

求解流固耦合问题的一种 四步分裂有限元算法*

王华坤¹, 洪国军^{1,2}, 杨闻宇¹, 喻国良¹

(1. 上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240;
2. 中交上海航道勘察设计研究院有限公司, 上海 200120)

摘要: 基于 arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) 有限元方法, 发展了一种求解流固耦合问题的弱耦合算法. 将半隐式四步分裂有限元格式推广至求解 ALE 描述下的 Navier-Stokes (N-S) 方程, 并在动量方程中引入迎风流线 (streamline upwind/Petrov-Galerkin, SUPG) 稳定项以消除对流引发的速度场数值振荡; 采用 Newmark- β 法对结构方程进行时间离散; 运用经典的 Galerkin 有限元法求解修正的 Laplace 方程以实现网格更新, 每个计算步施加网格总变形量防止结构长时间、大位移运动时的网格质量恶化. 运用上述算法对弹性支撑刚性圆柱体的流致振动问题进行了数值模拟, 计算结果与已有结果相吻合, 初步验证了该算法的正确性和有效性.

关键词: ALE 有限元; 流固耦合; 半隐式四步分裂; 修正 Laplace 方程; 网格更新

中图分类号: O357.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.07.005

引 言

近年来, 利用有限元方法求解流体与流固耦合问题是工程及科学计算领域的热点方向之一. 有限元方法不仅可以求解具有复杂几何边界流体的流动问题, 而且在网格较粗的情况下, 还能通过采用高阶插值函数来提高计算精度. 但是, 由于不可压缩流体 N-S 方程的混合特性, 当采用不恰当的插值函数时会导致压力场的伪振荡. 为此, 国内外学者提出了多种稳定化有限元格式, 例如, 为避免不可压缩流动 Babuška-Brezzi (B-B) 条件而提出的 Galerkin 最小二乘法^[1], 压力稳定化 Petrov-Galerkin 格式^[2] 以及有限增量法^[3] 等. 分裂步骤法也是其中之一, 该方法通过算子分裂解耦求解流场速度和压力, 被认为是一种高效、稳定的流体方程数值解法. 分裂法最早是 Chorin^[4] 在有限差分法中针对不可压缩流动问题提出, 随后由 Donea 等^[5] 引入到有限元公式中, 经过多年的发展, 已经在众多流动问题得到了广泛应用.

对于分裂步骤法, 若在分裂步中完全不考虑压力项, 则该算法具有时间方向一阶精度; 而将压力梯度项保留于分裂步则时间方向精度可达到二阶, 但会失去压力场稳定性. 二阶精度分裂步骤法成功应用于有限差分法中, 但因面临压力场伪振荡问题, 直接推广到有限元方法会遇到一些很困难. 最近 Choi 等^[6] 提出了一种具有二阶时间精度并能够保证压力稳定的四步分裂

* 收稿日期: 2013-03-27; 修订日期: 2013-05-28

基金项目: 国家高技术研究发展计划项目 (2007AA09Z312)

作者简介: 王华坤 (1985—), 男, 河北人, 博士生 (E-mail: hkwang@sjtu.edu.cn);

喻国良 (1963—), 男, 教授, 博士生导师 (通讯作者. E-mail: yugl@sjtu.edu.cn).

有限元格式,用于求解各种单相流问题;之后 Choi^[7]又通过该算法求解 ALE 描述下统一的流体-粒子耦合方程,解决了单个或多个粒子在重力作用下在流体中运动的多相流问题,但求解过程比较复杂。另外,采用四步分裂有限元法求解流体运动方程并进行流固弱耦合动力分析的做法,国内外鲜有报道。

本文将四步分裂法推广至求解 ALE 描述下的 N-S 方程,推导了 N-S 方程的半隐式四步分裂有限元格式及离散形式,然后结合刚体运动方程和基于修正的 Laplace 方程的非结构化动网格技术,构建了一种简单、有效的流固弱耦合算法,并用该算法对弹性支撑刚性圆柱体的流致振动问题进行了求解。

1 数值算法

1.1 流体控制方程及数值求解

流体控制方程为 ALE 描述下的不可压缩粘性流体 Navier-Stokes (N-S) 方程,其无量纲张量形式表示为

$$u_{i,i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + c_j u_{i,j} = \sigma_{ij} + f_i, \quad (2)$$

式中, u_i 为速度, t 为时间, f_i 为体积力, 对流速度 $c_j = u_j - w_j$, w_j 为网格速度, σ_{ij} 为流体应力张量, 表示为

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{1}{Re}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3)$$

式中, p 为压力, δ_{ij} 表示单位张量, Reynolds 数 $Re = \rho U_\infty D / \mu$, D 和 U_∞ 分别为特征长度和特征速度, ρ 为流体密度, μ 为流体动力学粘性系数。N-S 方程的边界条件为

$$u_i = g_i \mid_{\Gamma_g}, \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} n_j \mid_{\Gamma_h} = h_i, \quad (5)$$

式中, Γ_g 和 Γ_h 分别为 Neumann 边界和 Dirichlet 边界, g_i 和 h_i 分别为边界上的已知量, n_j 为边界法向单位向量。

本文采用四步分裂算法^[6]将 N-S 方程的速度计算和压力计算解耦。首先,求解保留压力梯度项的动量方程,再进行初步修正得到辅助速度;其次,鉴于辅助速度并不满足连续性方程,将连续性条件施加于下一时刻速度场得到压力 Poisson 方程,求解该方程得出压力场;最后,由新的压力场修正辅助速度从而得到下一时刻速度场。ALE 描述下 N-S 方程的半隐式四步分裂过程为

$$\frac{\hat{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + c_j^n \hat{u}_{i,j} = \frac{1}{2Re} [(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,j} + (\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i})_{,j}] - p_{,i}^n - f_i, \quad (6)$$

$$\frac{u_i^* - \hat{u}_i}{\Delta t} = p_{,i}^n, \quad (7)$$

$$p_{,ij}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} u_{i,i}^*, \quad (8)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} = -p_{,i}^{n+1}. \quad (9)$$

为消除经典的 Galerkin 有限元法在处理流体对流问题时引发的速度解数值振荡,本文对动量方程(6)的空间离散采用流线迎风 SUPG (streamline upwind/Petrov-Galerkin)^[8]有限元格式,其稳定化弱解积分形式为

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \delta u_i \left(\frac{\hat{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + c_j^n \hat{u}_{i,j} - f_i \right) d\Omega + \\
& \int_{\Omega} \delta u_{i,j} \left\{ \frac{1}{2Re} [(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n) + (\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i})] - p^n \delta_{ij} \right\} d\Omega - \\
& \int_{\Gamma^h} \delta u_i h_i d\Gamma + \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} \tau_s c_k^n \delta u_{i,k} \left\{ \frac{\hat{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + c_j^n \hat{u}_{i,j} - \right. \\
& \left. \frac{1}{2Re} [(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,j} + (\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i})_{,j}] + p_{,i}^n - f_i \right\} d\Omega = 0, \quad (10)
\end{aligned}$$

其中, N_e 表示单元数, δu_i 为速度变分函数, τ_s 为稳定化参数, 其计算式为

$$\tau_s = \frac{zh^e}{2 \|c^e\|}, \quad z = \coth(Pe) - \frac{1}{Pe}, \quad Pe = \frac{\|c^e\| h^e}{2\nu}, \quad (11)$$

式中, h^e , c^e 和 Pe 分别表示单元特征尺度、单元质心处对流速度和单元 Peclet 数, z 为过程参数. 单元的特征尺度 h^e 定义为与单元面积相等的圆直径.

采用经典的 Galerkin 有限元法求解速度修正方程(7)、(9)和压力 Poisson 方程(8), 弱积分形式为

$$\int_{\Omega} \delta u_i \left(\frac{u_i^* - \hat{u}_i}{\Delta t} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \delta u_i p_{,i}^n d\Omega, \quad (12)$$

$$\int_{\Omega} \delta p_{,i} p_{,i}^{n+1} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta p p_{,i}^{n+1} n_i d\Gamma - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \delta p u_{i,i}^* d\Omega, \quad (13)$$

$$\int_{\Omega} \delta u_i \left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \delta u_i p_{,i}^{n+1} d\Omega. \quad (14)$$

由于分裂算法避免了 B-B 条件, 速度和压力可采用同阶单元基函数, 即

$$u_i = u_{ij} \Phi_I, \quad p = p_I \Phi_I, \quad (15)$$

其中, u_{ij}, p_I 为节点 I 处的未知量, Φ_I 表示节点 I 处的形函数. 若变分函数 δu_i 和 δp 取为单元基函数, 并把式(15)代入方程(10)及(12)~(14), 则得到完全离散形式的有限元方程:

$$\left[M_{Sij}^n + \Delta t \left(C_{ij}^n + \frac{1}{2} D_{ij}^n \right) \right] \hat{u}_{ij} = M_{Sij}^n u_{ij}^n - \frac{1}{2} \Delta t D_{ij} u_{ij}^n + \Delta t (G_{ij}^n p_J^n + F_{ij}^n + H_{ij}^n), \quad (16)$$

$$M_{IJ} u_{ij}^* = M_{IJ} \hat{u}_{ij} + \Delta t A_{ij} p_J^n, \quad (17)$$

$$(B_{IJ} - E_{IJ}) p_J^{n+1} = - \frac{1}{\Delta t} A_{ij} u_{ij}^*, \quad (18)$$

$$M_{IJ} u_{ij}^{n+1} = M_{IJ} u_{ij}^* - \Delta t A_{ij} p_J^{n+1}, \quad (19)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned}
M_{Sij}^n &= \int_{\Omega^e} \Phi_I \Phi_J d\Omega + \int_{\Omega^e} \tau_s c_k^n \Phi_{I,k} \Phi_J d\Omega, \\
C_{ij}^n &= \int_{\Omega^e} \Phi_I c_j^n \Phi_{J,j} d\Omega + \int_{\Omega^e} \tau_s c_k^n \Phi_{I,k} c_j^n \Phi_{J,j} d\Omega, \\
D_{ij} &= \int_{\Omega^e} \frac{1}{Re} \Phi_{I,j} \Phi_{J,j} d\Omega, \quad G_{Sij}^n = \int_{\Omega^e} \Phi_{I,i} \Phi_J d\Omega - \int_{\Omega^e} \tau_s c_k^n \Phi_{I,k} \Phi_{J,i} d\Omega, \\
F_{ij}^n &= \int_{\Omega^e} \Phi_I f_i d\Omega + \int_{\Omega^e} \tau_s c_k^n \Phi_{I,k} f_i d\Omega, \\
H_{ij} &= \int_{\Gamma^h} \Phi_I h_i d\Gamma, \quad E_{IJ} = \int_{\Gamma^h} \Phi_I \Phi_{J,i} n_i d\Gamma, \\
A_{ij} &= \int_{\Omega^e} \Phi_{J,i} d\Omega, \quad B_{IJ} = \int_{\Omega^e} \Phi_{I,i} d\Omega.
\end{aligned} \right. \quad (20)$$

1.2 结构运动方程

流体动力作用下具有两自由度的弹性支撑刚性结构的运动可由质量-弹簧-阻尼系统来模拟,不考虑扭转自由度,并且假定结构在两个平动方向上的质量、阻尼和刚度相等,则结构运动方程的无量纲化形式可以表示为

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial t^2} + \frac{4\pi\zeta}{U_r} \frac{\partial X_i}{\partial t} + \frac{4\pi^2}{U_r^2} X_i = \frac{C_{f_i}}{2M_r}, \quad (21)$$

式中, $X_1 = X/D$, $X_2 = Y/D$, 分别为结构在 x 方向和 y 方向的位移. 结构阻尼比 $\zeta = c/(2\sqrt{km})$, 折合质量 $M_r = m/(\rho D^2)$, m , c 和 k 分别为结构的质量、阻尼和刚度, 折合速度 $U_r = U_\infty/(f_n D)$, 结构自然频率 $f_n = \sqrt{k/m}/(2\pi)$. 流体阻力系数为

$$C_{f_1} = C_D = \frac{2 \int_{\Gamma} \sigma_{xj} n_j d\Gamma}{\rho U_\infty^2 D},$$

升力系数为

$$C_{f_2} = C_L = \frac{2 \int_{\Gamma} \sigma_{yj} n_j d\Gamma}{\rho U_\infty^2 D},$$

\mathbf{n}_j 为流固耦合界面朝向流体一侧的单位法线矢量. 本文采用 Newmark- β 时间积分法对结构运动方程(21)进行离散求解, 积分参数选取 $\alpha = 0.25$, $\beta = 0.5$.

1.3 网格运动

为了满足运动边界条件, 计算过程中需要不断地进行网格更新. 本文采用文献[9]的方法, 通过求解修正的 Laplace 方程得到网格节点位移, 从而获取新的网格. 修正的 Laplace 方程的边值问题表示为

$$[(1 + \tau) S_i]_{,j} = 0, \quad (22)$$

$$S_i = g_i |_{\Gamma_m}, S_i = 0 |_{\Gamma_f}, \quad (23)$$

式中, S_i 为网格节点位移 i 方向分量, Γ_m 和 Γ_f 分别为网格动边界和固定边界, g_i 是动边界上已知的节点位移, τ 是网格形变控制参数, 目的是避免动边界附近单元的过度变形, 而让形变量主要被远场网格吸收, 以保持接续时间步计算的单元质量. 在每个单元中, τ 采用文献[9]给出的定义:

$$\tau^e = \frac{1 - \Delta_{\min}/\Delta_{\max}}{\Delta^e/\Delta_{\max}}, \quad (24)$$

式中, Δ^e , Δ_{\min} 和 Δ_{\max} 分别表示当前计算单元、网格系统中最小单元及最大单元的面积(或体积).

采用经典的 Galerkin 有限元法得到方程(22)的弱解积分形式:

$$\int_{\Omega} \delta S_{i,j} S_{i,j} d\Omega + \sum_{e=1}^{N_e} \tau^e \int_{\Omega^e} \delta S_{i,j} S_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta S_{i,j} S_{i,j} \mathbf{n}_j d\Gamma. \quad (25)$$

其离散形式为

$$N_{IJ} S_{IJ} = L_I, \quad (26)$$

其中

$$N_{IJ} = \int_{\Omega^e} (1 + \tau^e) \Phi_{I,j} \Phi_{J,j} d\Omega, L_I = \int_{\Gamma_h} \Phi_I S_{i,j} \mathbf{n}_j d\Gamma. \quad (27)$$

需要说明的是, 本文将网格总变形量施加于每一计算步, 即 S_i^n 为第 n 时刻网格节点相对

于初始位置 x_i^0 的总位移,新的网格节点位置表示为

$$x_i^n = x_i^0 + S_i^n. \quad (28)$$

1.4 流固耦合计算步骤

本文采用流体域和固体域交错求解的弱耦合算法,主要步骤描述如下:

- 1) 给定 n 时刻的流体变量和结构变量;
- 2) 结构域求解,得到 t_{n+1} 时刻的结构位移、速度和加速度;
- 3) 网格域更新:通过求解修正的 Laplace 方程边值问题获得网格节点位移,并计算网格节点速度;
- 4) 流体域求解:在更新后的网格域上求解流体控制方程,得到 t_{n+1} 时刻的流体速度和压力,并通过表面流体应力积分得到作用于结构上的流体阻力和升力系数;
- 5) 返回至第 2) 步实施下一时刻计算,如此循环直至时间结束.

2 算例验证

2.1 圆柱单自由度流致振动

圆柱仅在横流向 (y 向) 振动,根据 Persillon 等^[10] 的建议,计算模型如图 1:上游距离 $L_1 = 12D$ (D 为圆柱直径),下游距离 $L_2 = 40D$,圆柱上下两侧边界距离 $W = 24D$. 为提高计算效率,整个网格域分为 3 个区域: A_1 为 Euler 域,域内节点保持固定不动; A_2 为 ALE 域,面积为 $10D \times 10D$,域内节点运动由修正的 Laplace 方程确定; A_3 为 Lagrange 域,圆环外径为 $1.4D$,内径为 D ,域内节点随结构一起做刚体运动. 边界条件如下:入口处速度为 $u_1 = U_\infty = 1, u_2 = 0$;出口速度梯度设为 0,压力为 0;上下边界为自由边界;圆柱表面为无滑移边界. 整个计算域划分为 27 680 个三角形单元和 14 080 个节点,时间步长取为 0.005.

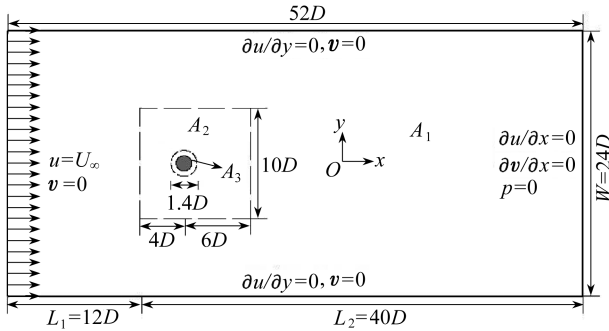


图 1 计算域及边界条件

Fig. 1 Computational domain and boundary conditions

考虑 Reynolds 数 $Re = 150$, 圆柱折合质量 $M_r = 2.0$, 阻尼比 $\zeta = 0$, 折合速度 $3 \leq U_r \leq 8$ 时的情况. 采用本文方法计算得到的圆柱横流向最大振幅响应及涡脱落频率 f_v 与结构自然频率 f_n 之比值随折合速度变化关系如图 2 所示. 从图 2 中可看出,在折合速度区间 $4 \leq U_r \leq 7$ 内圆柱振幅较大,并且涡脱落频率接近圆柱自然频率,即发生“锁定(lock-in)”现象,在 $U_r = 4$ 附近,出现最大振幅 0.56D,而在该区间外振幅明显减小. 本文得到的最大振幅响应比文献 [11-12] 计算结果略偏大,但变化趋势一致.

2.2 圆柱两自由度流致振动

圆柱在 x, y 向均可自由振动,计算模型如图 1 所示. 采用文献 [13] 中参数, Reynolds 数 $Re = 100$, 折合速度 $U_r = Re/16.6$, 折合质量 $M_r = 10.0\pi/4$, 结构阻尼比 $\zeta = 0$. 图 3 给出了 x 向

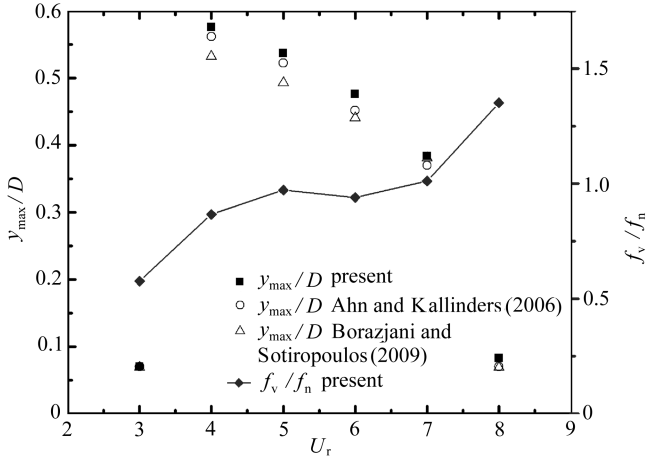


图2 最大振幅响应及频率比 f_v/f_n 随折合速度变化关系

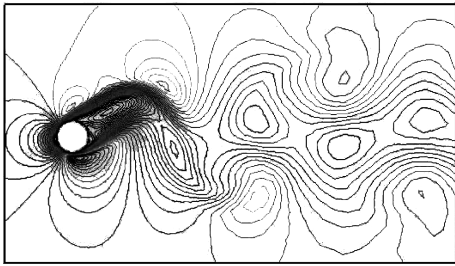
Fig.2 Maximum vibration amplitude and frequency ratio f_v/f_n vs. reduced velocity

速度等值线和压力等值线图,图中等值线呈现光滑,在圆柱附近处均未发现数值振荡.本文计算出的圆柱振动响应参数与文献结果对比如表1所示,可以看出本文结果与文献[13]给出的值相当接近.

表1 $Re = 100$ 时,圆柱两自由流致振动计算参数比较

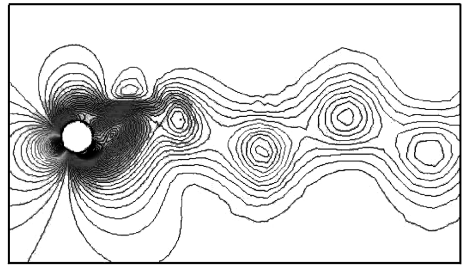
Table 1 Comparison of parameters for flow-induced vibration of a circular cylinder with two degrees of freedom at $Re = 100$

	St	y_{max}/D	x_{rms}/D	x_{mean}/D	$C_{L,max}$	$C_{D,rms}$	$C_{D,mean}$
present	0.164 9	0.532	0.005 15	0.110 9	0.194 0	0.258 1	1.89
ref. [13]	0.164 2	0.510	0.004 94	0.110 5	0.195 0	0.248 4	1.89



(a) x 向速度等值线

(a) x -component velocity contour



(b) 压力等值线

(b) Pressure contour

图3 $Re = 100$ 时, 流场模拟结果

Fig.3 Numerical results for flow field at $Re = 100$

此外分析 $Re = 200$ 情况下, 结构折合质量 $M_r = 1$, 等效阻尼系数 $S_g = 8\pi^2 St^2 \zeta M_r$, 取值 0.01, 0.1, 1, 10, 圆柱以频率比 $f_n/f_s^* = 1.30$ (f_s^* 为静止圆柱的涡脱落频率) 振动时的响应, Strouhal number (St) 根据文献[14] 取为 0.192 2. 图4为 $S_g = 0.01$ 时圆柱阻力系数、升力系数和横流向位移随时间的变化过程, 图中各时程曲线表现出稳定的周期性振动特性, 其中升力和阻力变化不同频, 阻力系数变化频率是升力系数变化频率的 2 倍. $S_g = 0.01$ 时瞬态涡量场如图 5 所示, 图中清晰地显示出, 圆柱尾流区出现分别由同向涡旋组成的两行符号相反的涡街, 与

文献[14]得到的涡脱落模式相同. 不同 S_g 下圆柱的运动轨迹如图6所示, 圆柱以经典的‘8’字形轨迹运动. 由于受到顺流向阻力, 圆柱顺流向平衡位置并不为0, 并随 S_g 的变化而变化. 图7为圆柱横流向最大振幅随 S_g 变化关系, 当 $0.01 \leq S_g \leq 0.1$ 时, 振幅变化平稳并保持在较大值; 而当 S_g 增至 10.0 时, 振幅迅速减小, 整个变化过程中圆柱横流向振幅始终限定在某一范围, 呈现出明显的“自限(self-limiting)”性, 此特征与文献[14-15]一致.

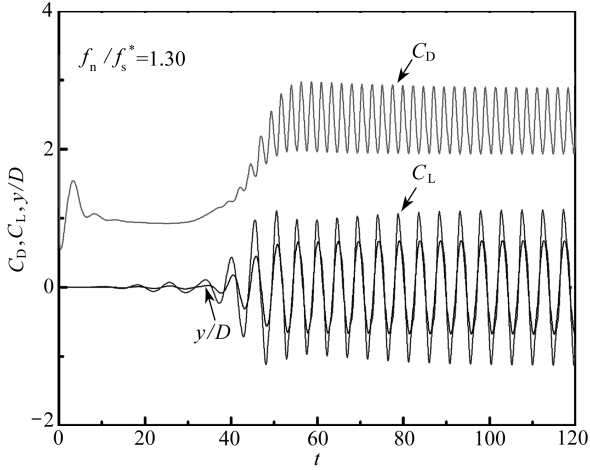


图4 $Re = 200$ 时的阻力系数、升力系数和位移时程曲线

Fig. 4 Time histories of drag, lift coefficients and displacement at $Re = 200$

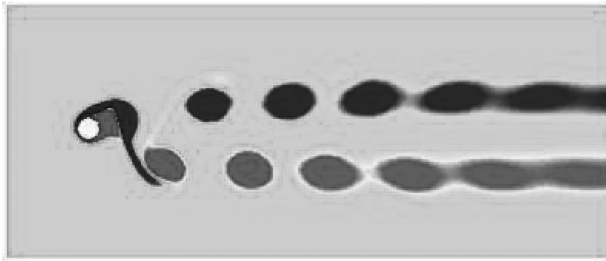
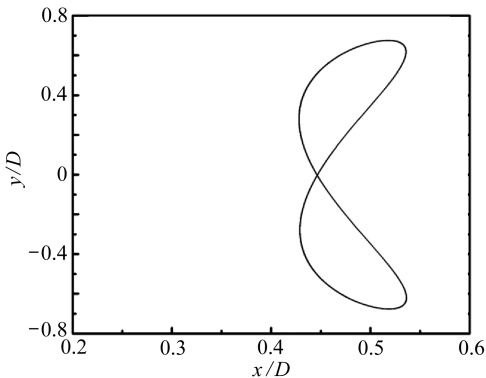
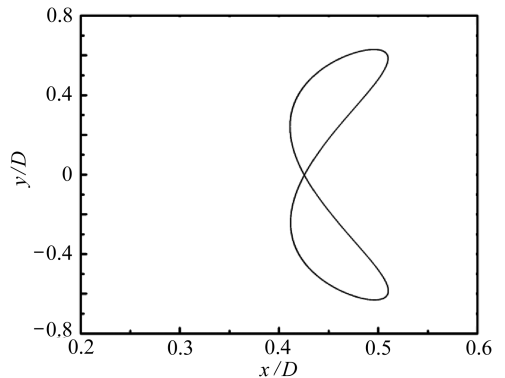


图5 $Re = 200$ 时的瞬态涡量场

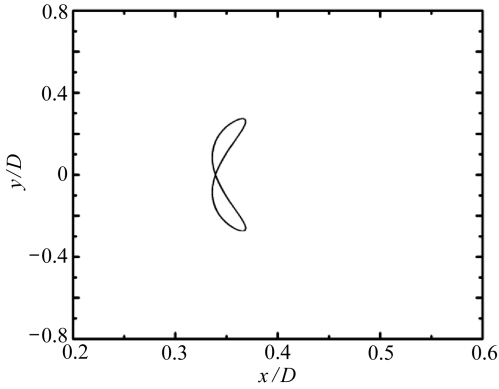
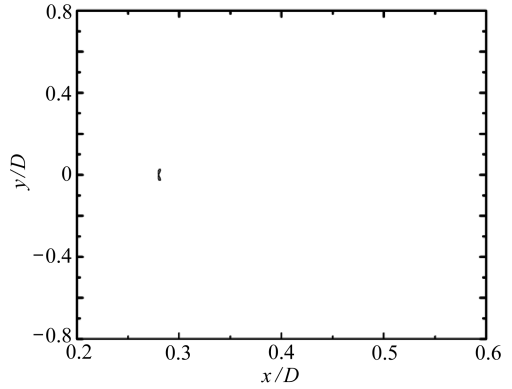
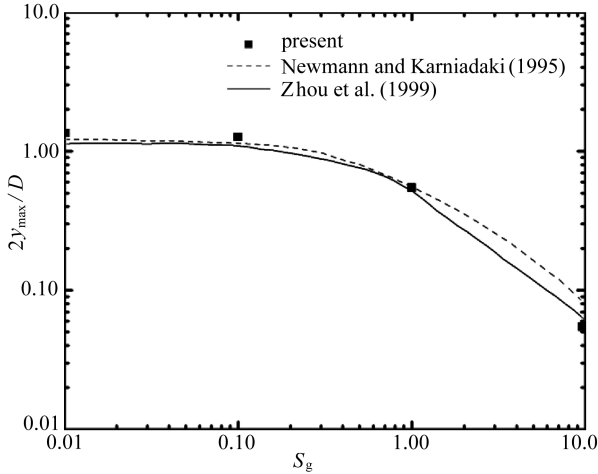
Fig. 5 Instantaneous vorticity field at $Re = 200$



(a) $S_g = 0.01$



(b) $S_g = 0.1$

(c) $S_g = 1$ (d) $S_g = 10$ 图6 不同等效阻尼系数 S_g 下圆柱的“8”字形运动轨迹Fig.6 Vibration trajectories of the cylinder with different values of S_g 图7 最大振幅响应随 S_g 变化关系Fig.7 Maximum vibration amplitude vs. S_g

3 结 论

针对流固耦合问题,本文发展了一种简单有效的四步分裂 ALE 有限元弱耦合算法,并给出了流体和动网格方程的计算过程.将该算法应用于圆柱单自由度和两自由度流致振动问题的数值模拟,得到了动网格下光滑的流体压力场和速度场,再现了经典文献中提到的圆柱流致振动“锁定”现象及“自限”性,并且计算出的关键参数与已有文献结果吻合良好,表明了本文方法在流固耦合数值模拟中的可行性和有效性.

参考文献(References):

- [1] Tezduyar T E, Behr M, Liou J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces—the deforming-spatial-domain/space-time procedure—I: the concept and the preliminary numerical tests[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics*

- and Engineering*, 1992, **94**(3): 339-351.
- [2] Hughes T J R, Franca L P, Balestra M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics—V: circumventing the Babuška-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1986, **59**(1): 85-99.
- [3] Onate E. A stabilized finite element method for incompressible viscous flows using a finite increment calculus formulation [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, **182**(3/4): 355-370.
- [4] Chorin A J. Numerical solutions of the Navier-Stokes equations [J]. *Mathematics of Computation*, 1968, **22**(104): 745-762.
- [5] Donea J, Giuliani S, Laval H. Finite element solution of the unsteady Navier-Stokes equations by a fractional step method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1982, **30**(1): 53-73.
- [6] Choi H G, Choi H, Yoo J Y. A fractional four-step element formulation of the unsteady incompressible Navier-Stokes equations using SUPG and linear equal-order element methods [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, **143**(3/4): 333-348.
- [7] Choi H G. Splitting method for the combined formulation of the fluid-particle problem [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, **190**(11/12): 1367-1368.
- [8] Brooks A N, Hughes T J R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1982, **32**(1/3): 199-259.
- [9] Masud A, Bhanabagyanwala M, Khurram R A. An adaptive mesh rezoning scheme for moving boundary flows and fluid-structure interaction [J]. *Computers and Fluids*, 2007, **36**(1): 77-91.
- [10] Persillon H, Braza M. Physical analysis of the transition to turbulence in the wake of a circular cylinder by three-dimensional Navier-Stokes simulation [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1998, **365**: 23-88.
- [11] Ahn H T, Kallinderis Y. Strongly coupled flow/structure interactions with a geometrically conservative ALE scheme on general hybrid meshes [J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, **219**(2): 671-696.
- [12] Borazjani I, Sotiropoulos F. Vortex-induced vibrations of two cylinders in tandem arrangement in proximity-wake-interference region [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2009, **621**: 321-364.
- [13] Prasanth T K, Mittal S. Vortex-induced vibrations of a circular cylinder at low Reynolds numbers [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2008, **594**: 463-491.
- [14] Zhou C Y, So R M C, Lam K. Vortex-induced vibrations of an elastic circular cylinder [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1999, **13**(2): 165-189.
- [15] Newmann D J, Karniadaki G E. Direct numerical simulations of flow over a flexible cable [C]//Bearman P W ed. *Flow-Induced Vibration*. Rotterdam: Balkema, 1995: 193-203.

A Four-Step Fractional Finite Element Method for Fluid-Structure Interaction

WANG Hua-kun¹, HONG Guo-jun^{1,2}, YANG Wen-yu¹, YU Guo-liang¹

(1. *School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering,
Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, P. R. China;*

2. *Shanghai Waterway Engineering Design and Consulting Co Ltd,
Shanghai 200120, P. R. China*)

Abstract: A loosely-coupled algorithm for fluid-structure interaction based on arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) finite element method was proposed. The semi-implicit four-step fractional finite element method was extended to solve Navier-Stokes equations of ALE description, where the streamline upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) stabilization term was added to the momentum equation to eliminate numerical oscillations of the velocity field. The temporal integration of the equation of motion for the structure was done with a Newmark- β algorithm while the mesh updating was performed based on the modified Laplace equation solved by a standard Galerkin FEM. The entire deformation was imposed at each time step in order to avoid deterioration in mesh quality with long-term and large amplitude oscillations or deformations. The proposed method was applied to the numerical simulations on flow-induced vibrations of an elastically mounted circular cylinder with one and two degrees of freedom. Numerical results show good agreement with the existing solutions and suggest that the present method is competitive in terms of accuracy and efficiency.

Key words: ALE finite element method; fluid-structure interaction; semi-implicit four-step fraction; modified Laplace equation; mesh updating