

中厚度复合材料夹芯层板变分渐近精细模型*

钟轶峰, 刘森林, 陈约瑟, 黄博杰, 周小平

(重庆大学 土木工程学院,
山地城镇建设与新技术教育部重点实验室(重庆大学),重庆 400045)

摘要: 为准确预测对中厚度复合材料夹芯层板分层开裂至关重要的沿厚向应力/应变分布,利用板固有小参数将原三维板分析严格拆分为沿厚向的一维分析和二维板非线性分析,并将原三维能量渐近扩展为系列二维近似能量泛函;通过对近似能量泛函中主导变分项(含翘曲项)的渐近修正,得到与原三维模型尽可能接近的近似能量,从而构建无需任何场变量假设的精细模型,并转换为工程常用的 Reissner 模型形式.通过4层复合材料夹芯板柱形弯曲算例表明:基于所构建模型重构的三维场精度较一阶剪切变形理论和经典层合理论更好,与精确解基本一致;由于所构建的变分渐近模型为等效单层板模型,在保证足够精度的前提下,相比三维有限元计算可减少2~3阶计算量,在精确性和有效性间取得较好的折衷.

关键词: 变分渐近法; 复合材料夹芯层板; 精细模型; Reissner 模型

中图分类号: TU311; TB301.2; O346.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.07.003

引 言

近20年来,先进复合材料结构因其高强度、高刚性、高模量、可设计性、良好的抗疲劳性、抗腐蚀性等优点已广泛应用于航天航空、机械、土木工程等领域,且大多以中厚度铺层夹芯板形式出现.铺层设计的灵活性为结构的应力计算、变形分析和强度预测带来了额外的复杂性,尤其是在服役过程中沿厚度方向产生的应力大小及分布状况对分析板失效至关重要,成为制约其性能充分发挥的主要因素.

三维有限元分析可在连续介质力学框架内得到板壳精确的三维场分布^[1-2],但仍有必要对夹芯层板结构进行简化分析.原因在于:①许多工程问题无法通过三维有限元进行分析,如带软弱核心的旋翼转子叶片由200多层极薄的复合层构成,每一铺层至少需一个单元进行模拟,整个模型的自由度很容易超过 10^9 ,无法在常规计算机上完成数值计算;②在不同层级上对复合材料夹芯层板的局部应力、应变等细节进行分析时,有限元提供的后处理能力有限;③计算需消耗大量资源,计算成本昂贵,难以在规定时间内完成预定目标.因此迫切需要一种精度高、效率快的复合材料夹芯层板分析模型和计算方法,以缩短设计时间,降低计算成本,在初

* 收稿日期: 2013-03-01; 修订日期: 2013-05-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11272363; 51279218);中央高校基本科研业务费资助项目(CDJZR12200062);中国博士后基金特别资助项目(2012T50766)

作者简介: 钟轶峰(1975—),男,重庆人,副教授,博士,硕士生导师(通讯作者. Tel: +86-23-65123292; E-mail: zhongjy58@sina.com).

步设计阶段可快速找出三维场分布的最不利位置,采取必要的措施避免真正的破坏。

在板壳分析理论方面,基于 Kirchhoff 薄板假设(忽略横向剪切效应)、由三维弹性理论推导的经典层合理论(classical laminate theory, CLT)是最简便的分析理论,若计入板厚,其精度下降很多^[3];另一理论是适用于较厚板壳的一阶剪切变形理论(first-order shear deformation theory, FOSDT)^[4],但在模拟板沿厚向应力分布时产生“横剪自锁”等严重失真现象,其原因在于总应变能中包含横向剪切应变能的项在量级上不正确,沿厚度方向变化的剪切应变线性假设与上下表面剪应力为 0 自相矛盾,需人为地引入剪切修正因子来解决这一矛盾;为改善 FOSDT,避免使用剪切修正因子,各国学者提出了几种新的板壳分析理论,如 Reddy 的高阶理论^[5]和 Layer-wise 理论^[6]、Cho 等的 zig-zag 锯齿理论^[7],此外分别假设位移场和应力场的混合理论^[8]、状态空间法^[9]和整体-局部 1,2~3 高阶理论^[10]也先后应用于复合材料夹芯层板力学性能分析。但大部分板壳简化分析理论都基于特定的位移基假设(如沿厚度方向的位移/应变分布假设等),无法较好地反映实际层合板三维效应和铺层间的相互作用。

为解决这些难题,文中基于变分渐近法(variational asymptotic method, VAM)^[11-12],构建无需任何场变量假设、与原三维模型尽可能接近的复合材料夹芯层板精细模型。用以解决复合材料夹芯层板各向异性带来的结构力学分析复杂性问题,为其力学性能分析提供一种新的思路和有价值的参考。

1 三维能量方程

复合材料夹芯层板变形后几何构型如图 1 所示,取板中面为参考面。变形参考面上任意一点位置可由图 1 所示的直角坐标系 x_i 表示,其中 x_α 是参考面上相互正交的坐标, x_3 是与参考面垂直的法向坐标(文中下标 $i, j = 1, 2, 3$;下标 $\alpha, \beta = 1, 2$,下标重复时表示求和)。引入一组沿 x_i 方向的单位向量 \mathbf{B}_i ,板上任一点的位置可由固定点 O 到 x_α 确定点的位置向量 $\hat{\mathbf{R}}$ 描述为

$$\hat{\mathbf{R}}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{R}(x_1, x_2) + x_3 \mathbf{B}_3(x_1, x_2) + w_i(x_1, x_2, x_3) \mathbf{B}_i(x_1, x_2), \quad (1)$$

式中, w_i 是含所有可能变形的翘曲变形分量,在这里视为未知函数求解。翘曲的引入使式(1)有 6 次冗余,需 6 个约束来求解。如翘曲函数须满足如下 3 个约束:

$$\langle w_i(x_1, x_2, x_3) \rangle = 0, \quad (2)$$

式中,尖括号表示沿板厚度的积分, $\int_{-h/2}^{h/2} (\cdot) dx_3 = \langle \cdot \rangle$ 下同。

另外两个约束可通过将 \mathbf{B}_3 取为变形参考面的法线方向来确定。最后一个约束条件可由 $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}(\varepsilon_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ 分别为二维广义拉伸和弯曲应变变量)

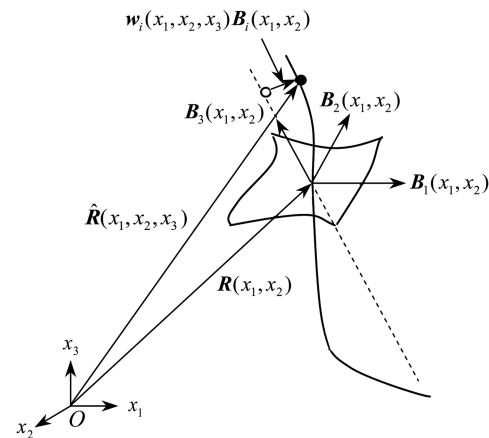


图 1 板变形简图
Fig. 1 Schematic of plate deformation

确定为

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{R}_{,2} = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{R}_{,1}. \quad (3)$$

式(1)的 Lagrange 变分形式为

$$\delta \hat{\mathbf{R}} = \overline{\delta q_i} \mathbf{B}_i + x_3 \overline{\delta \psi_i} \mathbf{B}_i \times \mathbf{B}_3 + \overline{\delta w_i} \mathbf{B}_i + \overline{\delta \psi_i} \mathbf{B}_i \times w_j \mathbf{B}_j, \quad (4)$$

式中,虚拟位移 $\overline{\delta q}_i$ 和虚拟旋转 $\overline{\delta \psi}_i$ 可定义为

$$\begin{cases} \overline{\delta q}_i = \delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_i, \\ \overline{\delta \mathbf{B}}_i = (-\overline{\delta \psi}_\beta \mathbf{B}_\beta \times \mathbf{B}_3 + \overline{\delta \psi}_3 \mathbf{B}_3) \times \mathbf{B}_i. \end{cases} \quad (5)$$

外荷载主要考虑板顶面荷载 $\tau_i \mathbf{B}_i$ 、底面荷载 $\beta_i \mathbf{B}_i$ 和体力 $\phi_i \mathbf{B}_i$,若定义广义力 f_i 和弯矩 m_α 为

$$f_i = \tau_i + \beta_i + \langle \phi_i \rangle, \quad m_\alpha = h(\tau_\alpha - \beta_\alpha)/2 + \langle x_3 \phi_\alpha \rangle, \quad (6)$$

则外荷载产生的虚位移沿板厚度方向所做虚功可表示为

$$\overline{\delta W} = f_i \overline{\delta q}_i + \overline{\delta \psi}_\alpha m_\alpha + \delta(\tau_i w_i^+ + \beta_i w_i^- + \langle \phi_i w_i \rangle), \quad (7)$$

式中, $(\)^+ = (\)_{x_3 = +h/2}$ 和 $(\)^- = (\)_{x_3 = -h/2}$ 表示作用在板顶、底面上的物理量。

在小应力条件下,可完全忽略翘曲函数和广义二维应变的乘积项,将三维应变场表示为

$$\mathbf{\Gamma}_e = \boldsymbol{\epsilon} + x_3 \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{I}_\alpha \mathbf{w}_{\parallel, \alpha}, \quad 2\mathbf{\Gamma}_s = \mathbf{w}_{\parallel, 3} + \mathbf{e}_\alpha w_{3, \alpha}, \quad \mathbf{\Gamma}_t = w_{3, 3}, \quad (8)$$

式中

$$\begin{cases} (\)_{,i} = \partial(\)/\partial x_i, \quad (\)_{\parallel} = [(\)_1 \quad (\)_2]^T; \\ \mathbf{\Gamma}_e = [\Gamma_{11} \quad 2\Gamma_{12} \quad \Gamma_{22}]^T, \quad 2\mathbf{\Gamma}_s = [2\Gamma_{13} \quad 2\Gamma_{23}]^T, \quad \mathbf{\Gamma}_t = \Gamma_{33}, \\ \boldsymbol{\epsilon} = [\varepsilon_{11} \quad 2\varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{22}]^T, \quad \boldsymbol{\kappa} = [K_{11} \quad K_{12} + K_{21} \quad K_{22}]^T, \\ \mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (9)$$

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

式(8)的显式为

$$\begin{cases} \Gamma_{11} = \varepsilon_{11} + x_3 K_{11} + w_{1,1}, \\ 2\Gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} + x_3(K_{12} + K_{21}) + w_{2,1} + w_{1,2}, \\ \Gamma_{22} = \varepsilon_{22} + x_3 K_{22} + w_{2,2}, \\ 2\Gamma_{13} = w_{1,3} + w_{3,1}, \\ 2\Gamma_{23} = w_{2,3} + w_{3,2}, \\ \Gamma_{33} = w_{3,3}. \end{cases} \quad (11)$$

由式(8),应变能密度可写为

$$U = \frac{1}{2} \left\langle \begin{Bmatrix} \mathbf{\Gamma}_e \\ 2\mathbf{\Gamma}_s \\ \mathbf{\Gamma}_t \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D}_e & \mathbf{D}_{es} & \mathbf{D}_{et} \\ \mathbf{D}_{es}^T & \mathbf{D}_s & \mathbf{D}_{st} \\ \mathbf{D}_{et}^T & \mathbf{D}_{st}^T & \mathbf{D}_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{\Gamma}_e \\ 2\mathbf{\Gamma}_s \\ \mathbf{\Gamma}_t \end{Bmatrix} \right\rangle, \quad (12)$$

式中, $\mathbf{D}_e, \mathbf{D}_{es}, \mathbf{D}_{et}, \mathbf{D}_s, \mathbf{D}_{st}$ 和 \mathbf{D}_t 是材料三维弹性系数矩阵 \mathbf{D} 相应的分割矩阵。通常情况下, \mathbf{D} 中所有元素都是非0的,但若复合材料夹芯层板各层相对自身中面单斜对称,且绕局部法线旋转,则无论各层倾角如何变化, \mathbf{D}_{es} 和 \mathbf{D}_{st} 始终为零矩阵,式(12)可简化为

$$2U = \langle \mathbf{\Gamma}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{\Gamma}_e + 2\mathbf{\Gamma}_e^T \mathbf{D}_{et} \mathbf{\Gamma}_t + 2\mathbf{\Gamma}_s^T \mathbf{D}_s 2\mathbf{\Gamma}_s + \mathbf{\Gamma}_t \mathbf{D}_t \mathbf{\Gamma}_t \rangle. \quad (13)$$

根据虚功原理,总能量泛函为

$$\Pi = U - \overline{W}. \quad (14)$$

至此,建立了由二维广义应变变量 $\varepsilon_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}$ 和三维翘曲函数 w_i 表示的三维板弹性问题。若直接求解,将遇到与原三维弹性问题相同的困难,主要难点来自于未知翘曲函数求解。现有文献通常预先假设 w_i 的变化形式,将原三维模型直接降维为二维板模型。但在各向异性显著的复

合材料夹芯层板力学性能分析中引入这种假设会产生明显的误差. 文中借助变分渐近法渐近计算 w_i , 在保证足够精度的前提下使计算得到简化.

2 变分渐近分析

为将原有三维问题严格降维为二维板模型, 须用二维方程表达三维结构能量. 与现有文献中的降维方法大多基于特定位移基假设不同, 文中基于变分渐近法, 利用板固有小参数 $h/l \ll 1$ (h 为板的厚度, l 为变形参考面的特征波长) 将三维问题降维成系列二维模型. 首先评估各变量阶数为

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \sim hK_{\alpha\beta} \sim n, f_3 \sim \mu (h/l)^2 n, f_\alpha \sim \mu (h/l) n, m_\alpha \sim \mu h (h/l) n, \quad (15)$$

式中, n 为板最大应变的阶数, μ 是材料常数的阶数(所有材料常数假定为同阶的).

2.1 零阶近似

变分渐近法要求根据不同的阶数找出式中的主导项. 总势能中包含翘曲、广义应变和翘曲与其它量的乘积项(如广义应变和载荷). 由于只有翘曲是变化的, 主导项只需考虑仅含翘曲项和翘曲与其它量的乘积项.

根据渐近分析和式(15), 可将式(8)代入式(14), 并去掉对 x_α 的偏导数(小量)求得零阶近似的主导项为

$$2\Pi_0^* = \langle (\boldsymbol{\varepsilon} + x_3 \boldsymbol{\kappa})^T \mathbf{D}_e (\boldsymbol{\varepsilon} + x_3 \boldsymbol{\kappa}) + 2(\boldsymbol{\varepsilon} + x_3 \boldsymbol{\kappa})^T \mathbf{D}_{et} w_{3,3} \rangle + \langle \mathbf{w}_{\parallel,3}^T \mathbf{D}_s \mathbf{w}_{\parallel,3} + \mathbf{D}_t w_{3,3}^2 \rangle - 2(\langle \mathbf{w}_{\parallel}^T \boldsymbol{\phi}_{\parallel} \rangle + \mathbf{w}_{\parallel}^{*T} \boldsymbol{\tau}_{\parallel} + \mathbf{w}_{\parallel}^{-T} \boldsymbol{\beta}_{\parallel}). \quad (16)$$

根据最小总势能原理, 式(2)约束下使能量泛函式(16)最小化的翘曲函数 w_i 可通过求解如下变分得到

$$\delta\Pi_0^* = 0. \quad (17)$$

式(16)相应的 Euler-Lagrange 方程为

$$\begin{cases} [\mathbf{w}_{\parallel,3}^T \mathbf{D}_s]_{,3} = \lambda_{\parallel}, \\ [(\boldsymbol{\varepsilon} + x_3 \boldsymbol{\kappa})^T \mathbf{D}_{et} + \mathbf{D}_t w_{3,3}]_{,3} = \lambda_3, \end{cases} \quad (18)$$

式中, $\lambda_{\parallel}, \lambda_3$ 为与式(2)面内和面外约束相对应的 Lagrange 乘子; $[\cdot]$ 为层间界面上的封闭参数跃迁.

由于翘曲函数 w_i 在板顶、底面可自由变化, 式(18)中方括号内的表达式在板顶、底面处应为 0, 在层间界面间连续. 由这些条件可得 $\lambda_{\parallel} = \lambda_3 = w_{\parallel} = 0, w_3$ 可通过下式求解:

$$w_3 = \mathbf{D}_{\perp 1} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}_{\perp 2} \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{D}_{\perp} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (19)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\perp} &= [\mathbf{D}_{\perp 1} \quad \mathbf{D}_{\perp 2}], \boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{\kappa}]^T; \\ \mathbf{D}_{\perp 1,3} &= -\mathbf{D}_{et}^T / \mathbf{D}_t, \mathbf{D}_{\perp 2,3} = -x_3 \mathbf{D}_{et}^T / \mathbf{D}_t. \end{aligned} \quad (20)$$

为产生连续位移场, 需维持 $\mathbf{D}_{\perp\alpha}$ 的层间连续性. 将式(19)代回式(16), 可得到渐近修正到 μn^2 阶的总能量泛函为

$$2\Pi_0 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (21)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{D}_e^* \rangle & \langle x_3 \mathbf{D}_e^* \rangle \\ \langle x_3 \mathbf{D}_e^* \rangle^T & \langle x_3^2 \mathbf{D}_e^* \rangle \end{bmatrix}, \mathbf{D}_e^* = \mathbf{D}_e - \mathbf{D}_{et} \mathbf{D}_{et}^T / \mathbf{D}_t. \quad (22)$$

式(21)表达式尽管与经典层合板理论相似, 但存在以下两点不同: 1) 变形板的法线沿与

板垂直方向是可变形的,并与 $\boldsymbol{\epsilon}$ 和 $\boldsymbol{\kappa}$ 二维应变相协调; 2) 由式(19)可知,推导的各层零阶翘曲 w_3 是一元二次多项式,横法向应变并不为 0.

2.2 一阶近似

零阶近似模型可较好地预测薄板结构的全局和面内变量分布,但对中厚板的面外变量分布(二阶量),还需利用板固有小参数 h/l 进行更高阶近似.此外,根据变分渐近法,需检查更高阶近似翘曲阶数是否大于零阶近似翘曲阶数 n .

为求解一阶近似,将零阶翘曲函数简单摄动为

$$\boldsymbol{w}_{\parallel} = \boldsymbol{v}_{\parallel}, w_3 = v_3 + \boldsymbol{D}_{\perp} \boldsymbol{\epsilon}. \tag{23}$$

将式(23)代回式(8)与(13),可得到一阶近似主导项为

$$2\Pi_1^* = \langle 2\boldsymbol{v}_{\parallel}^T \boldsymbol{C}_{\alpha,3} \boldsymbol{\epsilon}_{,\alpha} + 2\boldsymbol{v}_{\parallel,3}^T \boldsymbol{D}_s \boldsymbol{e}_{\alpha} \boldsymbol{D}_{\perp} \boldsymbol{\epsilon}_{,\alpha} + \boldsymbol{v}_{\parallel,3}^T \boldsymbol{D}_s \boldsymbol{v}_{\parallel,3} + \boldsymbol{D}_t v_{3,3}^2 \rangle - 2(\langle \boldsymbol{v}_{\parallel}^T \boldsymbol{\phi}_{\parallel} \rangle + \boldsymbol{v}_{\parallel}^{+T} \boldsymbol{\tau}_{\parallel} + \boldsymbol{v}_{\parallel}^{-T} \boldsymbol{\beta}_{\parallel}), \tag{24}$$

式中

$$\boldsymbol{C}_{\alpha,3} = -\boldsymbol{I}_{\alpha}^T [\boldsymbol{D}_e^* \quad x_3 \boldsymbol{D}_e^*].$$

由于 v_3 和 $\boldsymbol{v}_{\parallel}$ 相互独立,式(2)约束下 v_3 只有平凡解.为求解 $\boldsymbol{v}_{\parallel}$,建立式(34)的 Euler-Lagrange 方程和边界方程:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{D}_s \boldsymbol{v}_{\parallel,3} + \boldsymbol{D}_s \boldsymbol{e}_{\alpha} \boldsymbol{D}_{\perp} \boldsymbol{\epsilon}_{,\alpha})_{,3} = \boldsymbol{C}_{\alpha,3} \boldsymbol{\epsilon}_{,\alpha} + \boldsymbol{g}_{,3} + \boldsymbol{\Lambda}, \\ (\boldsymbol{D}_s \boldsymbol{v}_{\parallel,3} + \boldsymbol{D}_s \boldsymbol{e}_{\alpha} \boldsymbol{D}_{\perp} \boldsymbol{\epsilon}_{,\alpha})^+ = \boldsymbol{\tau}_{\parallel}, \\ (\boldsymbol{D}_s \boldsymbol{v}_{\parallel,3} + \boldsymbol{D}_s \boldsymbol{e}_{\alpha} \boldsymbol{D}_{\perp} \boldsymbol{\epsilon}_{,\alpha})^- = -\boldsymbol{\beta}_{\parallel}, \end{cases} \tag{25}$$

式中, $\boldsymbol{g}_{,3} = -\boldsymbol{\phi}_{\parallel}$; $\boldsymbol{\Lambda}$ 为将约束作用于翘曲场式(2)的 Lagrange 乘子.

求解方程组(25),得到翘曲场为

$$\boldsymbol{v}_{\parallel} = \bar{\boldsymbol{C}}_{\alpha} \boldsymbol{\epsilon}_{,\alpha} + \bar{\boldsymbol{g}}, \tag{26}$$

式中

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{C}}_{\alpha,3} = \boldsymbol{D}_s^{-1} \boldsymbol{C}_{\alpha}^*, \langle \bar{\boldsymbol{C}}_{\alpha} \rangle = 0, \bar{\boldsymbol{g}}_{,3} = \boldsymbol{D}_s^{-1} \boldsymbol{g}^*, \langle \bar{\boldsymbol{g}} \rangle = 0, \\ \boldsymbol{C}_{\alpha}^* = \boldsymbol{C}_{\alpha} + \frac{x_3}{h} \boldsymbol{C}_{\alpha}^{\mp} - \frac{1}{2} \boldsymbol{C}_{\alpha}^{\pm} - \boldsymbol{D}_s \boldsymbol{e}_{\alpha} \boldsymbol{D}_{\perp}, \\ \boldsymbol{g}^* = \boldsymbol{g} + \frac{x_3}{h} \boldsymbol{g}^{\mp} - \frac{1}{2} \boldsymbol{g}^{\pm} + \left(\frac{x_3}{h} + \frac{1}{2}\right) \boldsymbol{\tau}_{\parallel} + \left(\frac{x_3}{h} - \frac{1}{2}\right) \boldsymbol{\beta}_{\parallel}, \\ \boldsymbol{C}_{\alpha} = -\langle \boldsymbol{I}_{\alpha}^T [\boldsymbol{D}_e^* \quad x_3 \boldsymbol{D}_e^*] \rangle, \boldsymbol{g} = -\langle \boldsymbol{\phi}_{\parallel} \rangle, \end{cases} \tag{27}$$

式中, $(\)^{\pm} = (\)^+ + (\)^-$ 和 $(\)^{\mp} = (\)^- - (\)^+$. 式(26)近似翘曲的阶数为 $(h/l)n$, 明显高于零阶近似翘曲的阶数 n . 渐近修正 $\mu (h/l)^2 n$ 阶的总能量表达式为

$$2\Pi_1 = \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}_{,\alpha}^T \boldsymbol{B}_{\alpha\beta} \boldsymbol{\epsilon}_{,\beta} - 2\boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{F} - \boldsymbol{P}, \tag{28}$$

式中

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}_{\alpha\beta} = \langle \boldsymbol{D}_{s(\alpha\beta)} \boldsymbol{D}_{\perp}^T \boldsymbol{D}_{\perp} + \bar{\boldsymbol{C}}_{\alpha}^T \boldsymbol{C}_{\beta,3} + \boldsymbol{C}_{\alpha}^{*T} \boldsymbol{e}_{\beta} \boldsymbol{D}_{\perp} \rangle, \\ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\tau}_3 \boldsymbol{D}_{\perp}^{+T} + \boldsymbol{\beta}_3 \boldsymbol{D}_{\perp}^{-T} + \langle \boldsymbol{\phi}_3 \boldsymbol{D}_{\perp}^T \rangle + \\ \quad \frac{1}{2} (\langle \boldsymbol{D}_{\perp}^T \boldsymbol{e}_{\alpha}^T \boldsymbol{g}_{,\alpha}^* + \boldsymbol{C}_{\alpha,3}^T \bar{\boldsymbol{g}}_{,\alpha} \rangle - \bar{\boldsymbol{C}}_{\alpha}^T \boldsymbol{\phi}_{\parallel,\alpha} - \bar{\boldsymbol{C}}_{\alpha}^{+T} \boldsymbol{\tau}_{\parallel,\alpha} - \bar{\boldsymbol{C}}_{\alpha}^{-T} \boldsymbol{\beta}_{\parallel,\alpha}), \\ \boldsymbol{P} = \bar{\boldsymbol{g}}^{+T} \boldsymbol{\tau}_{\parallel} + \bar{\boldsymbol{g}}^{-T} \boldsymbol{\beta}_{\parallel} + \langle \bar{\boldsymbol{g}}^T \boldsymbol{\phi}_{\parallel} \rangle, \end{cases} \tag{29}$$

其中, $(\)_{(\alpha\beta)}$ 表示矩阵 $(\)$ 中的 α 行 β 列元素.

2.3 转换成 Reissner 模型

式(28)因含有二维广义应变的导数 $\boldsymbol{\varepsilon}_{,\alpha}$, 难以在实际工程中有效应用. 为得到实用的能量泛函, 可将式(28)转换为在实际工程中常用的 Reissner 模型形式. 为此, 需增加 2 个横向剪切自由度 $\boldsymbol{\gamma} = [2\gamma_{13} \quad 2\gamma_{23}]^T$, 将其纳入到横法向旋转变量中. 古典应变量的 Reissner 形式可表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{R} - \mathbf{D}_\alpha \boldsymbol{\gamma}_{,\alpha}, \quad (30)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{R} = [\varepsilon_{11}^* \quad 2\varepsilon_{12}^* \quad \varepsilon_{22}^* \quad K_{11}^* \quad K_{12}^* + K_{21}^* \quad K_{22}^*]^T. \end{cases} \quad (31)$$

将式(30)代回式(28), 得到由 Reissner 应变变量表示的渐近修正到二阶的能量泛函为

$$2\Pi_1 = \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} - 2\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{D}_\alpha \boldsymbol{\gamma}_{,\alpha} + \mathbf{R}_{,\alpha}^T \mathbf{B}_{\alpha\beta} \mathbf{R}_{,\beta} - 2\mathbf{R}^T \mathbf{F} - \mathbf{P}. \quad (32)$$

广义 Reissner 模型形式为

$$2\Pi_R = \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{G} \boldsymbol{\gamma} - 2\mathbf{R}^T \mathbf{F}_R - 2\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{F}_\gamma. \quad (33)$$

为使式(32)与式(33)等效, 需消除式(31)中变量的偏导数 $\mathbf{R}_{,\alpha}$. 可利用弯矩平衡方程推导出 $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\mathbf{R}_{,\alpha}$ 的关系式达到这一目的, 即

$$\mathbf{G} \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{F}_\gamma = \mathbf{D}_\alpha^T \mathbf{A} \mathbf{R}_{,\alpha} + [m_1 \quad m_2]^T, \quad (34)$$

式中省略了更高阶项 $\mathbf{F}_{R,\alpha}$.

将式(34)代入(32)中, 可得 $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}, \mathbf{F}_\gamma = \mathbf{0}$. 式(32)可改写为

$$2\Pi_1 = \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{G} \boldsymbol{\gamma} - 2\mathbf{R}^T \mathbf{F} - \bar{\mathbf{P}} + U^*, \quad (35)$$

式中

$$U^* = \mathbf{R}_{,\alpha}^T \bar{\mathbf{B}}_{\alpha\beta} \mathbf{R}_{,\beta}, \quad \bar{\mathbf{B}}_{\alpha\beta} = \mathbf{B}_{\alpha\beta} + \mathbf{A} \mathbf{D}_\alpha \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_\beta^T \mathbf{A}, \quad \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{P} - \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix}^T \mathbf{G}^{-1} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix}.$$

若 $U^* = 0$, 则式(32)与式(33)等效. 对于普通各向异性板, U^* 并不为 0, 但可通过最小二乘法等优化技术使 U^* 尽可能趋近于 0. 为使优化更加灵活, 可放松式(2)中的约束 (令 $\langle w_i \rangle = \text{常数}$) 以引入更多的未知量. 放松后的一阶近似翘曲场为

$$\bar{\mathbf{v}}_{\parallel} = \bar{\mathbf{C}}_\alpha \boldsymbol{\varepsilon}_{,\alpha} + \bar{\mathbf{g}} + \mathbf{L}_\alpha \boldsymbol{\varepsilon}_{,\alpha}, \quad (36)$$

式中, \mathbf{L}_α 包含了 24 个常量. U^* 可改写为

$$U^* = \mathbf{R}_{,\alpha}^T \hat{\mathbf{B}}_{\alpha\beta} \mathbf{R}_{,\beta}, \quad \hat{\mathbf{B}}_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{B}} + 2\mathbf{L}_\alpha^T \langle \mathbf{C}_{\beta,3} \rangle. \quad (37)$$

最小化 U^* 后, 广义 Reissner 板模型的总能量泛函可表示为

$$2\Pi_1 = \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{G} \boldsymbol{\gamma} + 2\mathbf{R}^T \mathbf{F}. \quad (38)$$

2.4 三维重构

对板分层失效至关重要的沿厚度方向场变量分布情况, 尚需重建关系进行预测. 对于二阶近似能量泛函, 可使用与之对应的一阶渐近修正翘曲函数和二维变量重构三维位移、应变和应力场. 重构的一阶三维位移场为

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + x_3 \begin{Bmatrix} C_{31} \\ C_{32} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}, \quad (39)$$

式中, U_i, u_i 分别为三维板和二维板位移分量; C_{3i} 为位置矢量的余弦函数.

由式(8)重构的一阶三维应变场为

$$\Gamma_e = \boldsymbol{\epsilon} + x_3 \boldsymbol{\kappa}, 2\Gamma_s = \bar{\mathbf{v}}_{\parallel,3} + \mathbf{e}_\alpha \mathbf{D}_\perp \boldsymbol{\epsilon}_{,\alpha}, \Gamma_t = \mathbf{D}_{\perp,3} \boldsymbol{\epsilon}. \quad (40)$$

最后,利用三维本构关系可得到三维应力 σ_{ij} .

基于优化剪切刚度系数矩阵 \mathbf{G} 重构的三维场比经典层合理理论和一阶剪切变形理论更好. 为得到更精确的横法向应变 Γ_{33} 和应力 σ_{33} (二阶量),需再次使用变分渐近法.

运用与上节相同的方法,二阶翘曲函数 y_3 可通过求解如下 Euler-Lagrange 方程得到

$$\begin{cases} (\mathbf{D}_t y_{3,3} + \mathbf{D}_{et}^T \mathbf{I}_\alpha \mathbf{w}_{\parallel,\alpha})_{,3} + \mathbf{e}_\beta^T \mathbf{D}_s (\mathbf{w}_{\parallel,3} + \mathbf{e}_\alpha \mathbf{w}_{3,\alpha})_{,\beta} + \phi_3 = \lambda_3, \\ (\mathbf{D}_t y_{3,3} + \mathbf{D}_{et}^T \mathbf{I}_\alpha \mathbf{w}_{\parallel,\alpha})^+ = \tau_3, \\ (\mathbf{D}_t y_{3,3} + \mathbf{D}_{et}^T \mathbf{I}_\alpha \mathbf{w}_{\parallel,\alpha})^- = -\beta_3. \end{cases} \quad (41)$$

求得 y_3 后,重构的二阶三维位移可表示为

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + x_3 \begin{Bmatrix} C_{31} \\ C_{32} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ w_3 + y_3 \end{Bmatrix}; \quad (42)$$

重构的二阶应变场为

$$\Gamma_e = \boldsymbol{\epsilon} + x_3 \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{I}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_{\parallel,\alpha}, 2\Gamma_s = \bar{\mathbf{v}}_{\parallel,3} + \mathbf{e}_\alpha \mathbf{D}_\perp \boldsymbol{\epsilon}_{,\alpha}, \Gamma_t = \mathbf{D}_{\perp,3} \boldsymbol{\epsilon} + y_{3,3}. \quad (43)$$

二阶应力场可通过三维材料本构关系得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_e = [\sigma_{11} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{22}]^T = \mathbf{D}_e^* (\boldsymbol{\epsilon} + x_3 \boldsymbol{\kappa}) + \mathbf{D}_{et} y_{3,3} + \mathbf{D}_e \mathbf{I}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_{\parallel,\alpha}, \\ \boldsymbol{\sigma}_s = [\sigma_{13} \quad \sigma_{23}]^T = \mathbf{D}_s (\mathbf{w}_{\parallel,3} + \mathbf{e}_\alpha \mathbf{D}_\perp \boldsymbol{\epsilon}_{,\alpha}), \\ \sigma_t = \sigma_{33} = \mathbf{D}_{et}^T \mathbf{I}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_{\parallel,\alpha} + \mathbf{D}_t y_{3,3}. \end{cases} \quad (44)$$

3 算 例

柱形弯曲问题已成为检验新构建二维/一维板壳模型有效性和准确性的基准. 本节以顶面作用正弦型分布荷载下的4层复合材料层夹芯板柱形弯曲为例,基于构建的模型对各物理变量在板内特征点处沿厚度方向的分布进行预测,并与 Pagano^[13]所推导的精确解和经典层合理理论解进行对比,以验证所述理论和方法的有效性和准确性.

3.1 模型参数

计算模型如图2所示的4层对称铺层筒支板,各层倾角为 $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$,类似于夹芯板结构. 沿 x_1 轴的长度为 $L_1 = 10$ cm,沿 x_2 轴的长度无限长,沿 x_3 轴的板厚 $h = 2.5$ cm,采用的坐标系为 $x_1 \in [0, L_1], x_2 \in [0, \infty], x_3 \in [-h/2, h/2]$. 板宽厚比 $L_1/h = 4$,以模拟中厚板情况. 复合材料属性如表1所示.

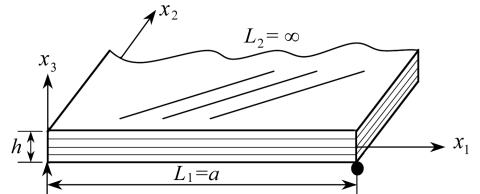


图2 复合材料夹芯板几何构型与坐标系
Fig. 2 Geometry and coordinates of a composite sandwich laminate

板表面作用正弦型分布荷载,无体力作用:

$$\tau_3 = \beta_3 = P_0 \sin(\pi x_1 / L_1) \text{ MPa}, \tau_\alpha = \beta_\alpha = 0. \quad (45)$$

为方便比较,纵坐标正则化为 $\bar{z} = x_3/h$, 应力、应变正则化为

$$\bar{\Gamma}_{ij} = \frac{E_L h^2 \Gamma_{ij}}{L_1^2 P_0}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{P_0}. \tag{46}$$

表 1 复合材料属性

Table 1 Composite material properties

E_1/GPa	E_2/GPa	G_{12}/GPa	G_{22}/GPa	ν_{12}	ν_{22}
172.4	6.9	3.45	1.38	0.25	0.25

3.2 分析与讨论

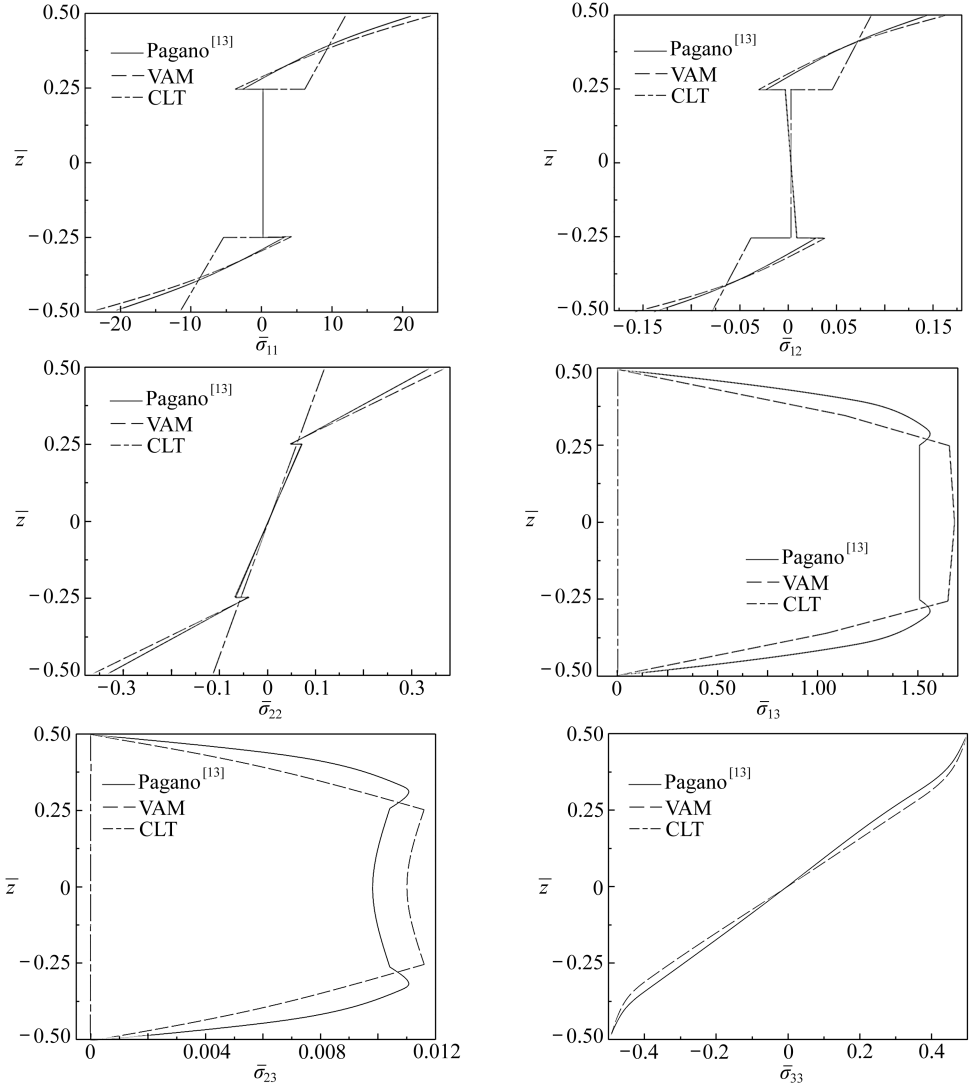


图 3 复合材料夹芯板三维应力分量在表面正弦型分布荷载下沿厚度方向分布曲线

Fig. 3 Distribution of the 3D stress fields along the thickness direction in the composite sandwich plate under a sinusoidal load on the surface

重构的三维应力场如图 3 所示, 三维应变场变化趋势与应力相同, 为节约篇幅, 未在文中绘出. 因二维应力变量是 x_1 的正弦或余弦函数, σ_{33} 绘于 $x_1 = 0$ 处, 其余应力分量绘于 $x_1 = L_1/2$ 处.

由图 3 可看出: 对于面内应力分量 $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$, VAM 解与精确解吻合较好, 并能准确捕

捉到应力在界面处的突变,而 CLT 在远离核心部分的应力分布预测偏差较大,软弱核心区基本吻合;对于横剪应力分量 σ_{13}, σ_{23} , CLT 因忽略横向剪切效应,其值为 0,而 VAM 解与精确解基本一致,能准确预测核心材料产生的显著剪切效应;对于横法向应力分量 σ_{33} , CLT 无法通过计算机得到, VAM 解与精确解一致;且重构的 6 个应力分量均满足自由边界和层间连续性条件。

所述方法数值计算主要包括沿厚向的变分渐近计算和二维板全局响应计算,计算量与一阶剪切变形理论相当,在常规台式机上仅需 1 s 完成数值计算;而三维有限元计算需在各层板建立单元,计算耗时 30 s。若复合夹芯板层数增加,所述方法的有效性更加明显。准确重构的应力分布可为设计者合理设计和使用智能复合材料夹芯层板提供重要的帮助,在初步设计阶段即可快速找出应力分布最不利位置,采取必要措施避免真正的破坏。

4 结 论

1) 基于变分渐近法建立了复合材料夹芯层板精细模型,将三维能量渐近扩展为系列二维递归能量,并利用板固有的小参数渐近修正二维递归能量中主导变分项(含翘曲项),从而得到与原三维能量尽可能接近的分析模型,并转换为工程常用的 Reissner 模型形式。

2) 基于得到的二维全局响应和各阶翘曲函数推导了三维场变量重构关系。该模型不需对三维位移场作先验性假设,避免了传统板壳理论位移基假设导致的“剪切自锁”严重失真的现象。

3) 通过复合材料夹芯板表面作用正弦型分布荷载下的柱形弯曲算例表明:基于所构建模型预测的各场变量沿厚度方向分布与三维精确解基本一致;由于所构建的变分渐近模型为等效单层板模型,计算量与一阶剪切变形理论相当,较三维有限元分析大为减少,在精确性和有效性间取得较好的折衷。

参考文献(References):

- [1] 王跃全,童明波,朱书华. 三维复合材料层合板渐进损伤非线性分析模型[J]. 复合材料学报, 2009, **26**(5):160-168. (WANG Yue-quan, TONG Ming-bo, ZHU Shu-hua. 3D nonlinear progressive damage analysis model for composite laminates[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2009, **26**(5): 160-168. (in Chinese))
- [2] Apalak Z G, Apalak M K, Genc M S. Progressive damage modeling an adhesively bonded unidirectional composite single-lap joint in tension at the mesoscale level[J]. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 2006, **19**(6):671-702.
- [3] Whitney J M, Ashton J E. Effect of environment on the elastic response of layered composite plates[J]. *AIAA Journal*, 1971, **32**(9):1708-1713.
- [4] Ram K S, Sinha P K. Hygrothermal effects on the buckling of laminated composite plates[J]. *Composite Structure*, 1992, **21**(7):233-247.
- [5] Reddy J N. A higher-order plate element for accurate prediction of interlaminar stresses in laminated composite plates[J]. *Composite Structures Journal*, 2009, **91**(3): 337-357.
- [6] Reddy J N, Savoia M. Layer-wise shell theory for post-buckling of laminated cylindrical shells [J]. *AIAA Journal*, 1992, **30**(6):2148-2154.
- [7] Cho Y B, Averil R C. First-order zig-zag sublaminar plate theory and finite element model for laminated composite and sandwich panels[J]. *Composite Structures*, 2000, **50**(5):1-15.

- [8] Carrera E. A Reissner's mixed variational theorem applied to vibration analysis of multilayered shell[J]. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 1999, **64**(1): 69-78.
- [9] Chen W Q, Lee K Y. Three-dimensional exact analysis of angle-ply laminates in cylindrical bending with interfacial damage via state-space method[J]. *Composite Structure*, 2004, **64**(2): 275-283.
- [10] Li X Y, Liu D. Generalized laminate theories based on double superposition hypothesis[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, **40**(6): 1197-1212.
- [11] Lee Chang-yong, Hodges D H. Dynamic variational asymptotic procedure for laminated composite shells—I; low-frequency vibration analysis[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2009, **76**(1): 1-7.
- [12] Bar-Yoseph P, Avrashi J. New variational-asymptotic formulations for interlaminar stress analysis in laminated plates[J]. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 1986, **37**(3): 305-321.
- [13] Pagano N J. Influence of shear coupling in cylindrical bending of anisotropic laminates[J]. *Journal of Composite Materials*, 1970, **4**(2): 330-343.

Refined Model for Composite Sandwich Laminates of Moderate Thickness Based on the Variational Asymptotic Method

ZHONG Yi-feng, LIU Sen-lin, CHEN Yue-se,
HUANG Bo-jie, ZHOU Xiao-ping

(*School of Civil Engineering, Chongqing University,*

Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain

Area(Chongqing University), Ministry of Education, Chongqing 400045, P. R. China)

Abstract: In order to accurately predict the stress/strain distribution along the thickness direction, which is very important to the interface cracking of the composite sandwich laminate of moderate thickness, the small inherent parameter was used to rigidly decouple the original 3D plate into 1D analysis along the thickness direction and 2D nonlinear plate analysis. The 3D energy was approximately extended into a series of 2D energy functionals, in which the leading items were asymptotically corrected to match the original 3D energy as close as possible. Then, a refined model was built up without any field variable assumptions, and converted to the form of Reissner model for engineering applications. The cylindrical bending example of a sandwich plate with four layers shows that the 3D field reconstituted by this theory agrees better with the exact results than those by the first-order shear deformation theory and classical laminated theory; its amount of computation can be reduced up to 2~3 orders than 3D finite element method because the variational asymptotic model is an equivalent single-layer plate model, indicating a good tradeoff between the accuracy and efficiency.

Key words: variational asymptotic method; composite sandwich laminates; refined model; Reissner model