

基于曲率插值的大变形梁单元*

张志刚¹, 齐朝晖¹, 吴志刚^{1,2}

(1. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116023;

2. 大连理工大学 航空航天学院, 辽宁 大连 116023)

摘要: 线性梁单元的形函数在单元大转动时会引起虚假应变, 不适用于几何非线性分析. 传统的几何非线性梁单元由于位移插值和转角插值的相干性, 常常引起剪切闭锁等问题. 该文提出了一种平面大变形梁单元, 通过单元域内的曲率插值以及曲率与节点位移之间的函数关系, 将单元节点力和节点位移表示为节点曲率的函数. 由于曲率插值本质上是对梁的应变进行插值, 保证了单元任意刚体运动不会产生虚假的节点力; 且将梁的截面形心位移表示为曲率的函数, 避免了传统单元中的剪切闭锁问题. 因而所提方法特别适用于梁的几何非线性分析. 数值算例说明了所提方法的正确性和有效性.

关键词: 曲率插值; 几何非线性; 平面梁单元; 大变形

中图分类号: O342 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.06.008

引 言

梁的几何非线性问题一直是土木、机械及航空航天等领域的一个热点和难点^[1-2]. 处理几何非线性问题的传统方法是补充应变位移关系的二阶项, 然后用全量 Lagrange 或更新 Lagrange 方法进行求解. 这些方法的有效性不仅仅与相关非线性方程的求解相关, 还依赖于单元域内物理量的离散方式.

被广泛采用的 Euler 梁理论是通过刚性截面假设使梁的模型从三维降为一维. 为了描述截面的刚体转动需要在梁形心线上每一点定义一个转动矩阵. 因此, 梁的位移场离散一般涉及转动场的离散. 当截面转动不能看作小量时, 转动场的离散将导致最终的节点力表达式非常复杂. 另一种梁的几何非线性分析方法是对线性梁理论做适当的改造. 其核心思想是建立一个随梁一起运动的单元坐标系, 使梁相对于单元坐标系的运动是小位移小转动, 从而简化了转动场的离散 (C. R. 法)^[3-8]. 但它们都需要对截面形心位移和截面转角同时插值. 然而按 Euler 梁理论, 形心的切线应与截面法向平行. 对于这类单元, 只有当位移及转角为小量时位移相容性要求才能近似满足, 否则就会引起较大的模型误差或剪切闭锁等困难^[9].

* 收稿日期: 2012-12-07; 修订日期: 2013-05-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10972044)

作者简介: 张志刚 (1984—), 男, 河南开封人, 博士生 (E-mail: zhigangzhang@foxmail.com);
齐朝晖 (1964—), 男, 教授, 博士生导师 (通讯作者. E-mail: zhaohuiq@dlut.edu.cn);
吴志刚 (1971—), 男, 教授, 博士生导师.

针对上述问题,本文提出了一种平面大变形梁单元,将节点处曲率作为唯一插值参量;将单元两端节点位移通过一组约束方程表示为节点曲率的函数;采用增广法^[8]建立了系统非线性方程组,并给出了相应的 Jacobi 矩阵。

与传统梁单元相比,所提单元具有以下优势:1) 由于单元应变能只是曲率的函数,采用曲率插值可使节点力的表达式非常简单;2) 由于曲率插值本质上属于对梁变形后的形状的一种近似,与梁的刚体运动无关,因而适用于大位移和大转动情况;3) 由于没有对梁形心位移进行插值,避免了剪切闭锁问题。

1 精确几何模型梁理论

经典梁理论中的小位移小转动假设对于推导包含大转动的大变形梁单元不再成立。由 Reissner^[10],Simo 等^[11]提出的“精确几何模型梁理论”继承了平截面假定的同时对截面转动没有任何近似,所以由其推导的梁单元自然满足大位移大转动情况。梁微元体如图 1 所示。

弧长 s 处截面质心矢径 $\mathbf{r}(s)$,截面转动角速度 $\boldsymbol{\omega}(s)$,截面内合力及合力矩分别为 $\mathbf{n}(s)$ 和 $\mathbf{m}(s)$ 。变形前梁截面坐标系基矢量为 \mathbf{s}_i 与瞬态基矢量 \mathbf{t}_i 通过正交矩阵 \mathbf{R} 变换: $\mathbf{t}_i = \mathbf{R}\mathbf{s}_i$ 。

根据虚功率原理,弧长为 ds 的梁微元体上作用外力虚功率减去惯性力虚功率等于变形虚功率。沿弧长对变形虚功率积分得到长度为 l 的梁的变形虚功率:

$$\delta P = \int_0^l \left[\delta \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial s} - \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right)^T \mathbf{n} + \delta \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial s} \right)^T \mathbf{m} \right] ds. \quad (1)$$

精确几何模型梁理论定义了两种广义应变矢量 $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}$:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}^T \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} - \mathbf{t}_1 \right), \quad \tilde{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{R}^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s}, \quad (2)$$

式中, $\tilde{\boldsymbol{\kappa}}$ 为 $\boldsymbol{\kappa}$ 的反对称矩阵,则梁的变形虚功率式(1)可以表示为

$$\delta P = \int_0^l (\delta \dot{\boldsymbol{\gamma}}^T \mathbf{N} + \delta \dot{\boldsymbol{\kappa}}^T \mathbf{M}) ds, \quad (3)$$

式中, $\mathbf{N} = \mathbf{R}^T \mathbf{n}$, $\mathbf{M} = \mathbf{R}^T \mathbf{m}$, 对于梁截面为简单的对称、闭合平面,由线弹性材料组成梁的本构关系为

$$\begin{cases} \mathbf{N} = \mathbf{C}_\gamma \boldsymbol{\gamma}, & \mathbf{C}_\gamma = \text{diag}(EA, GA, GA), \\ \mathbf{M} = \mathbf{C}_\kappa \boldsymbol{\kappa}, & \mathbf{C}_\kappa = \text{diag}(G(I_y + I_z), EI_y, EI_z). \end{cases} \quad (4)$$

因此,由梁的变形虚功率式(3)可以给出虚应变能:

$$\delta w = \int_0^l (\delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_\gamma \boldsymbol{\gamma} + \delta \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{C}_\kappa \boldsymbol{\kappa}) ds. \quad (5)$$

梁主要承受横向力和弯矩作用且具有很强的拉压刚度,相比于横向变形轴向变形可以忽略。平面梁的变形几何关系如图 2 所示。

在梁变形前构型上建立单元坐标系为 \mathbf{e}_i 其与截面坐标系为 \mathbf{s}_i 一致。平面梁截面转动为定轴转动,正交矩阵

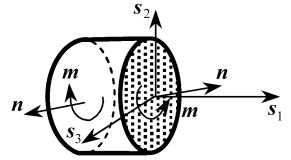


图 1 梁的微元体

Fig. 1 Beam infinitesimal unit

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

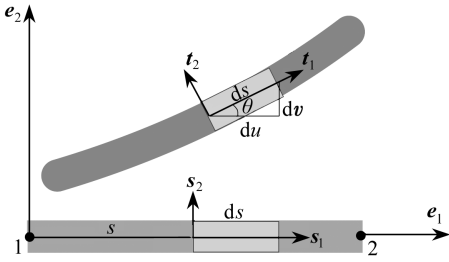


图2 梁单元变形几何关系

Fig.2 Deformation geometric relations of beam

式中 θ 为截面转角. 单元坐标系下位移对弧长导数为

$$\begin{cases} u' = \cos \theta - 1, \\ v' = \sin \theta, \end{cases} \quad (7)$$

式中 $(\cdot)' \triangleq d(\cdot)/ds$. 变形后梁轴线矢径为

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{e}_1 + u(s)\mathbf{e}_1 + v(s)\mathbf{e}_2, \quad (8)$$

将其代入拉伸广义应变式(2)第1式:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}^T(\mathbf{e}_1 + u'\mathbf{e}_1 + v'\mathbf{e}_2 - \mathbf{t}_1) = \mathbf{0}. \quad (9)$$

平面情况下与弯曲广义应变可以表示为

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\vartheta}'. \quad (10)$$

将梁截面转动矢量 $\boldsymbol{\vartheta}(s) = \theta s_3$ 代入, 得到弯曲广义应变及其变分:

$$\boldsymbol{\kappa} = \theta' \mathbf{e}_3, \quad \delta \boldsymbol{\kappa} = \delta \theta' \mathbf{e}_3, \quad (11)$$

式中 θ' 表示梁形心线曲率. 将式(4)、(9)、(11)代入式(5)可得梁单元虚应变能:

$$\delta w = \int_0^l \delta \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{C}_{\boldsymbol{\kappa}} \boldsymbol{\kappa} ds = EI_z \int_0^l \delta \theta' \theta' ds. \quad (12)$$

2 曲率离散及单元虚应变能

由平面梁单元虚应变能表达式(12), 梁的曲率代表了一种应变, 直接选取梁曲率进行离散, 可以方便地得到单元虚应变能. 以梁两节点曲率 θ'_1, θ'_2 为插值参数对 θ' 进行离散:

$$\theta'(s) = \theta'_1(1 - \xi) + \xi \theta'_2, \quad (13)$$

其中归一化坐标 $\xi = s/l$. 将上式代入单元虚应变能式(12)得到

$$\delta w_e = \delta \theta'_1 (EI_z l \theta'_1 / 3 + EI_z l \theta'_2 / 6) + \delta \theta'_2 (EI_z l \theta'_1 / 6 + EI_z l \theta'_2 / 3). \quad (14)$$

截面转角 θ 可以由曲率插值式(13)进行积分得到

$$\theta(s) = \theta_1 + s(1 - \xi/2)\theta'_1 + s\xi\theta'_2/2. \quad (15)$$

将 $s = l$ 代入上式, 得到单元两端截面转角满足关系:

$$\theta_2 = \theta_1 + l\theta'_1/2 + l\theta'_2/2. \quad (16)$$

由梁轴线位移 u, v 满足的微分方程(7)沿弧长积分, 梁右端节点位移为

$$\begin{cases} u_2 = u_1 + \int_0^l (\cos \theta - 1) ds, \\ v_2 = v_1 + \int_0^l \sin \theta ds. \end{cases} \quad (17)$$

这两个积分函数 θ 包含弧长 s 的二次项, 不存在有理形式的解析解, 这里采用 Gauss 积分给出其数值解. 记截面转角三角函数的 Gauss 积分:

$$\begin{cases} Y_n = \int_0^l s^n \cos \theta ds = \frac{l}{2} \sum_{i=1}^n A_i s_i^n \cos \theta_i, \\ z_n = \int_0^l s^n \sin \theta ds = \frac{l}{2} \sum_{i=1}^n A_i s_i^n \sin \theta_i, \end{cases} \quad (18)$$

式中, $s_i = l/(2t_i) + l/2$, $\theta_i = \theta(s_i)$, A_i, t_i 分别为 Gauss 积分系数及节点. 将其代入式(17), 得到单元右端位移:

$$\begin{cases} u_2 = u_1 + Y_0 - l, \\ v_2 = v_1 + z_0. \end{cases} \quad (19)$$

由式(19)取变分, 可以导出单元两端虚位移关系:

$$\begin{cases} \delta u_2 = \delta u_1 + Y_{0,\theta_1} \delta \theta_1 + Y_{0,\theta_1'} \delta \theta_1' + Y_{0,\theta_2} \delta \theta_2, \\ \delta v_2 = \delta v_1 + z_{0,\theta_1} \delta \theta_1 + z_{0,\theta_1'} \delta \theta_1' + z_{0,\theta_2'} \delta \theta_2'. \end{cases} \quad (20)$$

由式(18)可以得到 Gauss 积分式偏导数关系:

$$\begin{cases} Y_{n,\theta_1} = -z_n, z_{n,\theta_1} = Y_n, \\ Y_{n,\theta_1'} = -(z_{n+1} - z_{n+2}/(2l)), z_{n,\theta_1'} = Y_{n+1} - Y_{n+2}/(2l), \\ Y_{n,\theta_2} = -z_{n+2}/(2l), z_{n,\theta_2} = Y_{n+2}/(2l). \end{cases} \quad (21)$$

3 平面梁单元的坐标转换

选取线位移、转角及曲率为节点参数, 则 1, 2 号节点参数列阵记为

$$\mathbf{u}_1 = (u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad \theta_1')^T, \quad \mathbf{u}_2 = (u_2 \quad v_2 \quad \theta_2 \quad \theta_2')^T. \quad (22)$$

单元坐标系下的节点参数列阵: $\mathbf{a} = (\mathbf{u}_1^T \quad \mathbf{u}_2^T)^T$, 由式(14)单元虚应变能可以表示为

$$\delta w_e = \delta \mathbf{a}^T \mathbf{K}^e \mathbf{a}, \quad (23)$$

单元刚度阵为

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} K_{11} = \text{diag}(0, 0, 0, EI_z l/3), K_{22} = K_{11}, \\ K_{12} = \text{diag}(0, 0, 0, EI_z l/6), K_{21} = K_{12}. \end{cases} \quad (24)$$

单元坐标系第一根轴方向与总体坐标系第一根轴方向的夹角为 α , 则单元坐标系与总体坐标系下位移、转角及曲率的转换关系为

$$\begin{cases} u = \bar{u} \cos \alpha + \bar{v} \sin \alpha, \quad \theta = \bar{\theta}, \\ v = -\bar{u} \sin \alpha + \bar{v} \cos \alpha, \quad \theta' = \bar{\theta}'. \end{cases} \quad (25)$$

因此, 单元坐标系下节点参数与总体坐标系下节点参数转换关系为

$$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{a}}, \quad \bar{\mathbf{T}} = \text{diag}(\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{I}, \mathbf{A}_\alpha, \mathbf{I}), \quad (26)$$

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

总体坐标系下的单元刚度矩阵及等效节点载荷为

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \bar{\mathbf{T}}^T \mathbf{K}^e \bar{\mathbf{T}}, \quad \bar{\mathbf{F}}^e = \bar{\mathbf{T}}^T \mathbf{F}^e. \quad (28)$$

4 大变形平面梁有限元列式

由 n 个单元, m 个节点组成的平面梁结构, 按节点标号顺序的总体节点参数组集为

$$\mathbf{q} = (\bar{\mathbf{u}}_1^T \quad \bar{\mathbf{u}}_2^T \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{u}}_m^T)^T. \quad (29)$$

k 号单元节点编号为 i, j , 则单元节点参数与总体节点参数关系为

$$\bar{\mathbf{a}}_k = (\bar{\mathbf{u}}_i^T \quad \bar{\mathbf{u}}_j^T)^T = \mathbf{B}_k \mathbf{q}, \quad \mathbf{B}_k = (\mathbf{H}_i^T \quad \mathbf{H}_j^T)^T, \quad (30)$$

其中 \mathbf{B}_k 为单元自由度定位矩阵. 弹性体虚功可以表述为外力虚功等于虚应变能:

$$\delta \mathbf{q}^T (\bar{\mathbf{K}} \mathbf{q} - \bar{\mathbf{F}}) = \mathbf{0}, \quad (31)$$

其中总体刚度矩阵及广义节点载荷为

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum_{k=1}^n \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{K}}_k^e \mathbf{B}_k, \quad \bar{\mathbf{F}} = \sum_{k=1}^n \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{F}}_k^e. \quad (32)$$

这里选取的总体节点参数 \mathbf{q} 不独立, 单元两端节点转角及位移受到由式(16)、(19)给出的单元内约束作用. 单元内约束方程记为: $\mathbf{g}_k(\mathbf{a}_k) = \mathbf{0}$, 其中

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{a}_k) = \begin{bmatrix} u_i + Y_0 - l - u_j \\ v_i + z_0 - v_j \\ \theta_i + l\theta'_i/2 + l\theta'_j/2 - \theta_j \end{bmatrix}. \quad (33)$$

另外, 平面梁还受到至少 3 个独立的支座约束, 约束方程记为 $\Psi(\bar{\mathbf{u}}_c) = \mathbf{0}$. 常见的支座约束包括固定约束、铰支座约束:

1) 固定支座约束方程及其 Jacobi 矩阵:

$$\Psi(\bar{\mathbf{u}}_c) = \begin{pmatrix} \bar{u}_c \\ \bar{v}_c \\ \bar{\theta}_c \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\bar{\mathbf{u}}_c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (34)$$

2) 铰支座约束方程及其 Jacobi 矩阵:

$$\Psi(\bar{\mathbf{u}}_c) = \begin{pmatrix} \bar{u}_c \\ \bar{v}_c \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\bar{\mathbf{u}}_c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

单元内约束和支座约束方程可以统一表示为

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = (\mathbf{g}_1^T \quad \mathbf{g}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{g}_n^T \quad \Psi^T)^T = \mathbf{0}. \quad (36)$$

由约束方程可以导出关于虚位移的约束方程:

$$\delta \mathbf{q}^T \mathbf{G}_q^T = \mathbf{0}. \quad (37)$$

约束方程看作是位移空间中的超平面, 虚位移约束方程的几何意义就是系统虚位移必须位于这张超平面内, 而超平面的法空间基底是由约束 Jacobi 矩阵 \mathbf{G}_q 的行向量组成的. 这意味着虚位移与系统约束系数矩阵的每一个行向量相互垂直, 向量 $\bar{\mathbf{K}} \mathbf{q} - \bar{\mathbf{F}}$ 是矩阵 \mathbf{G}_q^T 各列向量的线性组合:

$$\bar{\mathbf{K}} \mathbf{q} - \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{G}_q^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (38)$$

其中, $\boldsymbol{\lambda}$ 为拉氏乘子列向量, 其维数与约束个数相同. 上式联立约束方程就得到系统满足的控

制方程及 Jacobi 矩阵为

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{K}}\mathbf{q} - \mathbf{G}_q^T \boldsymbol{\lambda} - \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \end{cases} \mathbf{J}_{q,\lambda} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}} - \partial(\mathbf{G}_q^T \boldsymbol{\lambda})/\partial \mathbf{q} & -\mathbf{G}_q^T \\ \mathbf{G}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (39)$$

式中约束方程 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{G}_q = (\mathbf{g}_{1,q}^T \quad \mathbf{g}_{2,q}^T \quad \cdots \quad \mathbf{g}_{n,q}^T \quad \boldsymbol{\Psi}_q^T)^T, \quad (40)$$

其中支座约束 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{\Psi}_q = \boldsymbol{\Psi}_{u_c} \mathbf{H}_c, \quad (41)$$

单元内约束 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{g}_{k,q} = \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \mathbf{a}_k} \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial \bar{\mathbf{a}}_k} \frac{\partial \bar{\mathbf{a}}_k}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{g}_{k,a} \mathbf{D}_k, \quad \mathbf{D}_k = \bar{\mathbf{T}}_k \mathbf{B}_k, \quad (42)$$

$$\mathbf{g}_{k,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z_0 & -z_1 & -1 & 0 & 0 & z_1 - z_2/l \\ 0 & 1 & Y_0 & Y_1 & 0 & -1 & 0 & Y_1 \\ 0 & 0 & 1 & l/2 & 0 & 0 & -1 & Y_2/l - Y_1 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

由式(40),拉式乘子项可以表示为

$$\mathbf{G}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_{i,q}^T \boldsymbol{\lambda}_i^g + \boldsymbol{\Psi}_q^T \boldsymbol{\lambda}^\psi, \quad (44)$$

则其对总体节点参数的偏导数为

$$\frac{\partial(\mathbf{G}_q^T \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{q}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\mathbf{g}_{i,q}^T \boldsymbol{\lambda}_i^g)}{\partial \mathbf{a}_i} \mathbf{D}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_i^T (\mathbf{g}_{i,a}^\dagger)^T \boldsymbol{\lambda}_i^g \mathbf{D}_i, \quad (45)$$

其中

$$\mathbf{g}_{i,a}^\dagger = \sum_{j=1}^8 \frac{\partial \mathbf{g}_{i,a}}{\partial a_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -z_0^\dagger & -z_1^\dagger & 0 & 0 & 0 & z_1^\dagger - z_2^\dagger/l \\ 0 & 0 & Y_0^\dagger & Y_1^\dagger & 0 & 0 & 0 & Y_1^\dagger \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_2^\dagger/l - Y_1^\dagger \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$\begin{cases} z_n^\dagger = z_{n,\theta_1} + z_{n,\theta_1'} + z_{n,\theta_2}, \\ Y_n^\dagger = Y_{n,\theta_1} + Y_{n,\theta_1'} + Y_{n,\theta_2}. \end{cases} \quad (47)$$

5 数值算例

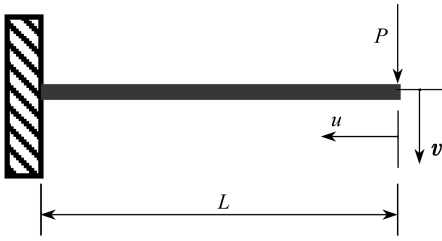
采用本文给出的有限元格式在 matlab 环境下编写了求解程序,非线性方程组采用 matlab 求解器 fsolve 进行求解.选取了下面 3 个经典的平面梁几何非线性算例,并将结果与相关文献^[12-13]结果进行比较.

算例 1 悬臂梁受梁端集中横向力作用

悬臂梁如图 3(a)所示,长度为 L ,材料弹性模量 E ,截面惯性矩 I ,梁端受竖直向下的集中常力 P 作用,梁端线位移 u, v 如图 3(b)所示.

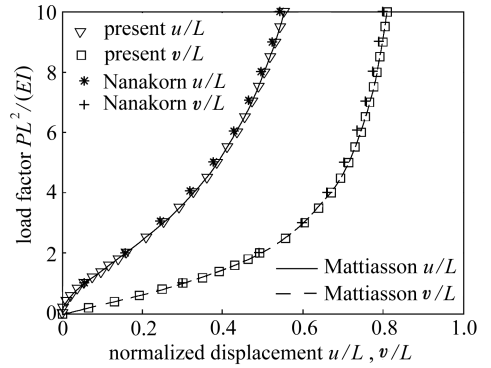
Mattiasson^[12]采用椭圆积分给出了高精度数值解;Nanakorn 等^[13]采用基于位移非线性插值的非线性梁单元求解了这道算例.本文结果与 Mattiasson 及 Nanakorn 的结果进行比较如图 3 所示.从中可以看出,本文结果与 Mattiasson 结果高度吻合,并优于 Nanakorn 给出的结果.另外

需要指出的是本文结果是采用 3 个单元, 而 Nanakorn 求解相同的例题采用的是 5 个单元。



(a) 悬臂梁端部受集中力

(a) Cantilever beam with an end point load



(b) 悬臂梁位移曲线

(b) Displacement curves of the cantilever beam

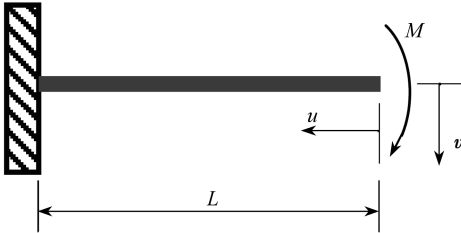
图 3 悬臂梁端部集中力变形图及位移曲线

Fig. 3 Deformation and displacement curves of cantilever beam with an end point load

算例 2 悬臂梁受杆端集中横向弯矩

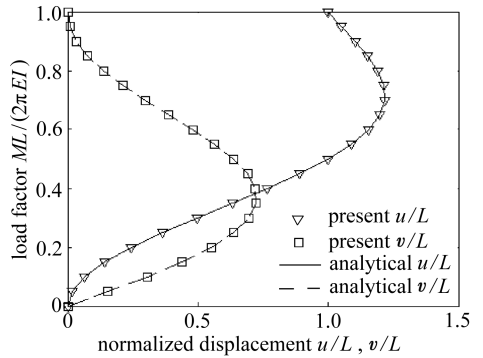
悬臂梁梁端受集中弯矩作用其解析解存在, 这里采用本文算法把梁划分为 3 个单元进行求解。求得的梁端位移结果与解析解进行对比, 如图 4 所示。

由图 4 梁端位移对比发现, 本文采用 3 个单元给出的结果与解析解高度一致。



(a) 悬臂梁杆端受集中弯矩

(a) Cantilever beam with an end moment



(b) 悬臂梁位移曲线

(b) Displacement curves of the cantilever beam

图 4 方形框架受压位移曲线

Fig. 4 Displacement curves of the square frame with tension force and the half structure

算例 3 铰接方形框架受拉压载荷

两个 L 形梁铰接形成的方形框架铰接点处受 $2P$ 的拉力和压力分别作用。由载荷和结构的对称性, 可以分别取半结构如图 5 所示。

这里将半结构 L 型梁划分为 6 个单元, 框架受拉、压力作用时端部位移结果与 Mattiasson 的结果对比如图 6 所示。

由位移结果对比可以看出本文结果与 Mattiasson 的结果高度吻合。

通过以上 3 个平面梁大变形分析算例不难看出, 本文所提方法在采用较少单元情况下所得结果能够与高精度椭圆积分得到的数值解吻合非常好, 由此表明了文中给出的单元列式的

正确性和有效性。

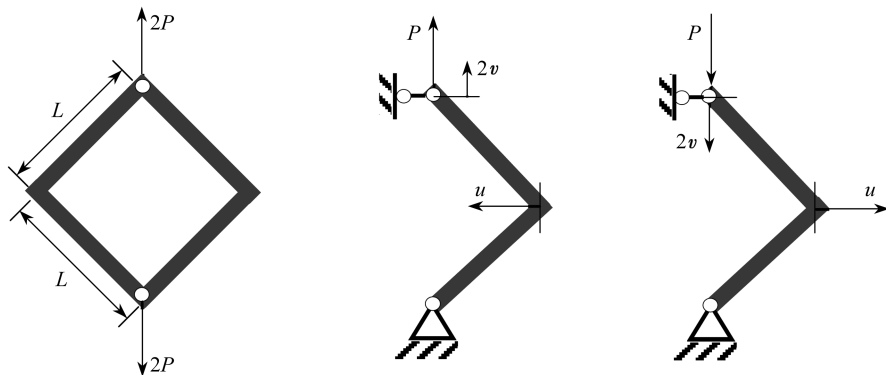
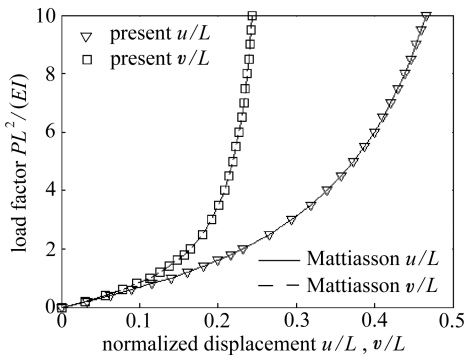
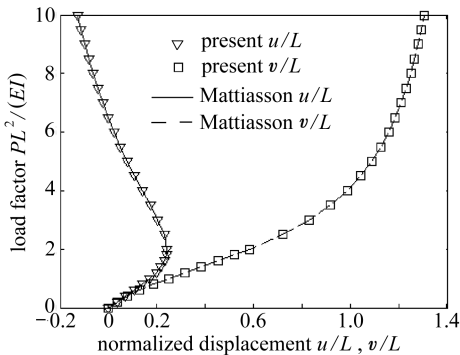


图 5 方形框架受集中力及半结构

Fig. 5 Square frame with concentrated force and the half structure



(a) 方形框架受拉位移曲线
(a) Displacement curves of the square frame with tension



(b) 方形框架受压位移曲线
(b) Displacement curves of the square frame with press

图 6 方形框架位移曲线

Fig. 6 Displacement curves of the square frame

6 结 论

本文从曲率插值出发,基于精确几何模型梁理论推导了一种平面 Euler 梁有限单元,这种有限元列式有以下特点:

- 1) 采用曲率插值,节点力的表达形式简洁;
- 2) 曲率插值本质上属于对梁变形后的形状的一种近似,排除了梁的刚体运动因而适用于大位移和大转动情况;
- 3) 曲率作为唯一插值变量,避免了剪切闭锁问题;
- 4) 采用增广法处理约束,得到了系统非线性方程组并给出了 Jacobi 矩阵,方便了非线性方程组的求解。

参考文献 (References):

[1] Xiao N, Zhong H. Non-linear quadrature element analysis of planar frames based on geometri-

- cally exact beam theory[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, **47**(5): 481-488.
- [2] 王世来, 凌道盛. 适用于大变形分析的平面协调梁单元[J]. 浙江大学学报(工学版), 2007, **41**(5): 818-822. (WANG Shi-lai, LING Dao-sheng. Fully conforming plane beam element for large deformation analysis [J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2007, **41**(5):818-822. (in Chinese))
- [3] Felippa C A, Haugen B. A unified formulation of small-strain corotational finite elements—I: theory[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, **194**(21): 2285-2335.
- [4] 吕和祥, 朱菊芬. 大转动梁的几何非线性分析讨论[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, **12**(4): 485-490. (LÜ He-xiang, ZHU Ju-fen. Discussion of analyzing of geometric nonlinear beams with large rotations [J]. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1995, **12**(4):485-490. (in Chinese))
- [5] 蔡松柏, 沈蒲生. 大转动平面梁有限元分析的共旋坐标法[J]. 工程力学, 2006, **23**(s1): 76-80. (CAI Song-bai, SHEN Pu-sheng. Co-rotational procedure for finite element analysis of plane beam under large rotational displacement [J]. *Engineering Mechanics*, 2006, **23**(s1): 76-80. (in Chinese))
- [6] Li Z X. A co-rotational formulation for 3D beam element using vectorial rotational variables [J]. *Computational Mechanics*, 2007, **39**(3): 309-322.
- [7] Hsiao K M, Lin J Y, Lin W Y. A consistent co-rotational finite element formulation for geometrically nonlinear dynamic analysis of 3-D beams [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, **169**(1): 1-18.
- [8] 罗晓明, 齐朝晖, 许永生, 韩雅楠. 含有整体刚体位移杆件系统的几何非线性分析[J]. 工程力学, 2011, **28**(2): 62-68. (LUO Xiao-ming, QI Zhao-hui, XU Yong-sheng, HAN Ya-nan. Geometric nonlinear analysis of truss systems with rigid body motions [J]. *Engineering Mechanics*, 2011, **28**(2):62-68 (in Chinese))
- [9] Haefner L, Willam K J. Large deflection formulations of a simple beam element including shear deformations [J]. *Engineering Computations*, 1984, **1**(4): 359-368.
- [10] Reissner E. On one-dimensional finite-strain beam theory: the plane problem [J]. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 1972, **23**(5): 795-804.
- [11] Simo J C, Vu-Quoc L. A three-dimensional finite-strain rod model—part II: computational aspects [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1986, **58**(1): 79-116.
- [12] Mattiasson K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1981, **17**(1): 145-153.
- [13] Nanakorn P, Vu L N. A 2D field-consistent beam element for large displacement analysis using the total Lagrangian formulation [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2006, **42**(14): 1240-1247.

Large Deformation Beam Element Based on Curvature Interpolation

ZHANG Zhi-gang¹, QI Zhao-hui¹, WU Zhi-gang^{1,2}

(1. *State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, P. R. China;*

2. *School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, P. R. China*)

Abstract: The shape functions of linear beam element, which will cause the false strain when large rotation occurs, does not apply to geometric nonlinear analysis. Because of the coherence of the interpolation of the displacement and angle, traditional geometric nonlinear beam element is often caused by problems such as shear locking. A plane large deformation beam element was proposed, by use of the interpolation of curvature and the functional relationship between the curvature and nodal displacements. The element node forces and displacements were expressed as a function of the curvature. Essentially the interpolation of the beam curvature is strain interpolation, which ensures that the element rigid body motion does not produce false node force; the shear locking in traditional element is avoided because the beam centroid displacement is expressed as a function of curvature. Thus this method is especially suitable for geometry nonlinear analysis of the beam. The numerical examples show the truth and validity of the proposed method.

Key words: curvature interpolation; geometric nonlinear; plane beam element; large displacement