

# 基于尺寸效应的无腹筋钢筋混凝土梁 的剪切强度公式\*

罗林<sup>1,2,3</sup>, 王启智<sup>3</sup>

- (1. 重庆交通大学 山区桥梁与隧道工程国家重点实验室培育基地,重庆 400074;  
2. 重庆交通大学 土木建筑学院,重庆 400074;  
3. 四川大学 土木工程系,成都 610065)

(周志祥推荐)

**摘要:** 取无腹筋钢筋混凝土梁的临界斜裂缝及其顶端横截面所截隔离体为研究对象,根据极限平衡法,建立平衡方程组,分析临界剪压区主应力与梁斜截面破坏形式的关系,并对临界剪压区进行应力分析,再应用 Bažant 提出的尺度律,得到同时适用于斜拉破坏和剪压破坏的无腹筋钢筋混凝土梁的剪切强度公式,其中,临界剪压区高度是该公式的未知参数.通过对 Bažant 试验数据库进行 Levenberg-Marguardt 非线性最小二乘曲线拟合,得到临界剪压区高度与各参数的幂指数关系.最后经与 Collins 试验数据库比较可知,相对于 ACI 318-08 和 GB 50010-2010 对应的剪切强度公式,所得的剪切强度公式能更好地与试验数据吻合,且和 Bažant 的剪切强度公式计算结果接近.

**关键词:** 无腹筋钢筋混凝土梁; 剪切强度; 极限平衡法; 尺寸效应; 临界剪压区高度; 应力分布

**中图分类号:** TU323.3; TU318+.1; O343.1      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.06.007

## 引 言

同弯曲破坏相比,钢筋混凝土梁的剪切破坏机理比较复杂,这也表现在各国设计规范中剪切强度公式的差异性上,特别是作为基础的无腹筋钢筋混凝土梁剪切强度公式,至今仍是国内外学者的研究热点.各国关于无腹筋钢筋混凝土梁剪切强度的设计规范多是根据试验数据分析得出经验或半经验公式.然而经验公式所依据的试验对象多是较小尺寸梁,对于工业和民用建筑以及特种结构中的大尺寸梁试验数据很少.同时考虑到经济和技术等多方面原因,也不可能进行大量大尺寸梁试验研究,因此纯经验公式是不尽合理的<sup>[1]</sup>.而无腹筋钢筋混凝土梁剪切强度理论方面,也至今仍没有定论,因此各种半经验公式所依赖的基本理论仍然缺乏.

随着上世纪 50 年代美国 Ohio 州空军仓库发生剪切失效破坏<sup>[1]</sup>,国外大量学者开始了许

\* 收稿日期: 2013-04-28

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(51179115);山区桥梁与隧道工程国家重点实验室培育基地开放基金资助项目(CQSLBF-Y13-12)

**作者简介:** 罗林(1985—),女,四川泸州人,讲师,博士(通讯作者. E-mail: 522411300@163.com);  
王启智(1946—),男,浙江嘉兴人,教授,博士生导师(E-mail: qzwang2004@163.com).

多关于梁剪切失效的试验研究和理论分析,在这 50 多年间,主要形成以下 5 种钢筋混凝土梁剪切破坏分析方法<sup>[2-3]</sup>:极限平衡法、桁架模型法、断裂力学法、统计分析法和非线性有限元分析法。其中,极限平衡法是对斜裂缝及其顶端垂直截面所得的隔离体进行受力分析,并在极限状态下建立平衡方程。相对于国外,国内对于钢筋混凝土梁剪切强度的研究起步较晚。施岚青<sup>[4]</sup>,高丹盈等<sup>[5]</sup>,陈文钦等<sup>[6]</sup>,卫纪德等<sup>[7-8]</sup>学者关于钢筋混凝土梁剪切强度的研究集中于上世纪七八十年代。支运芳等<sup>[9-10]</sup>通过一系列试验研究了纵筋率对钢筋混凝土梁剪切强度的影响。杨卓琦等<sup>[11]</sup>也通过对众多试验数据,采用数据过滤的方法研究纵筋率对钢筋混凝土梁剪切强度的影响。近年来,随着各国新规范的推出,文献[12]和[13]对比了各国规范中关于钢筋混凝土梁剪切强度的条款。

大量试验(如 Kani<sup>[14]</sup>,Shioya 等<sup>[15]</sup>,Bažant 和 Kazemi<sup>[16]</sup>,Collins 和 Kuchma<sup>[17]</sup>的工作)证实钢筋混凝土梁剪切强度具有尺寸效应,即随着有效高度  $d$  的增加剪切强度减小。日本土木工程师协会(JSCE)最先将尺寸效应写入规范,但采用  $d^{-1/4}$  的幂指数来表征尺寸效应并不恰当<sup>[1]</sup>。Bažant 和 Kim<sup>[18]</sup>认为剪切强度尺寸效应是由拱作用产生,得出经典的尺寸率公式。随后的著作又用能量释放率来解释梁剪切破坏的尺度律<sup>[19-20]</sup>,并得出凡准脆性材料破坏准则都应考虑尺寸效应的结论<sup>[21]</sup>。然而,美国混凝土规范<sup>[22]</sup>至今仍没有将尺度律写进相应条文,而另外一些国家规范<sup>[23-25]</sup>采用的剪切强度公式中考虑的尺度律和试验结果也有出入,如中国混凝土结构设计规范 GB50010-10<sup>[23]</sup>。

本文根据极限平衡法,取临界斜裂缝及其顶端垂直截面所截的隔离体为研究对象,对隔离体进行受力分析,并建立 3 个平衡方程。分析临界剪压区主应力与梁斜截面破坏形式的关系,得到临界剪压区的剪应力和弯曲压应力分布情况,再应用 Bažant 的尺度律,得到同时适用于斜拉破坏和剪压破坏的无腹筋钢筋混凝土梁的剪切强度公式。通过数据拟合,得到关于临界剪压区高度  $c_0$  和各参数的幂指数关系。最后,用 Collins 试验数据库验证可知:本文所得的公式和 Bažant 等<sup>[19-20]</sup>的剪切强度公式吻合,而其他公式<sup>[22-23]</sup>和试验结果数据差距较大。

## 1 计算模型

### 1.1 裂缝的形成及类型

在钢筋混凝土梁加载过程中,根据裂缝出现的先后顺序可分为<sup>[26]</sup>:腹剪斜裂缝、正裂缝、弯剪斜裂缝,分别如图 1(①②③)所示。一系列正裂缝出现以后,梁内内力重分布,图 1 所示  $x$  段内纵向钢筋和混凝土之间结合力不再均匀分布而局部放大。特别是在距最外条正裂缝一小段距离处结合力大约被放大了 3 倍<sup>[26]</sup>,因此斜裂缝开始于此。

进一步分析可知,在弯曲正应力和剪应力共同作用下弯剪斜裂缝沿着主压应力轨迹线斜向上发展直至破坏。同时,当裂缝宽度达到一定值时,梁底部保护层也由于销栓作用或开裂或剥落。而梁斜截面的最终剪切破坏类型由临界状态时钢筋混凝土梁临界剪压区高度内的剪应力和弯曲压应力组成的主拉应力或主压应力决定。总存在一个截面(如图 2 所示的截面  $AB$ ),当截面顶部混凝土达到临界压应变时,截面下缘主拉应力随即也达到混凝土抗拉强度;稍微施加荷载,斜裂缝便在主拉应力的作用下迅速扩展至集中荷载作用处而破坏,便是斜拉破坏,如图 1(a)所示。而当主压应力达到混凝土压缩强度时,混凝土梁顶面先挤压破坏然后向下和向集中荷载处发展,便是剪压破坏,如图 1(b)所示。前者属于脆性破坏,一旦加载到临界荷载就意味着破坏,也就是临界荷载和破坏荷载基本重合或相当接近;后者延性相对较好,加载到临界荷载还需进一步加载才到达破坏点。试验时为了研究梁斜截面破坏纵筋率都能得到保证,梁

剪切失效时纵筋一般没有屈服,因此本文仅讨论纵筋不屈服的情况。

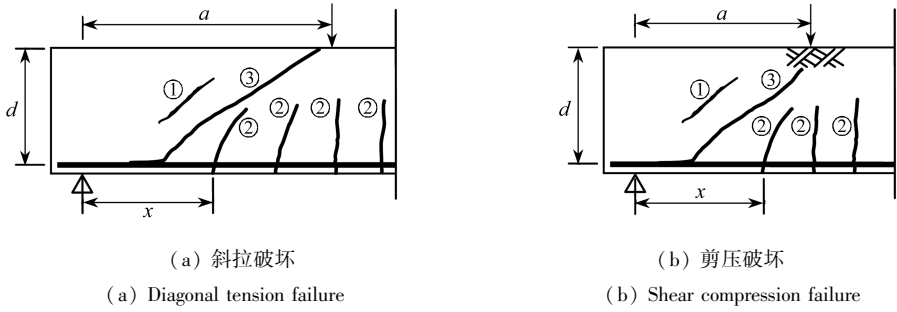


图1 钢筋混凝土梁剪切破坏形态及3种裂缝类型

(① 腹剪斜裂缝; ② 正裂缝; ③ 弯剪斜裂缝)

Fig.1 Shear-failure modes for reinforced concrete beams and three types of cracks

(① web-shear crack; ② flexural crack; ③ inclined-shear crack)

## 1.2 计算模型

影响无腹筋钢筋混凝土梁斜截面承载力有多个因素,如梁有效高度  $d$ 、剪跨比  $a/d$  ( $a$  为剪跨)、骨料尺寸  $d_a$ 、纵筋配筋率  $\rho$ 、混凝土圆柱体压缩强度  $f'_c$ 、荷载种类及加载条件等,且各因素之间相互影响,因此试验数据离散性大。图1为一根出现弯剪斜裂缝后的无腹筋梁,当达到临界状态时,取临界裂缝及其顶端垂直截面所截的左边隔离体为研究对象,见图2。此时整个截面  $ABC$  承受的剪力由以下几部分组成:未开裂混凝土传递的剪力  $V_{con}$ ;斜裂缝表面骨料机械咬合力  $V_a$  的垂直分力  $V_{ay}$ ;以及纵筋的销栓作用  $V_0$ 。Bažant<sup>[27]</sup>, Kotsovos 等<sup>[28]</sup>, Zarais 等<sup>[29]</sup>, Tureyen 等<sup>[30]</sup> 先后证明斜裂缝表面骨料机械咬合力的垂直分力  $V_{ay}$  很小,对抗剪承载力贡献不大,相应的骨料机械咬合力的水平分力  $V_{ax}$  也很小。因此受力分析可以简化成如图3所示,另假设斜裂缝割线和水平线的夹角  $\varphi$  为  $\pi/4$ <sup>[31]</sup>,建立3个平衡方程:

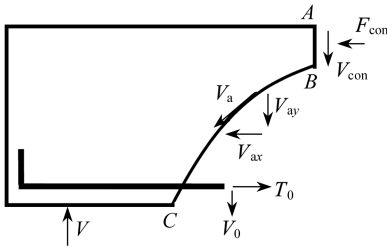


图2 梁剪切破坏隔离体及内力分布示意图

Fig.2 Shear failure body of beams and force distribution diagram

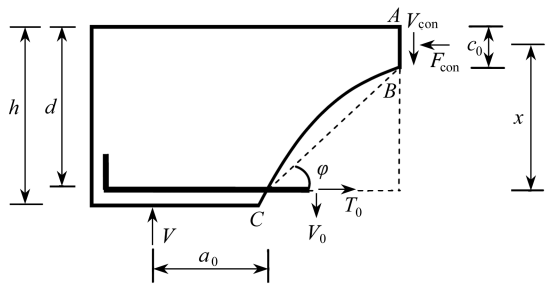


图3 梁剪切破坏隔离体及内力分布简图

Fig.3 Shear failure body of beams and force distribution diagram

$$T_0 = F_{con}, \quad (1)$$

$$V = V_0 + V_{con}, \quad (2)$$

$$F_{con} \cdot x = V_{con} \cdot (d - c_0) + V \cdot a_0, \quad (3)$$

其中,  $T_0$  为斜裂缝处纵筋拉力,  $F_{con}$  为临界剪压区压力,  $x$  为  $F_{con}$  到纵筋的距离,  $V$  为支座支承力(也是抗剪承载力),  $c_0$  为临界剪压区高度(本小节视为已知量,具体计算见第2节),  $a_0$  为支座到斜裂缝起裂点的距离<sup>[26]</sup>

$$a_0 = 3.3 \left( \frac{\rho(d/a)^2}{(1 - \sqrt{\rho})^2} \right)^{1/3} a.$$

但  $a_0$  的公式有一定适用范围, 由于文献[26] 数据拟合时并没有剪跨比  $a/d \leq 1$  的试验数据, 因此本文暂只研究剪跨比大于 1 的钢筋混凝土梁的剪切破坏。

类似于钢筋混凝土梁正截面设计, 将梁剪切破坏分为 3 个阶段. 在剪压区, 主拉应力和主压应力皆随弯矩或剪力增大而增大. 当梁最下边缘混凝土的主拉应力  $\sigma_1 \leq f_t$  ( $f_t$  为混凝土抗拉强度) 时, 梁截面尚未开裂, 称为弹性未裂阶段 (I 阶段). 随着弯矩或剪力增加, 梁下缘混凝土首先开裂, 并在剪力和弯矩的共同作用下, 斜裂缝沿着主压应力迹线斜向上发展. 在剪压区主拉应力的作用下, 斜裂缝继续扩展甚至发展至弯曲压应力作用区域, 称为开裂阶段 (II 阶段), 此时剪压区主压应力分布如图 4(a). 随着弯矩和剪力继续增加, 斜裂缝继续开展直至梁上缘混凝土压应变达到极限压应变, 即剪压区主压应力分布如图 4(b) 时, 称为破坏阶段 (III 阶段). 为了计算方便, 将图 4(b) 等效成图 4(c). 图 4 中剪压区主压应力分布与梁正截面设计中弯曲压应力分布有两点不同: 1. 图 4 中所示的应力为临界剪压区切应力和弯曲压应力组合的主压应力; 2. 图 4 图形只表示主压应力的大小, 不代表方向.

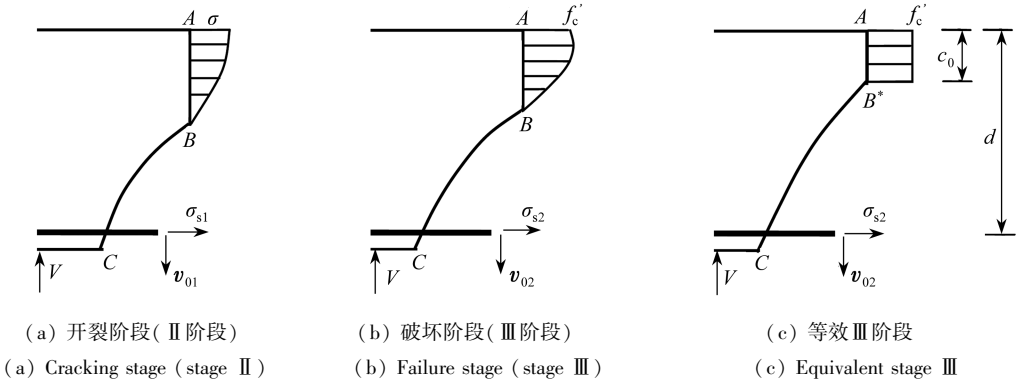


图 4 剪压区主压应力分布示意图

Fig. 4 Stress distribution diagrams for shear compression zone

根据混凝土本构关系以及临界剪压区混凝土压应变的线性关系, 可作两个假设: 假设最上缘混凝土的临界压应变  $\varepsilon_{cri}$  只由弯曲压应力产生; 假设临界状态时剪压区弯曲压应力  $\sigma$  沿临界剪压区高度  $c_0$  呈类抛物线分布, 则剪压区弯曲压应力  $\sigma$  沿高度  $c_0$  分布为<sup>[31]</sup>

$$\sigma = f'_c \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cri}} \right) - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cri}} \right)^2 \right], \quad (4)$$

其中,  $\varepsilon$  为剪压区任意点混凝土压应变. 则根据临界剪压区弯曲压应力的分布, 可知式(3) 中  $x$  为  $d - 3c_0/8$ .

由式(4) 沿临界剪压区高度  $c_0$  积分, 可得临界剪压区压力  $F_{con}$ :

$$F_{con} = b \int_0^{c_0} \sigma dc = \frac{2}{3} b c_0 f'_c, \quad (5)$$

其中,  $b$  为梁宽.

根据式(4) 并结合主压应力式及图 4(c), 可得临界剪压区切应力分布:

$$v_{con} = \sqrt{f'_c(f'_c - \sigma)} = f'_c \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cri}} \right). \quad (6)$$

同理, 由式(6) 沿  $c_0$  积分可得剪力  $V_{con}$ :

$$V_{\text{con}} = b \int_0^{c_0} v_{\text{con}} dc = \frac{1}{2} bc_0 f'_c. \quad (7)$$

将式(5)和(7)代入式(3),有

$$V = \frac{1}{12} bc_0 f'_c \frac{2d + 3c_0}{a_0}, \quad (8)$$

则剪切强度为

$$v = \frac{1}{12} \frac{c_0 f'_c}{d} \frac{2d + 3c_0}{a_0}. \quad (9)$$

### 1.3 尺寸效应

Bažant 得出名义强度具有  $(1 + d/d_0)^{-1/2}$  的能量尺度律<sup>[16,18-21]</sup>,并在小尺寸和大尺寸试样情况下分别逼近理想塑性理论和线弹性断裂力学的结果.引进 Bažant 的尺寸效应公式<sup>[19-20]</sup>:

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{1 + d/d_0}}, \quad (10)$$

其中,  $v_0$ ,  $d_0$  分别是量纲为强度和长度的参数,对于无腹筋钢筋混凝土梁剪切计算而言<sup>[19-20]</sup>,  $d_0 = 693.8 \sqrt{d_a} f'_c{}^{-2/3}$  mm.

式(9)是将临界剪压区主压应力等效成图4(c)的情况下解得.当梁有效高度  $d$  很小时,即  $\sqrt{1 + d/d_0} \rightarrow 1$  时,此时用塑性理论分析无腹筋钢筋混凝土梁临界剪压区主压应力分布状况恰好如图4(c).那么,式(9)便可以看成钢筋混凝土梁在小尺寸下的剪切强度,由式(9)和(10)可得

$$v_0 = \frac{1}{12} \frac{c_0 f'_c}{d} \frac{2d + 3c_0}{a_0}. \quad (11)$$

将式(11)代入式(10),另考虑前述几个假设以及未讨论因素对剪切强度计算的影响系数  $\xi$ , 有

$$v = \xi \frac{\frac{1}{12} \frac{c_0 f'_c}{d} \frac{2d + 3c_0}{a_0}}{\sqrt{1 + \frac{d}{d_0}}}, \quad (12)$$

则抗剪承载力为

$$V = \xi \frac{\frac{1}{12} c_0 f'_c b \frac{2d + 3c_0}{a_0}}{\sqrt{1 + \frac{d}{d_0}}}. \quad (13)$$

## 2 临界剪压区高度 $c_0$

分析可知影响临界剪压区高度的参数有混凝土圆柱体压缩强度  $f'_c$ 、配筋率  $\rho$ 、有效高度  $d$ 、剪跨比  $a/d$  等.如果将抗剪承载力  $V$  看成已知量,则由式(13)可解出  $c_0$  的表达式:

$$c_0 = -\frac{d}{3} + \sqrt{\left(\frac{d}{3}\right)^2 + \frac{4Va_0}{\xi f'_c b} \sqrt{1 + \frac{d}{d_0}}}. \quad (14)$$

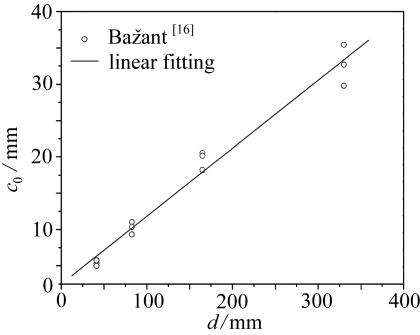
代入试验数据,式(14)中就只有两个未知量  $\xi$  和  $c_0$ ,但对应不同的  $\xi$  值有不同的  $c_0$  值.过去几十年,一些学者收集了关于剪切强度的大量试验数据,如文献[32],Bažant 等,Tureyen 和

Frosch, Reineck 等, Brown 等, Collins 等的文献[33-37]。此时,可以通过试验数据(这里采用 Bažant<sup>[33]</sup>收集的无腹筋梁的 466 个数据和 Bažant<sup>[16]</sup>的 12 个数据)曲线拟合,得到各参数与临界剪压区高度  $c_0$  的具体关系。为了不失一般性同时根据工程实践,可以假设平均临界剪压区高度  $c_0$  为  $0.2d^{[3]}$ , 此时对应  $\xi = 2.4$ 。假设混凝土圆柱体压缩强度  $f'_c$ 、配筋率  $\rho$ 、梁有效高度  $d$  以及剪跨比  $a/d$  和临界剪压区高度  $c_0$  有如下幂指数关系:

$$c_0 = P_1 f'_c{}^{P_2} \rho^{P_3} d^{P_4} \left(\frac{a}{d}\right)^{P_5}, \quad (15)$$

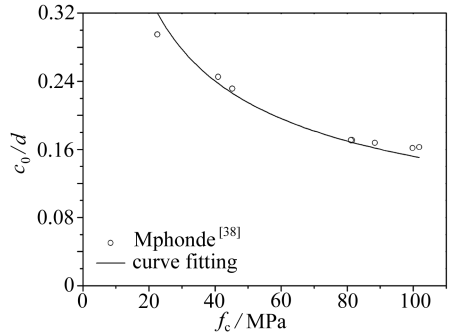
其中,  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  为 5 个待定参数。由于式(15)中,有多个变量对  $c_0$  有影响,因此拟合其中一个自变量与  $c_0$  的关系时,其它参数应为定值;在得到基本形式后,再用宽范围的数据来曲线拟合决定系数<sup>[19-20]</sup>。本文所有曲线拟合都采用 origin7.5 中的 Levenberg-Marguardt 非线性最小二乘曲线拟合。

首先,采用 1991 年 Bažant 和 Kazemi 试验数据来拟合梁有效高度  $d$  对  $c_0$  的影响<sup>[16]</sup>。该数据用于研究尺度律,因此只有  $d$  变化且变化范围广,其他量都保持常量。曲线拟合结果见图 5(a):  $P_4 = 1$ , 对应的相关系数为 0.987。



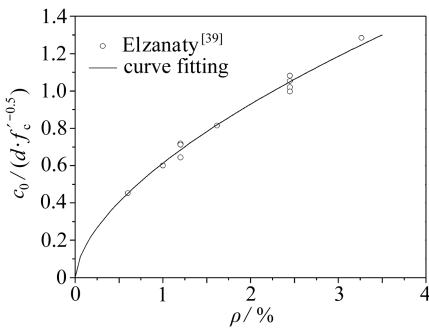
(a)  $d$  与  $c_0$  的关系

(a) Relationship between  $d$  and  $c_0$



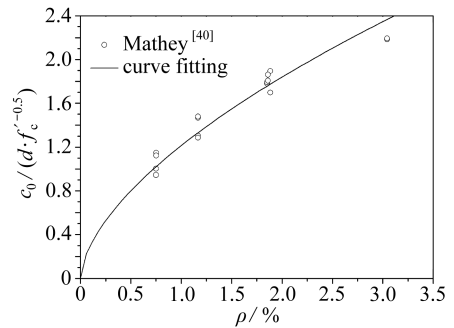
(b)  $f'_c$  与  $c_0$  的关系

(b) Relationship between  $f'_c$  and  $c_0$



(c)  $\rho$  与  $c_0$  的关系

(c) Relationship between  $\rho$  and  $c_0$



(d)  $\rho$  与  $c_0$  的关系

(d) Relationship between  $\rho$  and  $c_0$

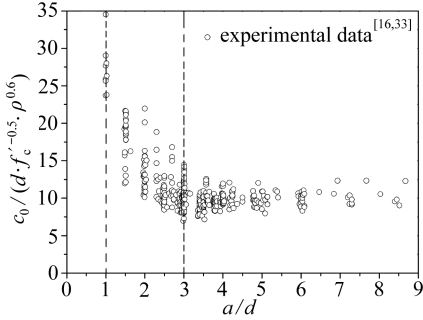
图 5 各参数与临界剪压区高度  $c_0$  的关系

Fig. 5 Relationships between the critical shear compression zone height  $c_0$  and parameters

拟合混凝土圆柱体压缩强度  $f'_c$  对  $c_0$  的影响时,应尽可能选择宽范围的数据,过窄不能对公式加以推广。采用 1984 年 Mphonde 和 Frantz<sup>[38]</sup>的试验数据,该组数据只有混凝土圆柱体压缩强度变化,其他参数为常数。又考虑到 ACI 规范<sup>[22]</sup>中采用幂指数为 1/2 来表征压缩强度对

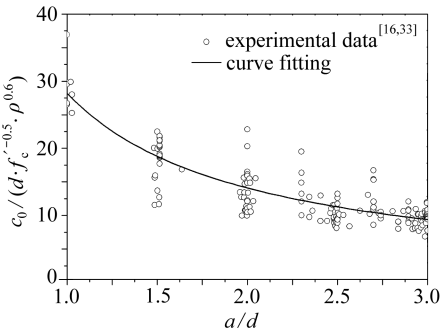
剪切强度的关系,因此,我们取圆柱体压缩强度 $f'_c$ 和 $c_0$ 的关系为 $-1/2$ 幂指数关系,曲线拟合结果见图5(b),相关系数为0.972。

同理,拟合纵筋率 $\rho$ 对 $c_0$ 的影响时,也应尽可能选择宽范围的数据。因此,采用Elzanaty和Nilson等<sup>[39]</sup>1986年试验数据和Mathey等<sup>[40]</sup>1963年试验数据来进行拟合。这里采用Bažant等文献<sup>[20]</sup>中所提及的纵筋率幂指数为0.6,曲线拟合结果见图5(c)和图5(d),数据拟合相关系数分别为0.992和0.975。



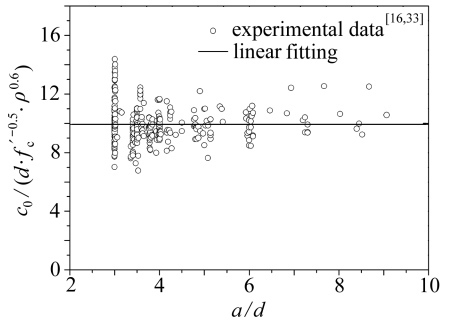
(a)  $a/d$  ( $a/d \geq 1$ ) 与  $c_0$  的关系

(a) Relationship between  $a/d$  ( $a/d \geq 1$ ) and  $c_0$



(b)  $a/d$  ( $1 \leq a/d < 3$ ) 与  $c_0$  的关系

(b) Relationship between  $a/d$  ( $1 \leq a/d < 3$ ) and  $c_0$



(c)  $a/d$  ( $a/d \geq 3$ ) 与  $c_0$  的关系

(c) Relationship between  $a/d$  ( $a/d \geq 3$ ) and  $c_0$

图6 剪跨比与临界剪压区高度 $c_0$ 的关系

Fig. 6 Relationship between the critical shear compression zone height  $c_0$  and the shear span ratio

定系数 $P_1$ ,可写成以下形式:

$$c_0 = \begin{cases} 30 f'_c{}^{-0.5} \rho^{0.6} d \left(\frac{a}{d}\right)^{-1}, & 1 \leq \frac{a}{d} < 3, \\ 10 f'_c{}^{-0.5} \rho^{0.6} d, & 3 \leq \frac{a}{d}. \end{cases} \quad (16)$$

在剪跨比等于3时,式(16)的两个表达式结果一致。

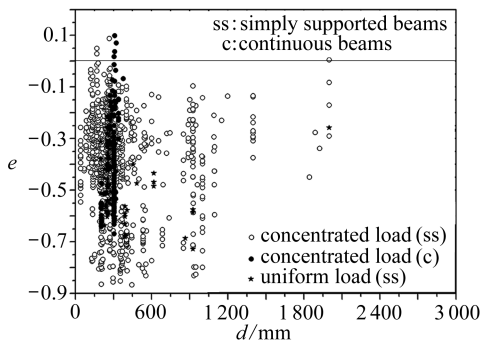
### 3 试验验证及比较

将式(16)代入式(12)和(13),当上述475个试验数据的保证率为99%时,计取系数有

图6(a)为剪跨比对临界剪压区高度 $c_0$ 的影响,共478个试验数据点;有3个数据剪跨比小于1,由于该范围的剪跨比不在本文考虑范围内,因此除去;图中可以看出剪跨比在1至3变化时(共149个试验数据点),对临界高度影响较大,大致呈成反比,见图6(b);而剪跨比大于3时(共326个试验数据点),变化却比较平稳,见图6(c)。这也和GB50010-2010<sup>[23]</sup>关于无腹筋钢筋混凝土梁抗剪公式中关于剪跨比对剪切强度的影响类似,特别是在剪跨比大于3时。

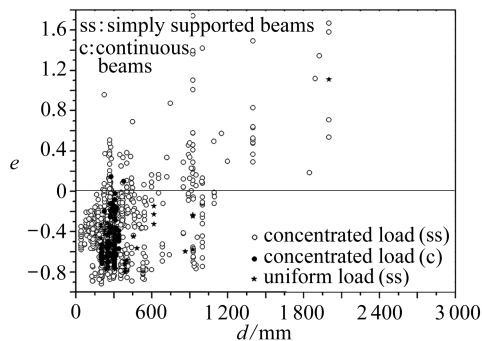
然后用该475个试验数据拟合式(15)的待

$$V = 0.145 \frac{c_0 f'_c b \frac{2d + 3c_0}{a_0}}{\sqrt{1 + \frac{d}{d_0}}} \quad (\text{N}). \quad (17)$$



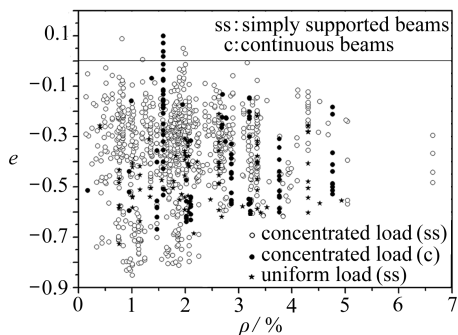
(a) 式(18)与高度  $d$  的关系

(a) Relationship between eq. (18) and  $d$



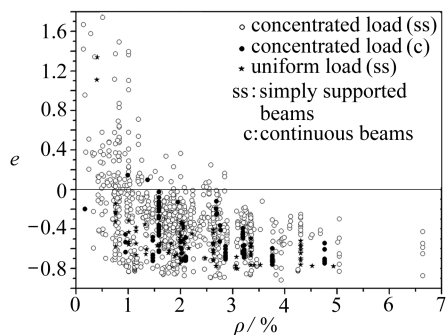
(a) 式(19)与高度  $d$  的关系

(a) Relationship between eq. (19) and  $d$



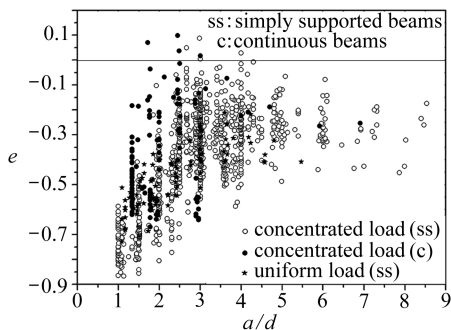
(b) 式(18)与配筋率  $\rho$  的关系

(b) Relationship between eq. (18) and  $\rho$



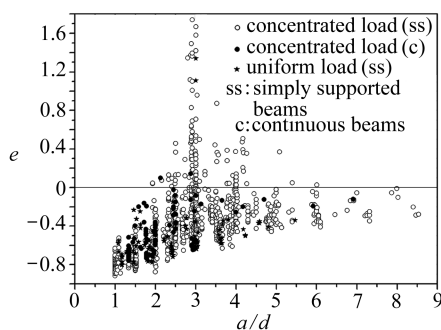
(b) 式(19)与配筋率  $\rho$  的关系

(b) Relationship between eq. (19) and  $\rho$



(c) 式(18)与剪跨比  $a/d$  的关系

(c) Relationship between eq. (18) and  $a/d$



(c) 式(19)与剪跨比  $a/d$  的关系

(c) Relationship between eq. (19) and  $a/d$

图7 式(18)与试验值<sup>[37]</sup>比较

Fig. 7 Comparison between formula (18) and test values<sup>[37]</sup>

图8 式(19)与试验值<sup>[37]</sup>比较

Fig. 8 Comparison between formula (19) and test values<sup>[37]</sup>



$$v = 0.145 \frac{c_0 f'_c \frac{2d + 3c_0}{d} a_0}{\sqrt{1 + \frac{d}{d_0}}} \text{ (MPa)}. \quad (18)$$

ACI 318-08<sup>[22]</sup>, Bažant 等的文献[19-20], GB50010-2010<sup>[23]</sup>对应的剪切强度公式分别为

$$v = \kappa \left( 0.158 \sqrt{f'_c} + 17.2 \rho \frac{V_u d}{M_u} \right) \leq 0.291 \kappa \sqrt{f'_c} \text{ (MPa)}, \quad (19)$$

$$v = 0.83 \rho^{3/8} \left( 1 + \frac{d}{a} \right) \sqrt{\frac{f'_c}{1 + d/d_0}} \text{ (MPa)}, \quad (20)$$

$$\begin{cases} \text{集中荷载: } v = \frac{1.75}{\lambda + 1} f_t \text{ (MPa)}, \\ \text{分布荷载: } v = 0.7 \beta_h f_t \text{ (MPa)}, \end{cases} \quad (21)$$

其中,  $\kappa$  为混凝土圆柱体压缩强度修正系数, 此处取 1;  $V_u$  为计算截面剪力;  $M_u$  为与所考虑截面的  $V_u$  同时存在的弯矩;  $\lambda$  为剪跨比  $a/d$ , 当  $\lambda < 1.5$  时, 取 1.5,  $\lambda > 3$  时, 取 3;  $f_t$  为混凝土拉伸强度,  $f_t = 0.393 f_c^{0.55}$ <sup>[41]</sup>;  $\beta_h$  为截面高度影响系数,  $\beta_h = (800/d)^{1/4}$  (当  $d < 800$  mm 时,  $d$  取 800 mm, 当  $d > 2000$  mm,  $d$  取 2000 mm)。

Collins 等<sup>[37]</sup>收集了 1 849 个钢筋混凝土梁剪切试验数据, 其中集中荷载简支梁(1 140 个)、集中荷载连续梁(129 个)和均布荷载简支梁(118 个)是本文重点分析的数据组。据前文所述, 本节暂且讨论剪跨比大于 1 的情况, 并除去试验报告中弯曲破坏部分。用于验证所得剪切强度公式的试验数据组可以分成以下几个数据组: 数据组 1, 集中荷载下剪切破坏的简支梁 ( $1 \leq \lambda < 3$ ) 455 个; 数据组 2, 集中荷载下剪切破坏的简支梁 ( $3 \leq \lambda$ ) 528 个; 数据组 3, 集中荷载下剪切破坏的连续梁 ( $1 \leq \lambda < 3$ ) 102 个; 数据组 4, 集中荷载下剪切破坏的连续梁 ( $3 \leq \lambda$ ) 8 个; 数据组 5, 均布荷载下剪切破坏的简支梁 ( $1 \leq \lambda < 3$ ) 64 个; 数据组 6, 均布荷载下剪切破坏的简支梁 ( $3 \leq \lambda$ ) 32 个。

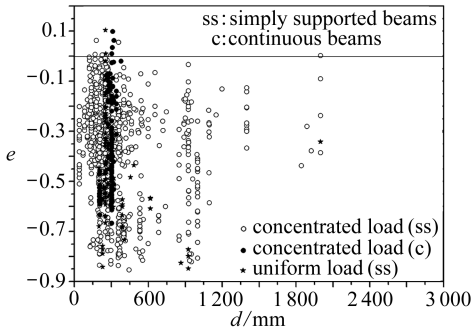
表 1 式(18)~式(21)的计算值与试验值<sup>[37]</sup>误差  $e$  分析

Table 1 Error analysis between formulae (18) ~ (21) and test values<sup>[37]</sup>

|                   | items    | $e_{\max}$ | $e_{\min}$ | $r_{\text{guarantee rate}} / \%$ | $e_{\text{mean}}$ | $e_{\text{standard deviation}}$ |
|-------------------|----------|------------|------------|----------------------------------|-------------------|---------------------------------|
| data 1 and data 2 | eq. (18) | 0.09       | -0.87      | 99.6                             | -0.38             | 0.185                           |
|                   | eq. (19) | 1.74       | -0.92      | 86.8                             | -                 | -                               |
|                   | eq. (20) | 0.06       | -0.85      | 99.4                             | -0.34             | 0.198                           |
|                   | eq. (21) | 2.64       | -0.83      | 71.1                             | -                 | -                               |
| data 3 and data 4 | eq. (18) | 0.10       | -0.67      | 96.4                             | -0.38             | 0.193                           |
|                   | eq. (19) | 0.14       | -0.76      | 98.2                             | -0.51             | 0.219                           |
|                   | eq. (20) | 0.10       | -0.67      | 96.7                             | -0.36             | 0.191                           |
|                   | eq. (21) | 0.78       | -0.55      | 79.1                             | -0.21             | 0.276                           |
| data 5 and data 6 | eq. (18) | -0.21      | -0.73      | 100                              | -0.46             | 0.116                           |
|                   | eq. (19) | 1.34       | -0.80      | 97.9                             | -0.53             | 0.295                           |
|                   | eq. (20) | 0.10       | -0.85      | 97.9                             | -0.45             | 0.191                           |
|                   | eq. (21) | 2.61       | -0.62      | 72.9                             | -                 | -                               |

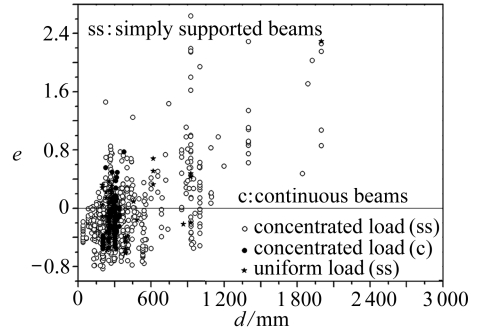
Note:  $e = (\text{calculated value} - \text{test value}) / \text{test value}$ ;

$$r_{\text{guarantee rate}} = [1 - \text{number}(e \geq 0) / \text{number}(e < 0)] \times 100\%.$$



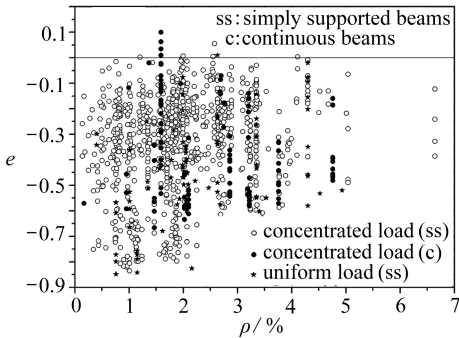
(a) 式(20)与高度  $d$  的关系

(a) Relationship between eq. (20) and  $d$



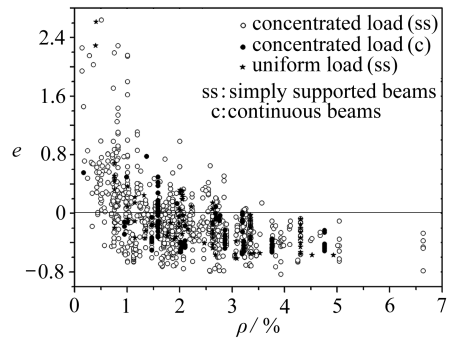
(a) 式(21)与高度  $d$  的关系

(a) Relationship between eq. (21) and  $d$



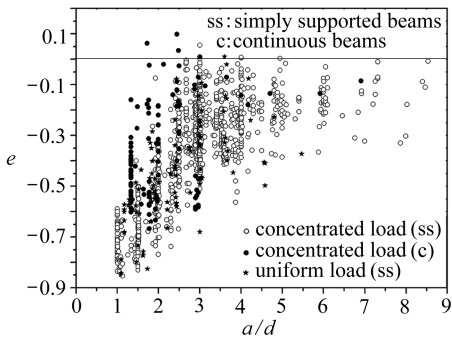
(b) 式(20)与配筋率  $\rho$  的关系

(b) Relationship between eq. (20) and  $\rho$



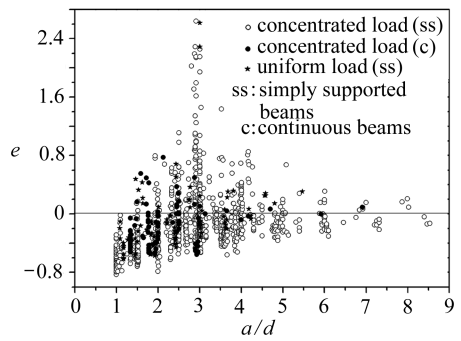
(b) 式(21)与配筋率  $\rho$  的关系

(b) Relationship between eq. (21) and  $\rho$



(c) 式(20)与剪跨比  $a/d$  的关系

(c) Relationship between eq. (20) and  $a/d$



(c) 式(21)与剪跨比  $a/d$  的关系

(c) Relationship between eq. (21) and  $a/d$

图9 式(20)与试验值<sup>[37]</sup>比较

Fig. 9 Comparison between formula (20) and test values<sup>[37]</sup>

图10 式(21)与试验值<sup>[37]</sup>比较

Fig. 10 Comparison between formula (21) and test values<sup>[37]</sup>

将式(18)、(19)、(20)、(21)和数据组1~6的对比结果分别见图7~图10。从图8可见,式(19)的误差  $e$  随着梁截面有效高度  $d$  的增加和纵筋率  $\rho$  的减小而增大,最主要原因在于式(19)没有考虑尺寸效应的影响。另外,式(19)中没有正确考虑纵筋率对剪切强度的影响也使误差  $e$  进一步增大。由图10可见,式(21)随着截面有效高度  $d$  的增加和纵筋率  $\rho$  的减小也偏于不安全,主要原因在于没有考虑尺寸效应(集中荷载作用时)或者说没有正确考虑尺寸效应(均布荷载作用时)。另外,没有考虑纵筋率对剪切强度的影响,以及混凝土抗拉强度是由近似

公式计算而来,使得式(21)误差 $e$ 偏大,式(18)、式(20)和试验数据比较吻合,具体分别见图7和图9以及表1.从图7和图9可以看出,式(18)和(20)的误差在各参数(梁截面有效高度 $d$ ,纵筋率 $\rho$ 和剪跨比 $a/d$ )的整个变化范围内分布较均匀.

## 4 结论与展望

1) 取临界裂缝及其顶端垂直截面所截的隔离体为研究对象(如图2所示),建立极限平衡模型.分析临界剪压区主应力与梁斜截面破坏形式的关系,并借鉴钢筋混凝土梁正截面设计思想,得出临界剪压区的剪应力和弯曲压应力的分布,初步得出无腹筋钢筋混凝土梁的剪切强度式(9).

2) 通过对Bažant<sup>[16,32]</sup>收集的475个试验数据进行Levenberg-Marguardt非线性最小二乘曲线拟合,得到临界剪压区高度 $c_0$ 与各参数的幂指数关系式(16).

3) 得到基于Bažant尺寸效应的无腹筋钢筋混凝土梁的剪切强度公式(18),该公式对斜拉破坏和剪压破坏皆适用.

4) 将所得剪切强度公式(18)与ACI 318-08剪切强度式(19),Bažant剪切强度式(20),GB50010-10剪切强度公式(21)相比较.由图7~图10可知:本文提出的公式(18)较ACI318-08<sup>[22]</sup>对应的剪切强度公式(19),GB50010-2010<sup>[23]</sup>对应的剪切强度公式(21)而言和试验数据吻合更好,而且与Bažant<sup>[19-20]</sup>对应的剪切强度式(20)计算结果相近,具体可见表1.

5) 如有裂缝起始位置 $a_0$ 、斜裂缝与水平线夹角 $\varphi$ 、临界剪压区高度 $c_0$ 等的更精确公式,那么式(18)的计算精度将有望进一步提高.

## 参考文献(References):

- [1] Bažant Z P, Yu Q, Gerstle W, Hanson J, Ju J W. Justification of ACI 446 proposal for updating ACI code provisions for shear design of reinforced concrete beams[J]. *Structural Journal*, 2007, **104**(5): 601-610.
- [2] 管品武, 徐泽晶, 王博. 钢筋混凝土构件抗剪承载力分析方法比较[J]. 世界地震工程, 2002, **18**(3): 95-101. (GUAN Pin-wu, XU Ze-jing, WANG Bo. Shear capacity analysis methods on RC members[J]. *World Earthquake Engineering*, 2002, **18**(3): 95-101. (in Chinese))
- [3] Gastbled O J, May I M. Fracture mechanics model applied to shear failure of reinforced concrete beams without stirrups[J]. *Structural Journal*, 2001, **98**(2): 184-190.
- [4] 施岚青. 钢筋混凝土构件抗剪能力计算的几点建议[J]. 清华大学学报(自然科学版), 1973, **16**(1): 54-83. (SHI Lan-qing. Several suggestions for reinforced concrete members' shear capacity calculation[J]. *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)*, 1973, **16**(1): 54-83. (in Chinese))
- [5] 高丹盈, 刘建秀, 李宗坤. 钢筋纤维混凝土梁斜截面抗剪强度的理论模式[J]. 工程力学, 1984, **11**(2): 130-137. (GAO Dan-ying, LIU Jian-xiu, LI Zhong-kun. Theoretical model on shear strength of reinforced fiber concrete beams[J]. *Engineering Mechanics*, 1984, **11**(2): 130-137. (in Chinese))
- [6] 陈文钦, 牛绍仁, 秦文钺. 集中荷载下钢筋混凝土约束梁抗剪强度的试验研究[J]. 重庆建筑工程学院学报, 1984(3): 57-84. (CHEN Wen-qin, NIU Shao-ren, QIN Wen-yue. Research on shear strength of reinforced concrete restrained beams under centralized load[J]. *Journal of Construction Engineering College*, 1984(3): 57-84. (in Chinese))
- [7] 卫纪德. 连续构件受剪性能研究之一: 集中荷载作用下有腹筋约束梁的受剪强度[J]. 哈尔滨建

- 筑工程学院学报, 1985(3): 16-31. (WEI Ji-de. Research of shear behavior of continuous members (1) the shear strength of beams with overhangs and web reinforcement under concentrated loads [J]. *Journal of Harbin University of Civil Engineering and Architecture*, 1985(3): 16-31. (in Chinese))
- [8] 卫纪德, 付有仓, 关波, 朱聘儒. 集中荷载作用下钢筋混凝土伸臂梁、连续梁的抗剪强度[J]. 哈尔滨建筑工程学院学报, 1987(2): 43-54. (WEI Ji-de, FU You-cang, GUAN Bo, ZHU Pin-ru. Shear strength of reinforced concrete cantilever beams and continuous beams subject to concentrated loads [J]. *Journal of Harbin University of Civil Engineering and Architecture*, 1987(2): 43-54. (in Chinese))
- [9] 支运芳, 蒋超, 甘民, 陈永庆. 纵筋率对有腹筋约束梁受剪性能影响的研究[J]. 重庆建筑大学学报, 2003, 27(4): 64-69. (ZHI Yun-fang, JIANG Chao, GAN Min, CHEN Yong-qing. Study on effect of longitudinal reinforcement ratio on shear behavior of restrained beams with web reinforcement [J]. *Journal of Chongqing Jianzhu University*, 2003, 27(4): 64-69. (in Chinese))
- [10] 李立仁, 蒋传星, 支运芳. 纵筋率对无腹筋约束梁抗剪性能影响的研究[J]. 重庆建筑大学学报, 2008, 30(1): 49-53. (LI Li-ren, JIANG Chuan-xing, ZHI Yun-fang. Effect of longitudinal reinforcement rate on shear behavior of beams without web reinforcement restriction [J]. *Journal of Chongqing Jianzhu University*, 2008, 30(1): 49-53. (in Chinese))
- [11] 杨卓琦, 罗林, 王启智. 纵筋率对钢筋混凝土梁剪切强度的影响[J]. 工业建筑, 2010, 40(9): 88-91. (YANG Zhuo-qi, LUO Lin, WANG Qi-zhi. Effect of longitudinal reinforcement ratio on shear strength of reinforced concrete beams [J]. *Industrial Construction*, 2010, 40(9): 88-91. (in Chinese))
- [12] 魏巍巍, 贡金鑫, 田磊. 钢筋混凝土构件受剪承载力对比分析[J]. 建筑科学与工程学报, 2010, 27(2): 25-37. (WEI Wei-wei, GONG Jin-xin, TIAN Lei. Comparative analysis of shear capacity for reinforced concrete members [J]. *Journal of Architecture and Civil Engineering*, 2010, 27(2): 25-37. (in Chinese))
- [13] 于磊, 车轶, 宋玉普. 若干规范无腹筋梁受剪承载力公式比较[J]. 水利水电科技进展, 2010, 30(4): 90-94. (YU Lei, CHE Yi, SONG Yu-pu. Comparison among shear design formulae in different codes for beams without web reinforcement [J]. *Advances in Science and Technology of Water Resources*, 2010, 30(4): 90-94. (in Chinese))
- [14] Kani G N J. How safe are our large reinforced concrete beams? [J]. *ACI Journal*, 1967, 64(3): 128-141.
- [15] Shioya T, Iguro M, Nojiri Y, Akiyama H, Okada T. Shear strength of large reinforced beams [C]//Li V C, Bažant Z P, eds. *Fracture Mechanics: Application to Concrete*, SP-118. American Concrete Institute, Farmington Hills, Mich, 1989: 259-279.
- [16] Bažant Z P, Kazemi M T. Size effect of diagonal shear failure of beams without stirrups [J]. *ACI Structural Journal*, 1991, 88(3): 268-276.
- [17] Collins M P, Kuchma D. How safe are our large, slightly reinforced concrete beams, slabs, and footings? [J]. *ACI Structural Journal*, 1999, 96(4): 482-490.
- [18] Bažant Z P, Kim J K. Size effect in shear failure of longitudinally reinforced concrete beams [J]. *ACI Journal*, 1984, 64(3): 128-141.
- [19] Bažant Z P, Yu Q. Design against size effect on shear strength of reinforced concrete beams without stirrups—I: formulation [J]. *ACI Structural Journal*, 2005, 131(12): 1877-1885.
- [20] Bažant Z P, Yu Q. Design against size effect on shear strength of reinforced concrete beams

- without stirrups—II: verification and calibration [J]. *ACI Structural Journal*, 2005, **131**(12): 1886-1897.
- [21] Bažant Z P, Chen E P. Scaling of structural failure [J]. *Applied Mechanics Reviews ASME*, 1997, **50**(10): 593-627.
- [22] ACI Committee 318. Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-08) and Commentary [S]. American Concrete Institute 318, Farmington Hills, Mich, 2008: 155-159.
- [23] 中华人民共和国住房和城乡建设部. GB50010-2010 混凝土结构设计规范 [S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010. (Ministry of Housing and Urban-Rural Development of the People's Republic of China. GB50010-2010 Code for Design of Concrete Structures [S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2010. (in Chinese))
- [24] CSA Committee A23.3. CSA A23.3-04 Design of Concrete Structures [S]. Mississauga: Canadian Standards Association, 2004.
- [25] EN 1992-1-1 Euro code 2: Design of Concrete Structures—Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings [S]. London: Communities and Local Government Publications, 2004.
- [26] Kim W, White R N. Initiation of shear cracking in reinforced concrete beams with no web reinforcement [J]. *ACI Structural Journal*, 1991, **88**(3): 301-308.
- [27] Bažant Z P. Fracturing truss model: size effect in shear failure of reinforced concrete [J]. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1997, **123**(12): 1276-1288.
- [28] Kotsovos M D, Pavlovic M N. *Ultimate Limit-State Design of Concrete Structures: a New Approach* [M]. London: Thomas Telford, 1998: 208.
- [29] Zarais P D, Papadakis G C. Diagonal shear failure and size effect in RC beams without web reinforcement [J]. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 2001, **127**(7): 733-742.
- [30] Tureyen A K, Frosch R J. Concrete shear strength another perspective [J]. *ACI Structural Journal*, 2003, **100**(5): 609-615.
- [31] Choi K K, Park H G, Wight J K. Unified shear strength model for reinforced concrete beams—part I: development [J]. *ACI Structural Journal*, 2007, **104**(2): 142-152.
- [32] ACI-ASCE Committee 326. Shear and diagonal tension [J]. *ACI Journal Proceedings*, 1962, **59**(2): 277-334.
- [33] Bažant Z P, Hsu-Huei Sun. Size effect in diagonal shear failure: influence of aggregate size and stirrups [J]. *ACI Material Journal*, 1987, **84**(4): 259-272.
- [34] Tureyen A K, Frosch R J. Shear tests of FRP-reinforced concrete beams without stirrups [J]. *ACI Structural Journal*, 2002, **99**(4): 427-434.
- [35] Reineck K H, Kuchma D A, Kim K S, Marx S. Shear database for reinforced concrete members without shear reinforcement [J]. *ACI Structural Journal*, 2003, **100**(2): 240-249.
- [36] Brown M D, Bayrak O, Jirsa J O. Design for shear based on loading conditions [J]. *ACI Structural Journal*, 2006, **103**(4): 541-550.
- [37] Collins M P, Bentz E C, Sherwood E G. Where is shear reinforcement required? review of research results and design procedures [J]. *ACI Structural Journal*, 2008, **105**(5): 590-600.
- [38] Mphonde A G, Frantz G C. Shear tests of high- and low-strength concrete beams without stirrups [J]. *ACI Journal Proceedings*, 1984, **81**(3): 350-357.
- [39] Elzanaty A H, Nilson A H, Slate F O. Shear capacity of reinforced concrete beams using high-strength concrete [J]. *ACI Journal Proceedings*, 1986, **83**(2): 290-296.
- [40] Mathey R G, Watstein D. Shear strength of beams without web reinforcement containing deformed bars of different yield strengths [J]. *ACI Journal Proceedings*, 1963, **60**(2): 183-208.

- [41] 贡金鑫, 魏巍巍, 胡家顺. 中美欧混凝土结构设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2007. (GONG Jin-xin, WEI Wei-wei, HU Jia-shun. *Design of Concrete Structure Based on Chinese, American and European Codes* [M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2007. (in Chinese))

## Shear Strength Formula for Reinforced Concrete Beams Without Web Reinforcements Against Size Effect

LUO Lin<sup>1,2,3</sup>, WANG Qi-zhi<sup>3</sup>

- (1. *State Key Laboratory Breeding Base of Mountain Bridge & Tunnel Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P. R. China;*
2. *School of Civil Engineering & Architecture, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P. R. China;*
3. *Department of Civil Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, P. R. China)*

**Abstract:** Based on the limit equilibrium method, equilibrium equations were established by studying the free body composed of the critical inclined crack and the top cross-section from reinforced concrete beams without web reinforcements. Analyzing the relationships between principal stresses of the critical shear compression zone and damage forms, stress analysis of the critical shear compression zone was done. Then by applying Bažant's size effect law, a shear strength formula of reinforced concrete beams without stirrups for both diagonal tension failure and shear compression failure was obtained, where the critical shear compression zone height was the unknown parameter. And then by Levenberg-Marguardt nonlinear least-square curve fitting on Bažant's test database, exponential relationship between the height of the critical shear compression zone and parameters was gotten. Finally, comparison with Collins' test database shows that the obtained shear strength formula can be demonstrated to agree more favorably with the test database than those from ACI 318-08 and GB 50010-2010, and close with Bažant's shear strength formula.

**Key words:** reinforced concrete beams without web reinforcements; shear strength; limit equilibrium method; size effect; critical shear compression zone height; stress distribution