

基于裂纹尖端二阶弹性解的断裂过程区尺度*

段树金, 张彦龙, 安蕊梅

(石家庄铁道大学 土木工程学院, 石家庄 050043)

摘要: 基于 Westergaard 应力函数裂纹尖端二阶弹性解, 推导了裂纹尖端微裂区的轮廓线和特征尺寸的解析表达式; 采用幂函数模型描述的拉应变软化模型, 确定了在最大拉应力强度理论和最大拉应变强度理论下断裂过程区(FPZ)临界值的解析表达式; 将基于 Westergaard 应力函数一阶弹性解及二阶弹性解、Muskhelishvili 应力函数和 Duan-Nakagawa 模型确定的 FPZ 临界值进行了比较。结果表明裂纹尖端微裂区和 FPZ 临界值随着 Poisson 比的减小而增加并逐渐趋近于应用最大拉应力强度理论确定的结果; 二阶弹性解确定的裂纹尖端微裂区和 FPZ 临界值大于一阶弹性解的值; FPZ 临界值随着拉应变软化指数的增加而增加; 二阶弹性解确定的 FPZ 临界值的精度远高于二阶弹性解确定的值。

关键词: 混凝土; 断裂力学; 断裂过程区; 二阶弹性解

中图分类号: TU528.1; O346.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.06.006

引言

自 Kaplan^[1]于 1961 年将断裂力学引入到混凝土断裂的研究中以来, 有关这一领域的研究十分活跃, 并取得了大量的研究成果。各国研究者试图通过各种实验方法来测得断裂过程区(fracture process zone, FPZ)的尺寸, 如激光散斑法、声发射法^[2-3]、光弹性贴片法^[4]等, 但是都没有得到非常理想的结果。为了更好地研究混凝土的断裂行为, 不少研究者提出了各自的理论, 其中经典的理论有虚拟裂纹模型^[5]、钝裂纹带模型^[6]、Duan-Nakagawa 模型^[7-8]等。胡若邻等^[9]基于 Westergaard 应力函数和 Muskhelishvili 应力函数, 根据幂指数描述的拉应变软化模型, 确定了考虑应力松弛影响的 FPZ 临界值的解析表达式, 讨论了不同的破坏强度准则及材料参数对 FPZ 临界值的影响。但是他们仅仅是取了 Westergaard 应力函数展开式中的第一项, 这使得结果产生了较大的误差。

修正的 Mohr 强度理论考虑了混凝土类材料抗拉强度与抗压强度的差异, 但是对于双向拉伸 I 型裂纹问题(参照图 1), 裂纹尖端附近处于双向受拉(平面应力)或三向受拉(平面应变)状态, 最小主应力的值应取为 0, 即此种工况下修正的 Mohr 强度理论等效于最大拉应力强度理论。

* 收稿日期: 2013-04-22; 修订日期: 2013-04-28

基金项目: 河北省高等学校科学技术研究重点项目(ZH2012040)

作者简介: 段树金(1955—), 男, 河北人, 教授, 博士, 博士生导师(通讯作者。Tel: +86-311-87935546; E-mail: duanshujin@stdu.edu.cn)。

本文研究对象为如图 1 所示的无限大平板双向拉伸 I 型裂纹, 基于 Westergaard 二阶弹性解, 推导了最大拉应力和最大拉应变两种脆性破坏强度理论下, 裂纹尖端微裂区和 FPZ 临界值的解析表达式。

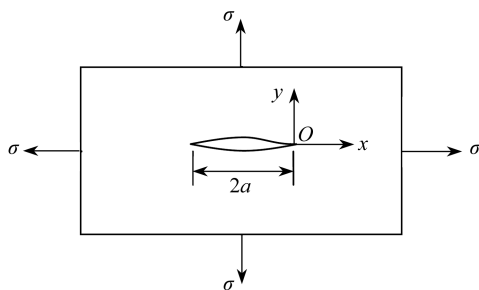


图 1 双向受拉无限大中心裂纹板

Fig. 1 Griffith crack problem

1 基于二阶弹性解确定微裂区及其特征尺寸的解析表达式

1.1 中心裂纹的二阶弹性解

将 Westergaard 应力函数

$$Z(z) = \frac{\sigma(z+a)}{\sqrt{(z+a)^2 - a^2}} \quad (1)$$

在裂纹尖端展开, 取其前两项^[10]

$$Z(z) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi z}} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{z}{a} \right) \right], \quad (2)$$

其中, K_I 是应力强度因子, $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$. 式(2) 对 z 求导得

$$Z' \Big|_{z \rightarrow 0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi z}} \left(\frac{3}{8a} - \frac{1}{2z} \right). \quad (3)$$

用 Westergaard 应力函数表示的应力分量为

$$\begin{cases} \sigma_x = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z', \\ \sigma_y = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z', \\ \tau_{xy} = -y \operatorname{Re} Z'. \end{cases} \quad (4)$$

将式(2)、(3)代入式(4)得

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{3K_I}{4a} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \\ \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{3K_I}{4a} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \\ \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} - \frac{3K_I}{4a} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}. \end{cases} \quad (5)$$

裂纹尖端的最大拉应力为

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} =$$

$$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3K_I}{4a} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \pm A, \quad (6)$$

其中

$$A = \sqrt{\left(\frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r}} \sin \theta\right)^2 + \left(\frac{3K_I}{8a} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \theta\right)^2} - \frac{3K_I^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{16a\pi}.$$

1.2 用最大拉应力强度理论确定微裂区及其特征尺寸

最大拉应力强度理论的表达式为

$$\sigma_1 = \sigma_u, \quad (7)$$

将式(6)代入式(7)得到基于二阶弹性解用最大拉应力强度理论确定的微裂区轮廓线的表达式为

$$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3K_I}{4a} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} + A = \sigma_u. \quad (8)$$

只有在轮廓线上, $\sigma_1 = \sigma_u$;而在轮廓线内的任一点都有 $\sigma_1 > \sigma_u$,所以将轮廓线内的区域定义为微裂区在概念上是清楚的,但由式(8)确定的微裂区比实际的微裂区小.当 $\theta = 0$ 时,由式(8)可得裂纹延长线上微裂区长度的临界值:

$$r_{02}' = \left(\sigma_u - \sqrt{\sigma_u^2 - \frac{3K_{lc}^2}{2a\pi}}\right)^2 \times \frac{8a^2\pi}{9K_{lc}^2}, \quad (9)$$

而基于一阶弹性解确定的临界值为

$$r_{01}' = \frac{K_{lc}^2}{2\pi\sigma_u^2}. \quad (10)$$

1.3 用最大拉应变强度理论确定微裂区及其特征尺寸

最大拉应变强度理论的表达式为

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_u = \sigma_u/E', \quad (11)$$

其中, $E' = E$ (平面应力), $E' = E/(1 - \nu^2)$ (平面应变), E 为弹性模量, ν 为 Poisson 比.

将式(6)代入式(11),可以得到基于二阶弹性解应用最大拉应变强度理论确定的微裂区轮廓线的表达式:

$$\left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3K_I}{4a} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2}\right) (1 - \nu) + (1 + \nu)A = \sigma_u \quad (\text{平面应力}), \quad (12)$$

$$\left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3K_I}{4a} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2}\right) (1 - \nu - 2\nu^2) + (1 + \nu)A = \sigma_u \quad (\text{平面应变}), \quad (13)$$

上式中, $\nu < 0.5$ 才有意义.当 $\theta = 0$ 时,由式(12)、(13)可得裂纹延长线上微裂区长度的临界值为

$$r_{02}'' = \left[\frac{\sigma_u}{1 - \nu'} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_u}{1 - \nu'}\right)^2 - \frac{3K_{lc}^2}{2a\pi}}\right]^2 \times \frac{8a^2\pi}{9K_{lc}^2}, \quad (14)$$

其中, $\nu' = \nu$ (平面应力), $\nu' = \nu + 2\nu^2$ (平面应变).

而基于一阶弹性解确定的临界值为

$$r_{01}'' = \frac{(1 - \nu')^2 K_{lc}^2}{2\pi\sigma_u^2}. \quad (15)$$

取断裂韧度 $K_{Ic} = 0.5 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$, 极限强度 $\sigma_u = 2.6 \text{ MPa}$, 初始裂纹 $a = 0.05 \text{ m}$. 基于二阶弹性解得到的微裂区轮廓 r 随 ν 的变化如图 2 所示. 从中可以看出 r 随着 ν 的减小而增大并趋近于由最大拉应力强度理论确定的 r . 基于一阶弹性解和二阶弹性解确定的裂纹延长线上的临界值 r_0 随着 ν 的变化如图 3 所示(图中 W_1 表示一阶弹性解, W_2 表示二阶弹性解), 图中 $\nu = 0$ 对应的 r_0 就是应用最大拉应力强度理论得到的 r_0 . 从中可以得出 r_0 随着 ν 的减小而增加, 并且基于二阶弹性解得到的 r_0 大于基于一阶弹性解得到的 r_0 .

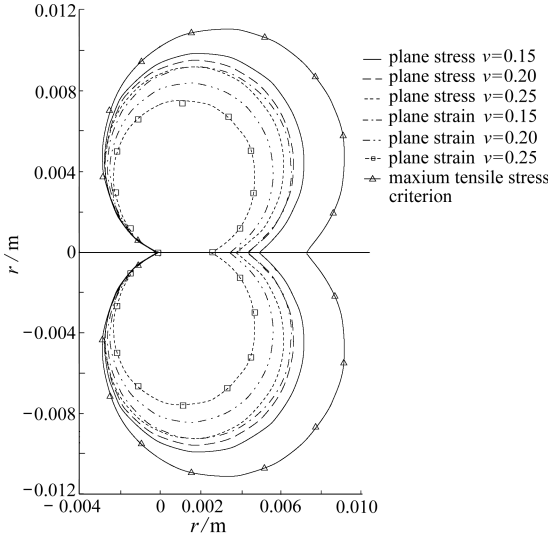


图 2 ν 对 r 的影响

Fig. 2 The influence of ν to r

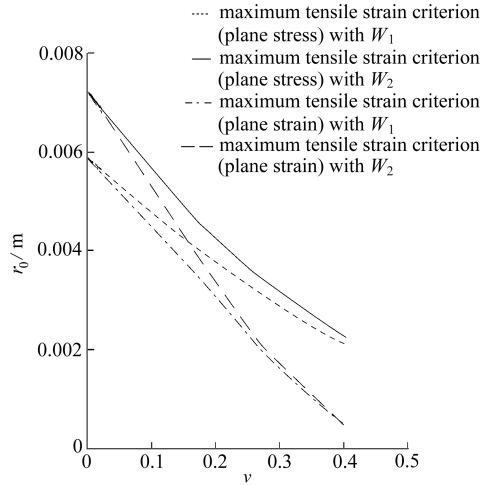


图 3 ν 对 r_0 的影响

Fig. 3 The influence of ν to r_0

2 基于二阶弹性解确定 FPZ 临界值

为了便于处理混凝土的断裂过程区出现的软化, 采用幂函数模型描述断裂过程区的应力应变关系. 与 Dugdale 模型^[11] 相仿, 根据合力等效(即面积相等)原则得^[9]

$$\int_0^{r_p} \sigma_u \left(\frac{r_p}{r} \right)^{n/(n-1)} dr = \int_0^{r_0} \sigma_y dr \quad (0 \leq n \leq 1), \quad (16)$$

这样就可以考虑裂纹尖端的应力松弛现象. 所得解是一个裂纹尖端附件的局部解, 但已通过积分消除了裂纹尖端应力场的奇异性, 断裂过程区沿裂纹延长线呈带状分布. 当 $\theta = 0$ 时, 将式(5)代入式(16)得

$$r_{pc2} = \frac{K_{Ic}}{(1-n)\sigma_u} \left(\sqrt{\frac{2r_{02}}{\pi}} + \frac{r_{02}^{3/2}}{2a\sqrt{2\pi}} \right), \quad (17)$$

将式(9)、(14)分别代入式(17)中, 可以得到基于二阶弹性解应用两种脆性破坏强度理论确定的 FPZ 临界值:

最大拉应力强度理论

$$r'_{pc2} = \frac{4a}{3(1-n)\sigma_u} \left\{ \left(\sigma_u - \sqrt{\sigma_u^2 - \frac{3K_{Ic}^2}{2a\pi}} \right) + \left(\sigma_u - \sqrt{\sigma_u^2 - \frac{3K_{Ic}^2}{2a\pi}} \right)^3 \times \frac{2a\pi}{9K_{Ic}^2} \right\}, \quad (18)$$

最大拉应变强度理论

$$r_{pc2}^{\sigma} = \frac{4a}{3(1-n)\sigma_u} \left\{ \left[\frac{\sigma_u}{1-\nu'} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_u}{1-\nu'}\right)^2 - \frac{3K_{lc}^2}{2a\pi}} \right] + \left[\frac{\sigma_u}{1-\nu'} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_u}{1-\nu'}\right)^2 - \frac{3K_{lc}^2}{2a\pi}} \right]^3 \times \frac{2a\pi}{9K_{lc}^2} \right\}. \quad (19)$$

基于一阶弹性解得到的 σ_y 的表达式为

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right], \quad (20)$$

当 $\theta = 0$ 时, 将式(20) 代入式(16) 中得到基于一阶弹性解确定的 r_{pc} :

$$r_{pc1} = \sqrt{\frac{2r_{01}}{\pi}} \frac{K_{lc}}{(1-n)\sigma_u}. \quad (21)$$

将式(10)、(15) 分别代入式(21), 可得基于一阶弹性解用两种脆性破坏强度理论确定的 FPZ 临界值:

最大拉应力强度理论

$$r_{pc1}^{\sigma} = \frac{K_{lc}^2}{\pi(1-n)\sigma_u^2}, \quad (22)$$

最大拉应变强度理论

$$r_{pc1}^{\epsilon} = \frac{(1-\nu')K_{lc}^2}{\pi(1-n)\sigma_u^2}. \quad (23)$$

基于一阶弹性解和二阶弹性解, 用最大拉应变强度理论确定的 r_{pc} 随 ν 的变化如图4所示, 其中 $\nu = 0$ 对应的 r_{pc} 就是用最大拉应力强度理论确定的 r_{pc} . 从图中可以得出 r_{pc} 随 ν 的减小而增加并且趋近于用最大拉应力强度理论确定的 r_{pc} ; 基于二阶弹性解确定的 r_{pc} 大于基于一阶弹性解确定的 r_{pc} .

用两种强度理论确定的 FPZ 临界值 r_{pc} 随软化指数 n 的变化如图5所示. 从中可以得出 r_{pc} 随着 n 的增加而增加; 基于二阶弹性解确定的 r_{pc} 大于基于一阶弹性解确定的 r_{pc} . 由两种强度理论所确定的曲线形状相近, 说明 n 对这两种强度理论所确定的 r_{pc} 的影响规律相近.

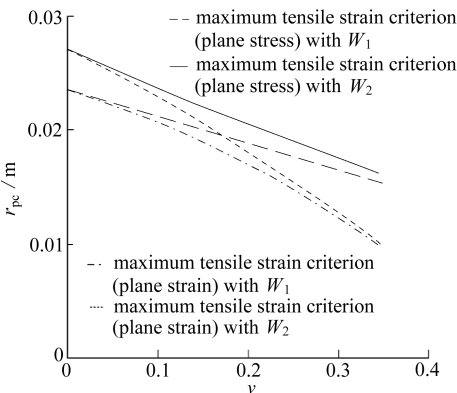


图4 ν 对 r_{pc} 的影响 ($n = 0.5$)

Fig. 4 The influence of ν to r_{pc} ($n = 0.5$)

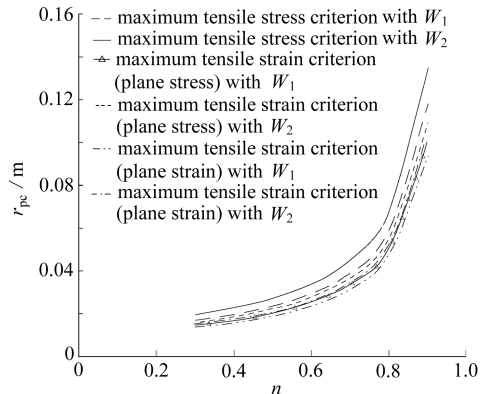


图5 n 对 r_{pc} 的影响 ($\nu = 0.15$)

Fig. 5 The influence of n to r_{pc} ($\nu = 0.15$)

3 基于各种应力函数确定 FPZ 临界值

取断裂韧度 $K_{Ic} = 0.5 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$, 极限强度 $\sigma_u = 2.6 \text{ MPa}$, 初始裂纹 $a = 0.05 \text{ m}$. 基于一阶弹性解、二阶弹性解、Muskhelishvili 应力函数和 Duan-Nakagawa 模型确定的 r_{pc} 如表 1 所示. 其中软化指数 $n = 0.75$, 对于 Duan-Nakagawa 模型, 权函数采用的是 $\rho(t) = 1/b$, ($0 \leq t \leq r_{pm}$).

从表 1 中可以看出基于不同应力函数确定的 r_{pc} 随 ν 的减小而增大. 基于二阶弹性解确定的 r_{pc} 与基于 Muskhelishvili 应力函数确定的精确解 r_{pc} 很接近, 误差在 0.43% 之内. 而基于一阶弹性解确定的 r_{pc} 的误差在 5% ~ 12.6% 之间. 当应用最大拉应力强度理论时, 由 Duan-Nakagawa 模型确定的 r_{pc} 与基于其它应力函数得到的 r_{pc} 基本上是相等的, 而当 ν 发生变化时所得到的结果不同是因为材料的属性发生了变化, 需要改变 Duan-Nakagawa 模型中的权函数. 即对于不用的材料, 应用 Duan-Nakagawa 模型时需要通过变换权函数来得到与实际更为吻合的结果.

表 1 各种应力函数确定的 r_{pc}
Table 1 r_{pc} by various stress functions

strength criterion	material parameter	W_2	W_1	Muskhelishvili stress function	Duan-Nakagawa model
maximum tensile stress criterion	—	0.054 1	0.047 1	0.053 9	0.053 8
	$\nu = 0.00$	0.054 1	0.047 1	0.053 9	0.053 8
maximum tensile strain criterion (plane stress)	$\nu = 0.15$	0.044 0	0.040 0	0.043 9	0.028 5
	$\nu = 0.20$	0.040 9	0.037 7	0.040 9	0.023 4
	$\nu = 0.25$	0.038 0	0.035 3	0.037 9	0.019 3
	$\nu = 0.00$	0.054 1	0.047 1	0.053 9	0.053 8
maximum tensile strain criterion (plane strain)	$\nu = 0.15$	0.041 2	0.037 9	0.041 2	0.023 9
	$\nu = 0.20$	0.036 2	0.033 9	0.036 2	0.017 1
	$\nu = 0.25$	0.030 9	0.029 4	0.030 9	0.011 7

4 结 论

本文首先基于二阶弹性局部解, 推导了在最大拉应力强度理论和最大拉应变强度理论下的裂纹尖端微裂区的轮廓线和特征尺寸的表达式, 然后采用幂函数模型描述的应变软化模型, 得出了在两种破坏强度理论下考虑混凝土应力松弛影响的 r_{pc} 的解析表达式, 最后将基于一阶弹性解、二阶弹性解、Muskhelishvili 应力函数和 Duan-Nakagawa 模型确定的 FPZ 临界值进行了比较. 结果表明:

1) 用最大拉应力强度理论或最大拉应变强度理论评估混凝土 I 型裂纹尖端的微裂区和 FPZ 的尺度是合理的.

2) 基于一阶弹性解得到的 r_{pc} 的误差在 5% ~ 12.6% 之间, 而基于二阶弹性解得到的 r_{pc} 的误差在 0.43% 之内, 说明基于二阶弹性解得到的 r_{pc} 具有足够的精度.

3) 当 $\nu < 0.5$ 时, 基于二阶弹性解用最大拉应变强度理论确定的 r_0 和 r_{pc} 随着 ν 的减小而增大, 且逐渐趋近于用最大拉应力强度理论确定的 r_0 和 r_{pc} ; 基于二阶弹性解得到的结果均大于基于一阶弹性解得到的结果.

4) 基于二阶弹性解用两种破坏强度理论得到的 r_{pc} 随着 n 的增大而增大.

5) 基于 Muskhelishvili 应力函数和 Duan-Nakagawa 模型得到的 r_{pc} 随着 ν 的减小而增加. 当软化指数 $n = 0.75$ 时, 由 Muskhelishvili 应力函数或 Westergaard 应力函数得到的 r_p 与基于 Du-

an-Nakagawa 模型权函数采用 $\rho(t) = 1/b$ 时得到的 r_p 基本相等,说明软化指数 n 与 Duan-Nakagawa 模型中的权函数之间存在某种关系。

参考文献(References):

- [1] Kaplan M F. Crack propagation and the fracture of concrete[J]. *Journal of ACI*, 1961, **58** (11):591-610.
- [2] Ohtsu M, Kaminaga Y, Munwam M C. Experimental and numerical crack analysis of mixed-mode failure in concrete by acoustic emission and boundary element method[J]. *Construction and Building Materials*, 1999, **13**(1): 57-64.
- [3] Landis E N. Micro-macro fracture relationship and acoustic emission in concrete[J]. *Construction and Building Materials*, 1999, **13**(2): 65-72.
- [4] 吴智敏, 赵国藩. 光弹贴片法研究混凝土在疲劳荷载作用下裂缝扩展过程[J]. 实验力学, 2000, **15**(3): 286-292. (WU Zhi-min, ZHAO Guo-fan. An investigation on crack propagation process in concrete under fatigue loading by means of photoelastic coating[J]. *Journal of Experimental Mechanics*, 2000, **15**(3): 286-292. (in Chinese))
- [5] Hillerborg A. Analysis of fracture by means of the fictitious crack model, particularly for fiber-reinforced concrete[J]. *Int J Cement Compos*, 1980, **2**(4):177-188.
- [6] Bazant Z P, Pang S D, Vorechovsky M. Energetic-statistical size influence simulated by SFEM with stratified sampling and crack band model[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, **71**(2): 1297-1320.
- [7] Duan S J, Nakagawa K. Stress functions with finite stress concentration at the crack tips for central cracked panel[J]. *Engng Fracture Mech*, 1988, **29**(5):517-526.
- [8] Zhu M, Chang W V. An unsymmetrical fracture process zone model and its application to the problem of radical crack with an inclusion in longitudinal shear deformation[C]//*Proceedings of FRAMCOS-3/Fracture Mechanics of Concrete Structures*. Freiburg, Germany, 1997:1097-1106.
- [9] 胡若邻, 黄培彦, 郑顺朝. 混凝土断裂过程区尺寸的理论推导[J]. 工程力学, 2010, **27**(6): 127-132. (HU Ruo-lin, HUANG Pei-yan, ZHENG Shun-zhao. Theoretical derivation of the size of fracture process zone of concrete[J]. *Engineering Mechanics*, 2010, **27**(6):127-132. (in Chinese))
- [10] Tada H, Paris P C. Secondary elastic crack tip stress which may influence very slow fatigue crack growth—additional results[J]. *International Journal of Fatigue*, 2005, **27**(10/12): 1307-1313.
- [11] Dugdale D S. Yielding of steel sheet containing slits[J]. *Journal of the Mechanics Physics of Solids*, 1960, **8**(2):100-104.

Fracture Process Zone Size Based on Secondary Elastic Crack Tip Stress Solution

DUAN Shu-jin, ZHANG Yan-long, AN Rui-mei

(*School of Civil Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, P. R. China*)

Abstract: The contour and characteristic sizes of a micro-crack zone ahead of a fracture process zone (FPZ) were derived by the local solution based on Westergaard stress function with the secondary elastic crack tip stress. The critical sizes of FPZ were yielded out by the use of a power exponent tensile strain softening model under the maximum tensile stress criterion and the maximum tensile strain criterion. Based on the first elastic crack tip stress expression and the secondary elastic crack tip stress expression by Westergaard stress function, Muskhelishvili stress function and Duan-Nakagawa model, the critical sizes of FPZ were compared. The discussions show that the size of a micro-crack zone and the critical size of FPZ increase with the decreasing Poisson ratio, and approach that of the maximum stress criterion. The contour and characteristic size of a micro-crack zone and the critical sizes of FPZ based on the secondary elastic crack tip stress solution are bigger than the one based on the first elastic crack tip stress solution. The critical size of FPZ increases with the increasing tensile strain softening index. The accuracy of critical size of FPZ based on the secondary elastic crack tip stress solution is much higher than the one based on the first elastic crack tip stress solution.

Key words: concrete; fracture mechanics; fracture process zone (FPZ); secondary elastic crack tip stress