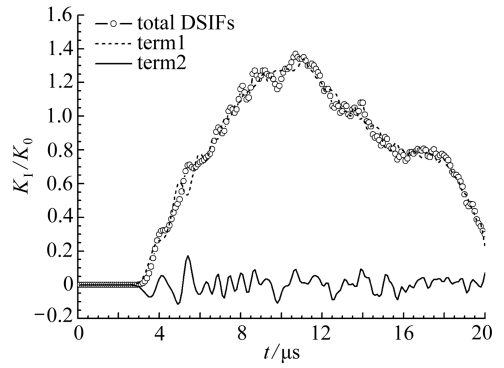
图 11 本文数值解  $K_{II}$  和文献结果(Song and Paulino<sup>[20]</sup>, 2006) 的比较

Fig. 11 Comparisons of the present numerical results  $K_{II}$  and the reference solution by Song and Paulino<sup>[20]</sup> (2006)



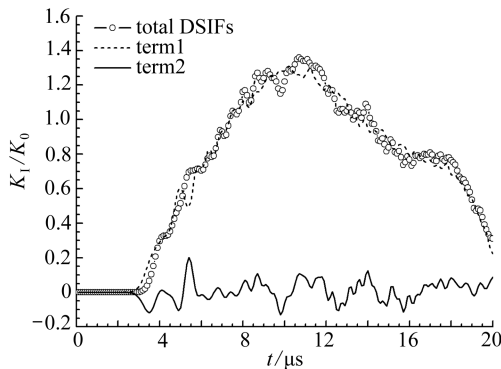
(a) 积分路径 1 ( $r_k = 2$ )

(a) Integration path 1 ( $r_k = 2$ )



(b) 积分路径 2 ( $r_k = 4$ )

(b) Integration path 2 ( $r_k = 4$ )



(c) 积分路径 3 ( $r_k = 6$ )

(c) Integration path 3 ( $r_k = 6$ )

图 12 不同积分路径下无量纲化  $K_I$  随时间的变化曲线

Fig. 12 Normalized  $K_I$  versus time curves with different contours

与算例 1、算例 2 类似,图 12、13 也给出了不同积分路径下 ( $r_k = 2, 4, 6$ ) DSIFs 随时间的变化曲线,也揭示了同样的规律。

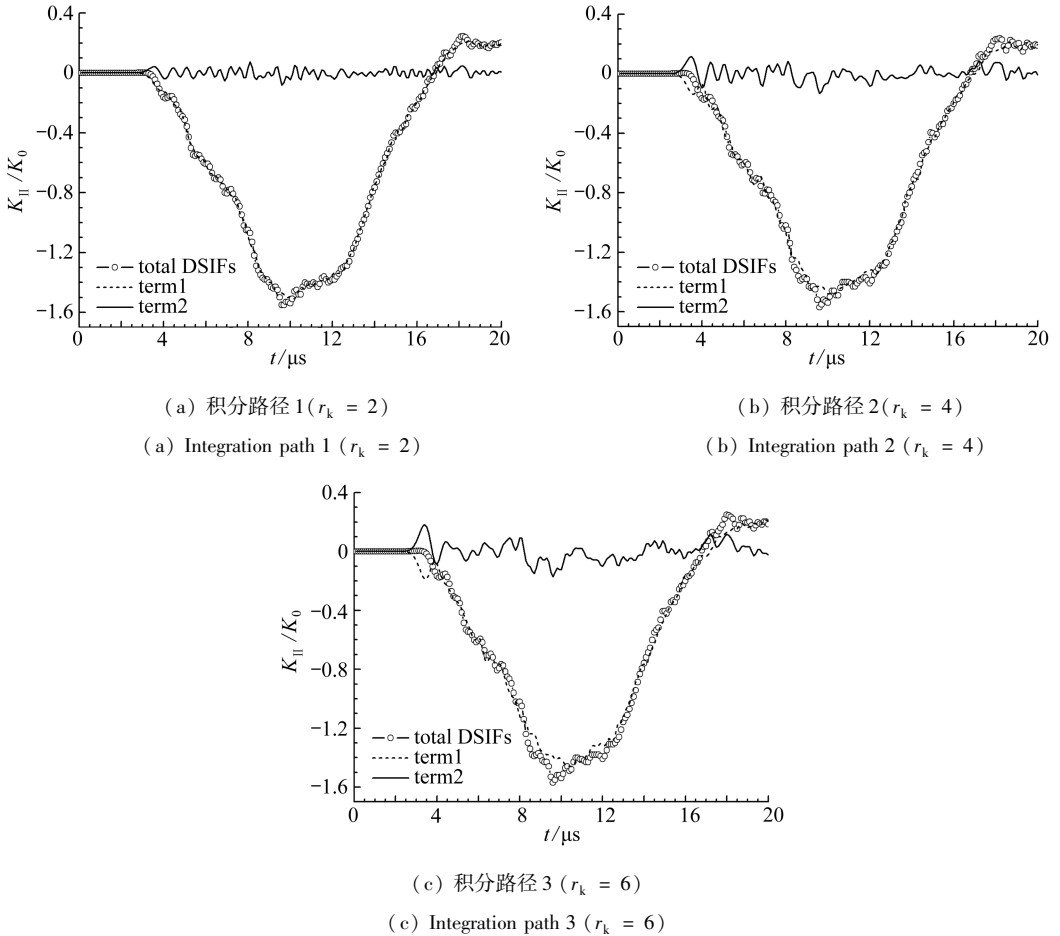


图 13 不同积分路径下无量纲化  $K_{II}$  随时间的变化曲线

Fig. 13 Normalized  $K_{II}$  versus time curves with different contours

## 4 结 论

对于外荷载随时间变化但裂纹是稳定的,此种情形的裂纹尖端渐进场与静态情形完全类似,静力 XFEM 裂尖改进函数仍然适用.根据 XFEM 的位移模式,推导了动力 XFEM 的支配方程,采用 Newmark 隐式动力学算法进行时间积分,并提出了一种 XFEM 质量矩阵的集中策略.与静态问题的相互作用积分方法相比,求解 DSIFs 的相互作用积分方法增加了惯性项的贡献.最后,若干典型算例的计算结果表明:XFEM 可以准确评价稳定裂纹尖端的 DSIFs,本文建议的集中质量矩阵也是十分有效的,为得到正确的 DSIFs,相互作用积分中惯性项的贡献不可忽略.

### 参考文献 (References):

- [1] 章青,刘宽,夏晓舟,杨静.广义扩展有限元法及其在裂纹扩展分析中的应用[J].计算力学学报,2012,29(3):427-432. (ZHANG Qing, LIU Kuan, XIA Xiao-Zhou, YANG Jing. Generalized extended finite element method and its application in crack growth analysis[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, 29(3): 427-432. (in Chinese))
- [2] 余天堂,万林林.非均质材料热传导问题的扩展有限元法[J].计算力学学报,2011,28(6):

- 884-890. (YU Tian-tang, WAN Lin-lin. Extended finite element method for heat transfer problems in heterogeneous material[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2011, **28**(6): 884-890. (in Chinese))
- [3] Belytschko T, Chen H, Xu J, Zi G. Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, **58**(12): 1873-1905.
- [4] Chen H. Enriched finite element methods and their applications[D]. Evanston, Illinois: Northwestern University, 2003.
- [5] Réthoré J, Gravouil A, Combescure A. An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using the extended finite element method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, **63**(5): 631-659.
- [6] Réthoré J, Gravouil A, Combescure A. A combined space-time extended finite element method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, **64**(2): 260-284.
- [7] Menouillard T, Belytschko T. Dynamic fracture with meshfree enriched XFEM[J]. *Acta Mechanica*, 2010, **213**(1/2): 53-69.
- [8] Menouillard T, Belytschko T. Smoothed nodal forces for improved dynamic crack propagation modeling in XFEM[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, **84**(1): 47-72.
- [9] Menouillard T, Song J H, Duan Q L, Belytschko T. Time dependent crack tip enrichment for dynamic crack propagation[J]. *International Journal of Fracture*, 2010, **162**(1/2): 33-49.
- [10] Menouillard T, Réthoré J, Combescure A, Bung H. Efficient explicit time stepping for the extended finite element method (X-FEM)[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, **68**(9): 911-939.
- [11] Menouillard T, Réthoré J, Moës N, Combescure A, Bung H. Mass lumping strategies for X-FEM explicit dynamics: application to crack propagation[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, **74**(3): 447-474.
- [12] Liu Z L, Menouillard T, Belytschko T. An XFEM/spectral element method for dynamic crack propagation[J]. *International Journal of Fracture*, 2011, **169**(2): 183-198.
- [13] Motamedi D, Mohammadi S. Dynamic analysis of fixed cracks in composites by the extended finite element method[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2010, **77**(17): 3373-3393.
- [14] 方修君, 金峰, 王进廷. 基于扩展有限元法的 Koyna 重力坝地震开裂过程模拟[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2008, **48**(12): 2065-2069. (FANG Xiu-jun, JIN Feng, WANG Jin-ting. Seismic fracture simulation of the Koyna gravity dam using an extended finite element method [J]. *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)*, 2008, **48**(12): 2065-2069. (in Chinese))
- [15] 王志勇, 马力, 吴林志, 于红军. 基于扩展有限元法的颗粒增强复合材料静态及动态断裂行为研究[J]. 固体力学学报, 2011, **32**(6): 566-573. (WANG Zhi-yong, MA Li, WU Lin-zhi, YU Hong-jun. Investigation of static and dynamic fracture behavior of particle-reinforced composite materials by the extended finite element method[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2011, **32**(6): 566-573. (in Chinese))
- [16] 庄茁, 柳占立, 成斌斌, 廖剑晖. 扩展有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012. (ZHUANG Zhuo, LIU Zhan-li, CHENG Bin-bin, LIAO Jian-hui. *Extended Finite Element Method*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2012. (in Chinese))
- [17] Zhuang Z, Cheng B B. Development of X-FEM methodology and study on mixed-mode crack

- propagation[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2011, **27**(3): 406-415.
- [18] 范天佑. 断裂动力学原理与应用[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2006: 10-12. (FANG Tian-you. *Fracture Dynamics: Principle and Application*[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2006: 10-12. (in Chinese))
- [19] Mohammadi S. *Extended Finite Element Method*[M]. Blackwell Publishing Ltd, 2008.
- [20] Song S H, Paulino G H. Dynamic stress intensity factors for homogeneous and smoothly heterogeneous materials using the interaction integral method[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, **43**(16): 4830-4866.
- [21] Freund L B. *Dynamic Fracture Mechanics*[M]. Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics, 1990.
- [22] Chen Y M. Numerical computation of dynamic stress intensity factors by a Lagrangian finite-difference method (the HEMP code)[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1975, **7**(4): 653-660.

## Evaluation on Stress Intensity Factors at the Crack Tip Under Dynamic Loads Using Extended Finite Element Methods

JIANG Shou-yan<sup>1,2</sup>, DU Cheng-bin<sup>2</sup>

- (1. *College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, P. R. China;*  
2. *College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 210098, P. R. China*)

**Abstract:** In the framework of the extended finite element methods (XFEM), the extraction of dynamic stress intensity factors (DSIFs) for stationary cracks being subjected to dynamic loads was detailedly studied. Having constructed the approximation of dynamic XFEM, the derivation of governing equation for dynamic XFEM was presented. The Newmark implicit algorithm was used for time integration. Meanwhile, a mass lumping strategy for XFEM implicit dynamics was proposed. In addition, the interaction integral method was given for evaluating DSIFs. Compared with the interaction integral method for evaluating stress intensity factors (SIFs) of cracks under static conditions, the contribution of inertial effects was added to the interaction integral method for evaluating DSIFs. The numerical illustrations show that the XFEM can evaluate accurately DSIFs and the proposed mass lumping strategy is also quite effective. To obtain DSIFs correctly, the inertial effects on interaction integral cannot be ignored.

**Key words:** extended finite element methods; dynamic loads; cracks; dynamic stress intensity factors; interaction integral