

基于 Rosenbrock 型指数积分的一维间断 Galerkin 有限元方法*

陈业飞¹, 李文成¹, 邓子辰²

(1. 西北工业大学 应用数学系,西安 710072;

2. 西北工业大学 工程力学系,西安 710072)

(本刊编委邓子辰来稿)

摘要: 提出基于 Rosenbrock 型指数积分的一维间断 Galerkin 有限元方法.该方法在空间上使用间断有限元方法离散,在时间上采用 Rosenbrock 型指数积分方法.这样不仅可以保持空间离散上的高精度,而且继承了指数时间积分方法具有显式大步长时间推进的优点.数值试验的结果表明,对于一维双曲守恒律问题,这种方法是一种有效的数值算法.

关键词: 间断 Galerkin 有限元; Rosenbrock 型指数积分; 显式时间积分; 大步长

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.07.004

引 言

间断有限元(discontinuous Galerkin finite element method,简称 DG)方法最早是由 Reed 和 Hill 在 1978 年提出来求解中子输运方程.从 80 年代末起,Shu 和 Cockburn 等人做了大量的工作,极大发展和丰富了间断有限元方法.他们先是提出了 TVD 和 TVB 的 Runge-Kutta 间断有限元方法(Runge-Kutta discontinuous Galerkin finite element method,简称 RKDG)^[1]求解非线性方程,之后又提出局部间断有限元方法^[2](local discontinuous Galerkin finite element method,简称 LDG)来求解高阶偏微分方程.与此同时,间断有限元方法在国内也逐渐兴起,并用来解决流体力学问题^[3],超高速流问题^[4],渗流流场问题^[5]等.此外 DG 方法与自适应网格^[6], p 型多重网格方法结合^[7]等一系列工作使得 DG 方法求解复杂工程问题更加方便.间断有限元方法是利用完全间断的分片多项式空间作为近似解和试验函数空间的一种有限元方法.这种方法采用局部高阶插值的方法构造基函数,具有灵活处理间断和复杂边界条件的能力,也具有可显式求解的特点.该方法克服了一般有限元方法不适于间断问题的缺点,弥补了一般有限元体积

* 收稿日期: 2013-02-05; 修订日期: 2013-05-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10802068;11172239);111 引智计划项目(B07050);高校博士点基金资助项目(20126102110023);大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金资助项目(GZ0802)

作者简介: 陈业飞(1989—),男,河南人,硕士生(E-mail:chenyefei@mail.nwpu.edu.cn);
李文成(1978—),男,宁夏人,副教授(通讯作者.E-mail:wenchengli@nwpu.edu.cn);
邓子辰(1964—),男,教授,博士生导师(E-mail:dweifan@nwpu.edu.cn).

方法必须通过扩大模板进行重构来提高精度的不足。

最早的指数积分方法^[8]是1960年提出的 Adams-Moulton 方法,这种方法被也称为指数时间差分(exponential time differencing method)方法,后来发展成指数 Runge-Kutta 积分方法;1967年 Lawson 提出指数积分因子方法(integrating factor method),来解决刚性微分方程问题;由于高维指数矩阵计算的困难,阻碍了其进一步发展.直到本世纪初,随着快速计算高维指数矩阵函数领域的发展,指数时间积分方法重新引起学术界的关注,开始快速发展.1999年, Munthe-Kaas 提出了把微分方程变换到线性 Lie 代数空间上的 Lie 群积分方法.随后, Celledoni 等提出 commutator 型 Lie 群方法^[9].2005年, Trefethen 和 Kassam^[10]使用指数时间差分方法和指数积分因子方法求解刚性偏微分方程问题,结果表明这些方法明显要优于传统方法. Rosenbrock 型指数积分方法^[11]是 Ostermann 在2009年提出的新的指数积分方法,这种方法的特点是适合求解非线性问题.2010年, Hochbruck 和 Ostermann 在数学期刊“Acta Numerica”上发表了指数时间积分的综述文章^[12].

本文将基于 Rosenbrock 型指数积分方法与间断有限元方法结合,空间上使用间断有限元方法进行离散,时间上采取 Rosenbrock 型指数积分方法进行时间递进,提出了 Rosenbrock 型指数积分全局显式时间推进的间断有限元方法.

1 一维间断有限元

为了简便,以一维标量双曲守恒律方程为例,推导一维间断有限元方法^[13]

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad x \in [L, R] = \Omega. \quad (1)$$

将 Ω 剖分为 K 个非重叠单元

$$\Omega \approx \Omega_h = \bigcup_{k=1}^K D^k, \quad D^k = [x_l^k, x_r^k].$$

本文选取的基函数为基于 Legendre-Gauss-Lobatto 节点的 Lagrange 插值基函数.若是每个单元 $D^k = [x_l^k, x_r^k]$ 上有 N 个节点,则可以得到有限元空间为

$$V_h = \{l: l \in P^{N-1}(D^k), \forall x \in D^k, k = 1, 2, \dots, K\}.$$

在每个单元 D^k 上,局部解可以表示为

$$u_h^k(x, t) = \sum_{i=1}^N u_h^k(x_i^k, t) l_i^k(x), \quad x \in D^k, \quad (2)$$

且 $f(u)$ 可以投影到对应单元的有限元空间,表示为

$$f_h^k(u_h(x, t)) = \sum_{i=1}^N f^k(x_i, t) l_i^k(x), \quad x \in D^k. \quad (3)$$

将式(2)和(3)代入方程(1),再将基函数乘到方程两边,并在空间进行积分,对空间微分项使用 Gauss 积分公式,可得间断有限元方法的弱形式:

$$\int_{D^k} \left(\frac{\partial u_h^k}{\partial t} l_i^k(x) - f_h^k(u_h^k) \frac{dl_i^k}{dx} \right) dx = - [f^* l_i^k(x)]_{x_l^k}^{x_r^k}. \quad (4)$$

再使用间断有限元方法的强形式,即

$$\int_{D^k} \left(\frac{\partial u_h^k}{\partial t} + \frac{\partial f_h^k(u_h^k)}{\partial x} \right) l_i^k(x) dx = [(f_h^k(u_h^k) - f^*) l_i^k(x)]_{x_l^k}^{x_r^k}, \quad (5)$$

其中, f^* 为数值流通量,它的选取方法可参见文献[1,3],本文中选取 Lax-Friedrichs 通量.在理论推导过程中,强形式与弱形式是等价的,但是通过分析可以发现,弱形式不允许非光滑的试

验函数,所以只考虑强形式方程.在每一个单元 D^k 上很容易得到强形式的方程组

$$\mathbf{M}^k \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{u}_h^k + \mathbf{S}^k \cdot \mathbf{f}_h^k(\mathbf{u}_h^k) = [(\mathbf{f}_h^k - \mathbf{f}^*) \cdot \mathbf{l}^k(x)]_{x_r^k}, \quad (6)$$

其中

$$\mathbf{l}^k = [l^k(x_1^k), l^k(x_2^k), \dots, l^k(x_N^k)]^T, \quad \mathbf{u}_h^k = [u_h^k(x_1^k), u_h^k(x_2^k), \dots, u_h^k(x_N^k)]^T, \\ \mathbf{f}_h^k = [f_h^k(x_1^k), f_h^k(x_2^k), \dots, f_h^k(x_N^k)]^T,$$

局部矩阵

$$\mathbf{M}_{ij}^k = \int_{D^k} l_i^k(x) l_j^k(x) dx, \quad \mathbf{S}_{ij}^k = \int_{D^k} l_i^k(x) \frac{dl_j^k(x)}{dx} dx.$$

设 $\mathbf{D}_{r,(i,j)} = \left. \frac{dl_j}{dr} \right|_{r_i}$, 其中 r 表示标准单元上的 Legendre-Gauss-Lobatto 节点. 通过推导可知

$(\mathbf{MD}_r)_{(i,j)} = \mathbf{S}_{ij}$, 即得 $\mathbf{MD}_r = \mathbf{S}$, 所以 $\mathbf{D}_r = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}$, 所以式(6)可改写为

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}_h^k = -\mathbf{D}_r \cdot \mathbf{f}_h^k(\mathbf{u}_h^k) + (\mathbf{M}^k)^{-1} \cdot [(\mathbf{f}_h^k - \mathbf{f}^*) \cdot \mathbf{l}^k]_{x_r^k}. \quad (7)$$

这样,每个单元上都有一个与时间相关的常微分方程组,此时可以用 TVD-Runge-Kutta 时间递进方法^[14]求解.不过,Shu 和 Cockburn 指出,TVD-RKDG 方法的 CFL 条件数是受到限制的,可见文献[3].

2 Rosenbrock 型指数积分方法

本节对间断有限元的半离散格式(7)做时间离散.将式(7)写成常微分方程组的形式

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{U}), \quad (8)$$

这里, $\mathbf{U} = ((\mathbf{u}_h^1)^T, (\mathbf{u}_h^2)^T, \dots, (\mathbf{u}_h^k)^T)^T$, \mathbf{u}_h^k 表示在间断有限元方法中第 k 个单元上的自由度; $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 是 \mathbf{U} 的函数,它可以是线性项,也可以是非线性项.在时间方向上做剖分: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots, h_n = t_{n+1} - t_n$. 用 \mathbf{U}^n 表示 t_n 时刻解析解 $\mathbf{U}(t)$ 的数值逼近.在 $[t_n, t_{n+1}]$ 时间区间内,将上式线性化为

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{J}_n \mathbf{U} + \mathbf{g}_n(\mathbf{U}),$$

其中 $\mathbf{J}_n = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U}_n, \mathbf{g}_n(\mathbf{U}) = \mathbf{F}(\mathbf{U}) - \mathbf{J}_n \mathbf{U}$.

对上式应用显式指数 RK 格式,可以获得如下的显式一步方法:

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{n,i} = e^{c_i h_n \mathbf{J}_n} \mathbf{U}^n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(h_n \mathbf{J}_n) \mathbf{g}_n(\mathbf{U}^{n,j}), & 1 \leq i \leq s, \\ \mathbf{U}^{n+1} = e^{h_n \mathbf{J}_n} \mathbf{U}^n + h_n \sum_{i=1}^s b_i(h_n \mathbf{J}_n) \mathbf{g}_n(\mathbf{U}^{n,s}), \end{cases} \quad (9)$$

其中, $a_{ij}(z), b_i(z), c_i$ 是参数,而 \mathbf{U}^{n+1} 是在 t_{n+1} 时刻的数值逼近, $\mathbf{U}^{n,i}$ 是逼近于 $t_n + c_i h_n$ 时刻的解数值.参数 c_i 是常数, $0 \leq c_i \leq 1$. 参数 $b_i(z)$ 由指数矩阵函数 $\varphi_k(z)$ 的线性组合构成, $\varphi_k(z)$ 的表示如下:

$$\varphi_k(z) = \int_0^1 e^{(1-\sigma)z} \frac{\sigma^{k-1}}{(k-1)!} d\sigma, \quad k \geq 1.$$

该函数满足递推关系

$$\varphi_k(z) = \frac{\varphi_{k-1}(z) - \varphi_{k-1}(0)}{z}, \varphi_0(z) = e^z.$$

而参数 $a_{ij}(z)$ 是 $\varphi_k(c_i z)$ 的线性组合. 这样, 方程(9)被称为 Rosenbrock 型指数积分方法^[11-12,15] (RE method). 不同阶数的 Rosenbrock 型指数积分方法要满足不同的阶条件(见表 1). 下面给出具体的阶条件以及格式.

如果 $\mathbf{g}_n = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{F}(U) = \mathbf{J} \cdot U$, \mathbf{J} 是常数矩阵. 在时间区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 上, 有

$$U^{n+1} = e^{h_n J_n} U^n. \tag{10}$$

如果 $\mathbf{g}_n \neq \mathbf{0}$, 则可得 2 阶 Rosenbrock 型指数积分格式 (RE2) 和 3 阶 Rosenbrock 型指数积分格式 (RE3).

2 阶格式 (RE2)

$$U^{n+1} = e^{h_n J_n} U^n + h_n \varphi_1(h_n J_n) \mathbf{g}_n(U^n).$$

3 阶格式 (RE3)

$$U^{n,1} = U^n,$$

$$U^{n,2} = e^{h_n J_n} U^n + h_n \varphi_1(h_n J_n) \mathbf{g}_n(U^{n,1}),$$

$$U^{n+1} = e^{h_n J_n} U^n + h_n (\varphi_1 - 2\varphi_3)(h_n J_n) \mathbf{g}_n(U^{n,1}) + 2h_n \varphi_3(h_n J_n) \mathbf{g}_n(U^{n,2}).$$

表 1 Rosenbrock 型指数积分方法的阶条件

Table 1 Order condition of exponential Rosenbrock-type methods

No.	order condition	order
1	$\sum_{i=1}^s b_i(hJ) = \varphi_1(hJ)$	1
2	$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(hJ) = c_i \varphi_1(c_i hJ), 2 \leq i \leq s$	2
3	$\sum_{i=2}^s b_i(hJ) c_i^2 = 2\varphi_3(hJ)$	3

3 数值实验

我们把 Rosenbrock 型指数积分全局显式时间推进的间断有限元方法简记为 REDG 方法.

算例 1 一维的线性对流方程

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & x \in [0, 2\pi], t \in [0, T], \\ u_0 = \sin(2x), \end{cases}$$

取周期边界条件. 显然, 这个方程的解析解为 $u(x, t) = \sin(2x - 2t)$. 不妨取 $T = 10$, 分别采用 REDG 方法和 RKDG 方法求解此方程. 在 RKDG 方法中, 时间上选用 2 阶的 TVD-Runge-Kutta 方法^[2]. 这个算例的目的是要说明对于一维线性对流方程, 本文方法可以快速求解.

表 2 一维线性对流方程, $\Delta x = 0.0125$ 的结果

Table 2 Numerical results for 1D linear advection equation while $\Delta x = 0.0125$

spatial order	REDG		RKDG	
	CUP time t/s	error L_2	CUP time t/s	error L_2
2	0.031 3	0.002 3	0.281 3	0.054 5
3	0.140 6	3.840 3E-005	0.593 8	0.046 6
4	0.312 5	3.834 0E-007	1.093 8	7.137 1E-005

表 3 一维线性对流方程,空间 2 阶精度的结果

Table 3 Numerical results for 1D linear advection equation while spatial order is 2

mesh number	REDG		RKDG	
	CUP time t/s	error L_2	CUP time t/s	error L_2
40	0.031 3	0.011 8	0.125 0	0.099 2
80	0.031 3	0.002 3	0.281 3	0.054 5
160	0.359 4	5.311 1E-004	0.625 0	0.028 9

表 2 是不同空间阶数情况下,两种方法求解所需的 CPU 时间和求解结果的误差 L_2 的比较.表 3 是不同空间网格数情况下,两种方法求解所需的 CPU 时间和求解结果的误差 L_2 的比较.从表 2 和表 3 中可以看出,REDG 方法的所需的 CPU 时间小于 RKDG 方法的 CPU 时间,同时,计算误差也小于 RKDG 方法的计算误差.总之,对于一维线性守恒律问题,Rosenbrock 型指数积分全局显式时间推进的间断有限元方法可以很迅速地求解.

算例 2 一维无粘 Burgers 方程

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{1}{2} u^2\right)_x = 0, & x \in [0, 1], t \in [0, T], \\ u_0 = 0.25 - 0.5 \sin(2\pi x), \end{cases}$$

取周期边界条件.由于这是一个非线性方程,精确解无法用表达式给出,所以选择空间网格数为 800,7 阶空间精度,4 阶时间精度的 RKDG 方法的结果作为精确解.

首先,考虑解仍然光滑的情况.表 4 是 $T = 0.15$, 80 网格情况下,时间 2 阶、空间 2 阶的 REDG 方法和 RKDG 方法在不同 CFL 条件下解的最大绝对误差对比.记 N_{CFL} 为 CFL 条件数,则 $\Delta t = N_{CFL} \times \Delta x$.当 $N_{CFL} = 0.4$ 的时候,RKDG 方法的结果已经坏掉,但是 REDG 方法的结果仍然很好.表 4 的结果表明,对于非线性问题,REDG 方法可以在保证计算精度的同时,增大 N_{CFL} ,增大时间步长.表 5 是不同空间网格数情况下, $N_{CFL} = 0.2$ 的时间 2 阶 REDG 方法和 $N_{CFL} = 2$ 的时间 2 阶 RKDG 方法的 L_2 误差以及误差阶的比较.随着空间网格数的增加,两种方法的误差都会减小,但是两种方法之间的误差及误差阶相差并不大.表 5 的结果表明,REDG 方法在较大时间步长的情况下,仍满足网格的 h 自适应性.

表 4 $T = 0.15$ 时, $\Delta x = 0.0125$, 不同 CFL 条件下解的最大绝对误差

Table 4 Maximum absolute errors for different CFL conditions while $T = 0.15$, $\Delta x = 0.0125$

N_{CFL}	REDG	RKDG
0.2	2.260 6E-004	4.864 7E-004
0.4	2.258 4E-004	—
1.0	2.279 8E-004	—
3.0	3.969 9E-004	—
5.0	0.001 2	—

表 5 一维无粘 Burgers 方程, $T = 0.15$, 空间 2 阶精度的结果

Table 5 Numerical results for 1D inviscid Burgers equation while spatial order is 2, $T = 0.15$

mesh number K	REDG ($N_{CFL} = 2$)		RKDG ($N_{CFL} = 2$)	
	error L_2	order	error L_2	order
40	0.002 3	—	0.001 4	—
80	6.929 5E-004	1.730 8	3.455 0E-004	2.018 7
160	1.921 7E-004	1.850 4	8.746 3E-005	1.981 9

其次,考虑解出现间断的情况.当 $T = 1/\pi$ 时,解在 0.08 处出现间断.当 $T = 0.55$ 时,解在 0.14 处出现间断.取网格数为 80, $N_{\text{CFL}} = 2$, 使用时间 2 阶 REDG 方法求解,图 1 和图 2 分别是 $T = 1/\pi$ 和 $T = 0.55$ 的结果.从结果中可以看出,解出现间断时,该方法尽管增大了 CFL 条件,仍然可以很好的捕捉到间断.

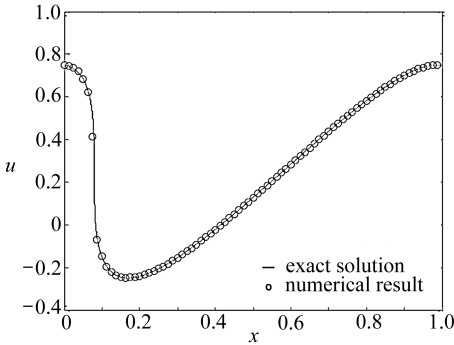


图 1 $N_{\text{CFL}} = 2, T = 1/\pi$ 的数值解

Fig. 1 Numerical result while $N_{\text{CFL}} = 2, T = 1/\pi$

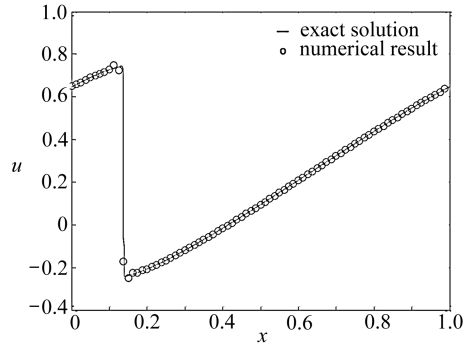


图 2 $N_{\text{CFL}} = 2, T = 0.55$ 的数值解

Fig. 2 Numerical result while $N_{\text{CFL}} = 2, T = 0.55$

4 结 论

本文提出的基于 Rosenbrock 型指数积分的间断 Galerkin 有限元方法,将 Rosenbrock 型指数时间积分融入了间断有限元方法中,从而继承了在空间上具有间断有限元方法高精度,能灵活处理间断等优点,在时间上具有显式大步长,强稳定的指数时间积分的特点.在数值实验中也表明,该方法对于一维线性双曲守恒律方程,可以快速求解;对于一维非线性双曲守恒律方程在增大 CFL 条件的情况下,仍然能够很好地捕捉间断.本文的方法已经很好地应用到一维问题,进一步的工作将考虑高维非线性偏微分方程和复杂几何区域上非结构网格的应用.

参考文献 (References):

- [1] Cockburn B, Shu C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: general framework[J]. *Math Comp*, 1989, **52**(186): 411-435.
- [2] Cockburn B, Shu C W. Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2001, **16**(3): 173-261.
- [3] 蔚喜军, 周铁. 流体力学方程的间断有限元方法[J]. 计算物理, 2005, **22**(2): 108-116. (YU Xi-jun, ZHOU Tie. Discontinuous finite element methods for solving hydrodynamic equations [J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2005, **22**(2): 108-116. (in Chinese))
- [4] 陈二云, 马大为. 间断有限元在弹尾超音速喷流计算中的应用[J]. 计算物理, 2008, **25**(6): 705-710. (CHEN Er-yun, MA Da-wei. Discontinuous finite element method for supersonic flow of a missile propulsive jet [J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2008, **25**(6): 705-710. (in Chinese))
- [5] 何朝葵, 速宝玉, 盛金昌. 稳定渗流分析的局部间断伽辽金有限元法[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2012, **40**(2): 206-210. (HE Zhao-kui, SU Bao-yu, SHENG Jin-chang. Local discontinuous Galerkin finite element method for steady seepage analysis [J]. *Journal of Hohai University(Natural Sciences)*, 2012, **40**(2): 206-210. (in Chinese))
- [6] 徐云, 蔚喜军. 自适应间断有限元方法求解双曲守恒律方程[J]. 计算物理, 2009, **26**(2): 159-

168. (XU Yun, YU Xi-jun. Adaptive discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2009, **26**(2): 159-168. (in Chinese))
- [7] 郝海兵, 杨永, 李喜乐. p 型多重网格间断 Galerkin 有限元方法研究[J]. *空气动力学学报*, 2010, **12**(6): 715-719. (HAO Hai-bing, YANG Yong, LI Xi-le. The research of p -multigrid solution for high-order discontinuous Galerkin finite element method[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2010, **12**(6): 715-719. (in Chinese))
- [8] Minchev B V, Wright W M. A review of exponential integrators for first order semi-linear problems[R]. NTNU: Tech Rep, 2005: 1-44.
- [9] Celledoni E, Marthinsen A, Owren B. Commutator-free Lie group methods[J]. *Future Generation Computer Systems*, 2003, **19**(3): 341-352.
- [10] Kassam A K, Trefethen L N. Fourth-order time-stepping for stiff PDEs[J]. *SIAM J Sci Comput*, 2005, **26**(4): 1214-1233.
- [11] Hochbruck M, Ostermann A, Schweitzer J. Exponential Rosenbrock-type methods[J]. *SIAM J Numer Anal*, 2009, **47**(1): 786-803.
- [12] Hochbruck M, Ostermann A. Exponential integrators[J]. *Acta Numerica*, 2010, **19**: 209-286.
- [13] Hesthaven J S, Warburton T. *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications*[M]. New York: Springer, 2008.
- [14] Gottlieb S, Shu C W. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes[J]. *Mathematics of Computation*, 1998, **67**(221): 73-85.
- [15] Caliarì M, Ostermann A. Implementation of exponential Rosenbrock-type integrators[J]. *Applied Numerical Math*, 2009, **59**(3): 568-581.

1D Discontinuous Galerkin Finite Element Method Based on Rosenbrock-Type Exponential Integrator

CHEN Ye-fei¹, LI Wen-cheng¹, DENG Zi-chen²

(1. Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P. R. China;

2. Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P. R. China)

Abstract: A new Rosenbrock-type exponential discontinuous Galerkin method was developed. The method used discontinuous Galerkin method to discretize in space, while Rosenbrock-type exponential integrator method in time. Therefore, it not only has high accuracy to discretize in space, but also has excellent ability of explicit time marching with large time step. The numerical tests demonstrate that the method is effective for problems of 1D hyperbolic conservation laws.

Key words: discontinuous Galerkin method; Rosenbrock-type exponential integrator; explicit time integration; large time-step