文章编号:1000-0887(2013)07-0724-12

基于忆阻的时滞神经网络的全局稳定性*

胡　进,　宋乾坤

(重庆交通大学 理学院, 重庆 400074)

(我刊编委宋乾坤来稿)

摘要: 忆阻是近年来新发现的一类非线性电子元件. 与通常的电阻不同,忆阻的阻值会随着通过的电流量的大小和方向不同而改变. 这个特性使得忆阻具有了记忆的功能,在很多方面有着广泛的应用. 该文给出了简化的忆阻的数学模型,基于该模型构造了时滞神经网络,利用微分包含理论、Lyapunov 方法和同胚映射原理研究了其全局渐近稳定性问题,确保模型平衡点存在性、唯一性和一致全局渐近稳定性的充分条件被获得. 最后提供的具有仿真的例子验证了获得的理论结果.

关 键 词: 忆阻; 神经网络; 全局一致渐近稳定性

中图分类号: O175.13　　**文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.07.007

引　言

1971 年,加州大学伯克利分校(University of California, Berkeley)的蔡少棠(Leon O. Chua)教授,在研究电荷、电流、电压和磁通量之间的关系时,推断在电阻、电容和电感器这三大基本电子元件之外,应该还有一种元件,代表着电荷与磁通量之间的关系. 他将其命名为 memristor(忆阻),是 memory(记忆)和 resistor(电阻)两个词的缩写. 这种元件的效果,就是它的电阻会随着通过的电流量而改变,而且就算电流停止了,它的电阻仍然会停留在之前的值,直到接受到反向的电流它才会被推回去. 用常见的水管来比喻,电流是通过的水量,而电阻是水管的粗细时,当水从一个方向流过去,水管会随着水流量而越来越粗,这时如果把水流关掉的话,水管的粗细会维持不变;反之当水从相反方向流动时,水管就会越来越细. 因为这样的组件会"记住"之前的电流量,因此被称为忆阻. 尽管蔡少棠教授很早就从理论上证实了忆阻的存在性,并提出了忆阻的阻值是电量 q 的函数,并定义如下:

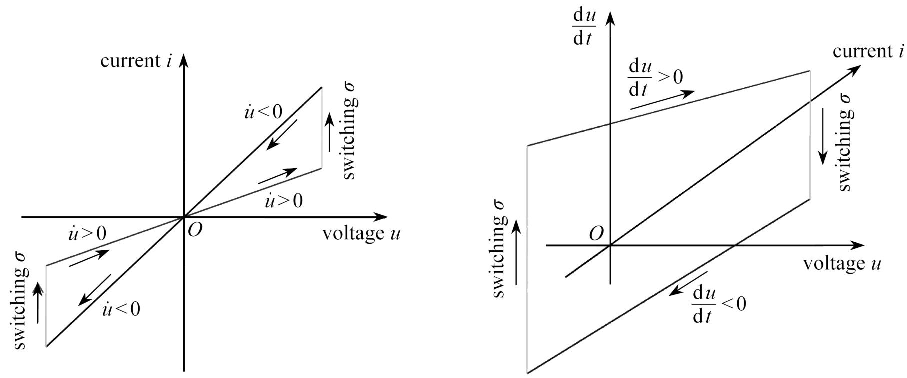
$$M(q) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}, \tag{1}$$

其中, φ 表示磁通量,但由于一直无法找到合适的材料来实现忆阻,他的理论一直未能得到足够的重视. 直到 37 年后的 2008 年,美国惠普(Hewlett-Packard)公司实验室研究人员在 5 月 1 日出版的英国《自然》杂志上发表论文[1] 宣称,他们已经证实了电路世界中的第 4 种基本元

* 收稿日期: 2013-05-07; 修订日期: 2013-05-09
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61273021);重庆市自然科学基金重点项目(CQcstc2013jjB40008)
作者简介: 胡进(1980—),男,湖北襄阳人, 讲师,博士(E-mail: victorjhu@gmail.com);
宋乾坤(1963—),男,教授,博士(通讯作者. E-mail:qiankunsong@163.com).

件——忆阻的存在,并成功设计出一个能工作的忆阻的实物模型.这项发现将有可能用来制造非易失性存储设备、即开型 PC、更高能效的计算机和类似人类大脑方式处理与联系信息的模拟式计算机等铺平了道路,未来甚至可能会通过大大提高晶体管所能达到的功能密度,对电子科学的发展历程产生重大影响[1-2].

忆阻的电量-电压特征图与 Lissajous 模式非常类似, 并被惠普实验室的科学家通过实验得到了证实(见文献[1]中的图 3(d)).由图 1 可知,忆阻具有“迟滞”的特性,即当一个场作用于一个物体并移走之后,其原本应该产生的后续效果会出现滞后,比如磁场,以及人脑细胞.正因为忆阻的这个特性,忆阻具有广泛的应用[3-5],其中一个很重要的应用就是可以利用忆阻构造神经网络从而模拟人脑.众所周知,神经网络可由大规模集成电路来实现.如果我们利用忆阻代替电阻来构造神经网络,就可以得到一个参数依赖于状态的切换神经网络.本文首先依据图 1 提出忆阻的一个简化的数学模型,然后基于这个模型建立时滞神经网络,并研究其全局稳定性.



(a) 忆阻的电流-电压特征图

(a) Current-voltage characteristic of memristors

(b) 忆阻的电流-电压-电压导数特征图

(b) Current-voltage-derivative-of-voltage characteristic of memristors

图 1　简化的忆阻的电流-电压特征图

Fig. 1　Current-voltage characteristic of simplified model of memristors

1　预备知识

1.1　模型介绍

根据忆阻的特性及图 1 中的电流-电压特征图,我们提出如下的忆阻的数学模型:

$$M(u(t)) = \begin{cases} M', & \dot{u}(t) > 0, \\ M'', & \dot{u}(t) < 0, \\ \lim\limits_{\tau \to t-} M(u(\tau)), & \dot{u}(t) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

其中, u 是加在忆阻两端的电压,$\dot{u}(t)$ 是 u 关于时间 t 的导数,$M' \leqslant M''$. 当 $\dot{u}(t) = 0$ 时, $\lim_{\tau \to t-} M(u(\tau))$ 表示忆阻保持现有值.从上式我们可知忆阻阻值根据加在忆阻两端的电压的变化在两个值之间切换,因为神经网络的连接权可以由电阻来实现,从而可以用忆阻来构造一个切换神经网络.

考虑如下的基于忆阻的时滞神经网络:

$$\dot{z}_i(t) = -d_i z_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(z_i - z_j)\hat{f}_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(z_i - z_j)\hat{g}_j(z_j(t - \tau(t))) + s_i, \tag{3}$$

其中,$z_i(t)$ 是第 i 个神经元的状态变量,d_i 是第 i 个自反馈连接权,$a_{ij}(z_i - z_j)$ 和 $b_{ij}(z_i - z_j)$ 分别是不带时滞和具有时滞的连接权,s_i 是第 i 个外部输入. $\hat{f}_i(\cdot)$ 和 $\hat{g}_i(\cdot)$ 分别是第 i 个不带时滞和具有时滞的激活函数,并满足如下假设:

H_1:$\hat{f}_i(\cdot)$ 和 $\hat{g}_i(\cdot)(i = 1,2,\cdots,n)$ 恒为正,且满足 Lipschitz 连续条件,即对任意 $x, y \in \mathbf{R}, x \neq y$,存在 $\mu_i, \lambda_i > 0$ 使得下列不等式成立:

$$|\hat{f}_i(x) - \hat{f}_i(y)| \leqslant \mu_i |x - y|, \quad |\hat{g}_i(x) - \hat{g}_i(y)| \leqslant \lambda_i |x - y|.$$

因连接权由忆阻实现,根据式(2),a_{ij} 和 $b_{ij}(i \neq j)$ 是 z_i 和 z_j 的函数并定义为

$$w_{ij}(z_i - z_j) = \begin{cases} w'_{ij}, & \dot{z}_i - \dot{z}_j > 0, \\ w''_{ij}, & \dot{z}_i - \dot{z}_j < 0, \\ \lim\limits_{\tau \to t-} w_{ij}(z_i - z_j), & \dot{z}_i - \dot{z}_j = 0, \end{cases} \tag{4}$$

其中,w 代表 a 或 b,a_{ii} 和 b_{ii} 为常数,$a'_{ij} < a''_{ij}$,$b'_{ij} < b''_{ij}$.

最近以来,时滞神经网络的全局稳定性得到了广泛而深入的研究[6-19]. 在系统(3)中,因为 $a_{ij}(\cdot)$ 和 $b_{ij}(\cdot)$ 均为不连续函数,关于微分方程解的经典理论无法在这里应用. 为解决这一问题,Filippov[20] 发展了一套针对具有不连续项的微分方程的解的理论. 基于这一理论,一个具有不连续项的微分方程和与之相应的微分包含具有相同的解集. 从而,要研究这样的微分方程的稳定性,我们可以转而研究相应的微分包含的稳定性. 下面,首先介绍一下与微分包含相关的一些定义和引理.

1.2 定义和引理

考虑如下形式的微分方程:

$$\dot{x} = h(t, x), \tag{5}$$

其中 $h: \mathbf{R} \times R^n \to R^n$ 为不连续函数. 式(5)的 Filippov 解定义如下:

定义 1 函数 $x(\cdot)$ 称为方程(5)在 $[t_0, t_1]$ 上的解,若 $x(\cdot)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上绝对连续且对于几乎所有的 $t \in [t_0, t_1]$ 有

$$\dot{x} \in \tilde{h}(t, x), \tag{6}$$

其中

$$\tilde{h}(t, x) \triangleq \bigcap_{\sigma > 0} \bigcap_{\mu(N) = 0} \overline{\mathrm{co}}\{h(t, B_\sigma(x) \setminus N)\}, \tag{7}$$

其中,$\overline{\mathrm{co}}$ 表示集合的闭凸包,μ 是 R^n 上的 Lebesgue 测度.

当 $h(t, x)$ 局部有界时,可以得到一个等价的定义[21]. 对于任意的 $t \geqslant 0$,存在集合 $N_0^t \subset R^n$(依赖于 h 和 t)且 $\mu(N_0^t) = 0$ 使得对于任意的 $N \subset R^n$ 且 $\mu(N) = 0$ 以及任意的 $x \in R^n$,有

$$\tilde{h}(t, x) = \mathrm{co}\{v: \text{存在}\{x_i\}\text{ 使得 } x_i \to x \text{ 满足 } x_i \notin N_0^t \cup N \text{ 且 } v = \lim h(t, x_i)\}, \tag{8}$$

其中,co 表示集合的凸包. 根据上述的定义,切换系统

$$\dot{x} = \varphi_\sigma(t, x), \quad \sigma \in \Omega \tag{9}$$

与下面的微分包含具有相同的解集

$$\dot{x} \in \mathrm{co}\{\varphi_\sigma(t, x)\}, \tag{10}$$

其中，$\sigma:[0,+\infty)\to\Omega$是任意的切换信号，$\Omega$是指标集，$\varphi(t,x)$局部有界. 从而要分析微分方程(9)的稳定性，我们可以转而研究微分包含式(10)的稳定性.

首先，有如下的引理来保证微分包含解的存在性：

引理1[22] $\tilde{h}(t,x)$是定义在式(7)或式(8)上的集值映射. 若$\tilde{h}(t,x)$局部有界且关于$(t,x)\in[0,+\infty)\times R^n$ Lebesgue可测，则$\tilde{h}(t,x)$满足：

A_1 对于任意的$t\geqslant 0$及$x\in R^n$，$\tilde{h}(t,x)$是R^n的非空的紧凸子集；

A_2 关于x的集值映射$\tilde{h}(t,x)$关于任意$t\geqslant 0$上半连续；

A_3 $\tilde{h}(t,x)$对于任意的$x\in R^n$ Lebesgue可测；

A_4 $\tilde{h}(t,x)$局部有界.

引理2[22] $\tilde{h}(t,x)$为集值映射. 若$\tilde{h}(t,x)$满足A_1，A_2，A_3和A_4，则对于任意的$(t,x)\in[0,+\infty)\times R^n$，存在区间$I$以及式(6)的至少一个解$x(t):I\to R^n$使得$t_0\in I$且$x(t_0)=x_0$.

设微分包含式(6)的解$x(\cdot)$存在并满足$x(t_0)=x_0$，且原点是式(6)的平衡点，即对于几乎所有的$t\geqslant 0$有$0\in\tilde{h}(t,0)$. 下面我们介绍全局一致渐近稳定性的定义及其充分条件.

定义2 微分包含式(6)全局一致渐近稳定若其平衡点一致稳定且全局一致吸引，并且其所有解一致有界. 即，存在函数$m:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$和$T:(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to(0,+\infty)$使得

1) 对于任意的$r>0$，任意的$(t_0,x_0)\in(0,+\infty)\times R^n$和任意的解$x(\cdot)$，有

$$\|x_0\|\leqslant r\Rightarrow\|x(t)\|<m(r),\qquad\forall t\geqslant t_0;$$

2) $\lim\limits_{r\to 0+}m(r)=0$;

3) 对于任意的$r>0,\varepsilon>0$，及$(t_0,x_0)\in(0,+\infty)\times R^n$，有

$$\|x_0\|\leqslant r\Rightarrow\|x(t)\|<\varepsilon,\qquad\forall t\geqslant t_0+T(r,\varepsilon).$$

引理3[22] $\tilde{h}:[0,+\infty)\times R^n\to R^n$为集值映射且保证式(6)的解存在. 若存在Lyapunov函数$V=V(t,x)$使得对于函数$a(\cdot),b(\cdot),c(\cdot)\in\mathcal{K}_0^\infty$，有

$$a(\|x\|)\leqslant V(t,x)\leqslant b(\|x\|),\qquad\forall t\in[0,+\infty),\ x\in R^n,\tag{11}$$

$$V(t_2,x(t_2))-V(t_1,x(t_1))\leqslant-\int_{t_1}^{t_2}c(\|x(\tau)\|)\mathrm{d}\tau,\qquad t_1\leqslant t_2,\tag{12}$$

则式(6)的平衡点一致渐近稳定.

引理4[23] 若$H(x):R^n\to R^n$为连续函数且满足下面的条件：

1) $H(x)$为R^n上的单射；

2) $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}\|H(x)\|=\infty$;

则$H(x)$是R^n上的同胚.

下面我们介绍一些关于M-矩阵的等价定义.

定义3[24] 设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$具有非正的次对角线元. $\boldsymbol{A}$是非奇异的M-矩阵若下列条件之一成立：

1) $\boldsymbol{A}$的所有主子式都为正；

2) $\boldsymbol{A}$的所有对角元都为正，且存在正定的对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$使得$\boldsymbol{A\Lambda}$严格对角占优，即

$$a_{ii}\lambda_i>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\lambda_j,\qquad i=1,2,\cdots,n;$$

上式可以写为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j > 0, \qquad i = 1,2,\cdots,n;$$

3）存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{AP} + \boldsymbol{PA}^{\mathrm{T}}$ 也为正定.

2 主要结果

系统(3)可以写为如下的向量形式：

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{z}) = -\boldsymbol{D}\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{z})\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{z}(t)) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{z})\hat{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{z}(t-\tau(t))) + \boldsymbol{s}. \tag{13}$$

因为激活函数 $\hat{f}_i(x)$ 和 $\hat{g}_i(x)$ Lipschitz 连续,故局部有界,从而 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})$ 也局部有界.根据上节的分析,基于忆阻的神经网络式(13)与下面的微分包含具有相同的解集：

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) \in \mathrm{co}\{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})\} = -\boldsymbol{D}\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{A}(t)\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{z}(t)) + \boldsymbol{B}(t)\hat{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{z}(t-\tau(t))) + \boldsymbol{s}, \tag{14}$$

其中, $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, $\boldsymbol{A}(t) = \{(\xi_{ij}(t)a'_{ij} + (1-\xi_{ij}(t))a''_{ij})_{n\times n} \mid \xi_{ij}(t)$ 为任意满足 $0 \leqslant \xi_{ij}(t) \leqslant 1$ 且 $\xi_{ij}(t) + \xi_{ji}(t) = 1$ 的函数$\}$, $\boldsymbol{B}(t) = \{(\xi_{ij}(t)b'_{ij} + (1-\xi_{ij}(t))b''_{ij})_{n\times n} \mid \xi_{ij}(t)$ 为任意满足 $0 \leqslant \xi_{ij}(t) \leqslant 1$ 且 $\xi_{ij}(t) + \xi_{ji}(t) = 1$ 的函数$\}$, $\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{z}(t)) = [\hat{f}_1(z_1(t)),\hat{f}_2(z_2(t)),\cdots,\hat{f}_n(z_n(t))]^{\mathrm{T}}$, $\hat{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{z}(t)) = [\hat{g}_1(z_1(t)),\hat{g}_2(z_2(t)),\cdots,\hat{g}_n(z_n(t))]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{s} = (s_1,s_2,\cdots,s_n)^{\mathrm{T}}$.

根据引理 1 和 2, 微分包含式(14)存在至少一个解.设 $\boldsymbol{z}(t)$ 是微分包含式(14) 的解, 故给定一个集合$\{\xi_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{z}(t)$ 满足如下微分方程：

$$\dot{z}_i = -d_i z_i + \sum_{j=1}^{n}[\xi_{ij}(t)a'_{ij} + (1-\xi_{ij}(t))a''_{ij}]\hat{f}_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^{n}[\xi_{ij}(t)b'_{ij} + (1-\xi_{ij}(t))b''_{ij}]\hat{g}_j(z_j(t-\tau_j)) + s_i. \tag{15}$$

从而微分方程(15)的平衡点就是微分包含(14)的平衡点.下面我们给出微分方程(15)的平衡点存在唯一性的充分条件.

定理 1 对于基于忆阻的神经网络(3), 若 $\boldsymbol{D} - |\boldsymbol{A}|_{\max}\boldsymbol{\Lambda} - |\boldsymbol{B}|_{\max}\boldsymbol{\Gamma}$ 是非奇异的 M-矩阵, 则式(3) 有唯一的平衡点,其中, $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, $|\boldsymbol{A}|_{\max} = (\bar{a}_{ij})_{n\times n}$, $|\boldsymbol{B}|_{\max} = (\bar{b}_{ij})_{n\times n}$, $\bar{a}_{ij} = \max\{|a'_{ij}|, |a''_{ij}|\}$, $\bar{b}_{ij} = \max\{|b'_{ij}|, |b''_{ij}|\}$, $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$, $\boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

证明 方程(15)的平衡点就是下述方程的解：

$$-d_i z_i + \sum_{j=1}^{n}[\xi_{ij}(t)a'_{ij} + (1-\xi_{ij}(t))a''_{ij}]\hat{f}_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^{n}[\xi_{ij}(t)b'_{ij} + (1-\xi_{ij}(t))b''_{ij}]\hat{g}_j(z_j(t-\tau_j)) + s_i = 0. \tag{16}$$

对式(16)整理后可得

$$-d_i z_i + \sum_{j=1}^{n} a''_{ij}\hat{f}_j(z_j) + \sum_{j=1}^{n} b''_{ij}\hat{g}_j(z_j) + s_i + \xi_{ij}(t)\left\{\sum_{j=1}^{n}(a'_{ij} - a''_{ij})\hat{f}_j(z_j) + (b'_{ij} - b''_{ij})\hat{g}_j(z_j)\right\} = 0.$$

从而下述方程组

$$\begin{cases} -d_i z_i + \sum_{j=1}^{n} a''_{ij} \hat{f}_j(z_j) + \sum_{j=1}^{n} b''_{ij} \hat{g}_j(z_j) + s_i = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} (a'_{ij} - a''_{ij}) \hat{f}_j(z_j) + (b'_{ij} - b''_{ij}) \hat{g}_j(z_j) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

的解就是式(16)的常数解,从而是式(15)的平衡点.

注意到式(17)与下述方程组等价:

$$\begin{cases} -d_i z_i + \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} \hat{f}_j(z_j) + \sum_{j=1}^{n} b'_{ij} \hat{g}_j(z_j) + s_i = 0, \\ -d_i z_i + \sum_{j=1}^{n} a''_{ij} \hat{f}_j(z_j) + \sum_{j=1}^{n} b''_{ij} \hat{g}_j(z_j) + s_i = 0. \end{cases}$$

上式可写成如下的矩阵形式:

$$-\bar{\boldsymbol{D}}\bar{\boldsymbol{z}} + \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{f}}(\bar{\boldsymbol{z}}) + \bar{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{g}}(\bar{\boldsymbol{z}}) + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}, \tag{18}$$

其中

$$\bar{z} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},\ \bar{\boldsymbol{D}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix},\ \bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}' & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}'' \end{pmatrix},\ \bar{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}' & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}'' \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}' = (a'_{ij})_{n\times n},\ \boldsymbol{A}'' = (a''_{ij})_{n\times n},\ \boldsymbol{B}' = (b'_{ij})_{n\times n},\ \boldsymbol{B}'' = (b''_{ij})_{n\times n},$$

$$\bar{\boldsymbol{f}}(\bar{z}) = (\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{z})^{\mathrm{T}}, \hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{z})^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},\ \bar{\boldsymbol{g}}(\bar{z}) = (\hat{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{z})^{\mathrm{T}}, \hat{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{z})^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}.$$

我们定义如下的映射:

$$\boldsymbol{H}(\bar{z}) = -\bar{\boldsymbol{D}}\bar{z} + \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{f}}(\bar{z}) + \bar{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{g}}(\bar{z}) + \boldsymbol{s}. \tag{19}$$

首先, 证明在给定的条件下,映射 $\boldsymbol{H}(\cdot)$ 为单射. 假设存在 $\bar{z}' = \mathrm{diag}(\boldsymbol{z}'^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{z}'^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{z}' = \mathrm{diag}(z_1', z_2', \cdots, z_n')$, $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{z}'$ 满足 $\boldsymbol{H}(\bar{z}) = \boldsymbol{H}(\bar{z}')$, 从而由式(19)有

$$-\bar{\boldsymbol{D}}(\bar{z} - \bar{z}') + \bar{\boldsymbol{A}}[\bar{\boldsymbol{f}}(\bar{z}) - \bar{\boldsymbol{f}}(\bar{z}')] + \bar{\boldsymbol{B}}[\bar{\boldsymbol{g}}(\bar{z}) - \bar{\boldsymbol{g}}(\bar{z}')] = \boldsymbol{0}.$$

将上式写成分量形式,即

$$d_i(z_i - z_i') = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}[\hat{f}_j(z_j) - \hat{f}_j(z_j')] + \sum_{j=1}^{n} b'_{ij}[\hat{g}_j(z_j) - \hat{g}_j(z_j')],$$

$$d_i(z_i - z_i') = \sum_{j=1}^{n} a''_{ij}[\hat{f}_j(z_j) - \hat{f}_j(z_j')] + \sum_{j=1}^{n} b''_{ij}[\hat{g}_j(z_j) - \hat{g}_j(z_j')].$$

上式两端取绝对值,可得

$$d_i |z_i - z_i'| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} \mu_j |z_j - z_j'| + b'_{ij} \lambda_j |z_j - z_j'|,$$

$$d_i |z_i - z_i'| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a''_{ij} \mu_j |z_j - z_j'| + b''_{ij} \lambda_j |z_j - z_j'|.$$

上述不等式组可以写成如下的矩阵形式:

$$\boldsymbol{D}|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'| \leqslant \boldsymbol{A}'\boldsymbol{\Lambda}|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'| + \boldsymbol{B}'\boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'|,$$

$$\boldsymbol{D}|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'| \leqslant \boldsymbol{A}''\boldsymbol{\Lambda}|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'| + \boldsymbol{B}''\boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'|,$$

即

$$(\bar{\boldsymbol{D}} - \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{\Lambda}} - \bar{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{\Gamma}})|\bar{z} - \bar{z}'| \leqslant \boldsymbol{0}, \tag{20}$$

其中

$$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n),\ \boldsymbol{\Gamma}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\ \bar{\boldsymbol{\Lambda}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Lambda}\end{pmatrix},\ \bar{\boldsymbol{\Gamma}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Gamma} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Gamma}\end{pmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{D}-|\boldsymbol{A}|_{\max}\boldsymbol{\Lambda}-|\boldsymbol{B}|_{\max}\boldsymbol{\Gamma}$ 为非负的 M-矩阵，由定义3，存在常数 $\beta_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$\beta_i d_i-\sum_{j=1}^{n}\beta_j(\bar{a}_{ij}\mu_j+\bar{b}_{ij}\lambda_j)>0. \tag{21}$$

从而有

$$\begin{cases}\beta_i d_i-\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j(a'_{ij}\mu_j+b'_{ij}\lambda_j)>0,\\ \beta_i d_i-\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j(a''_{ij}\mu_j+b''_{ij}\lambda_j)>0.\end{cases} \tag{22}$$

即 $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}''\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{B}''\boldsymbol{\Gamma}$ 均为非奇异的 M-矩阵，易知 $\boldsymbol{D}-\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}-\bar{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{\Gamma}}$ 也是非奇异的 M-矩阵. 从而有 $\boldsymbol{D}-\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}-\bar{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{\Gamma}}>\mathbf{0}$，故有，$|\bar{z}-\bar{z}'|=0$，即，$\bar{z}=\bar{z}'$ 显然此为矛盾，故映射 $\boldsymbol{H}(\cdot)$ 为单射.

下一步我们证明 $\lim_{\|z\|\to\infty}\|\boldsymbol{H}(z)\|\to\infty$. 根据定义3，存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得对于充分小的 $\varepsilon>0$，有

$$[\boldsymbol{P}(-\boldsymbol{D}+|\boldsymbol{A}|_{\max}\boldsymbol{\Lambda}+|\boldsymbol{B}|_{\max}\boldsymbol{\Gamma})]^{\mathrm{S}}\leqslant-\varepsilon\boldsymbol{I}_n<\mathbf{0}, \tag{23}$$

其中 S 的含义为，对任意矩阵 $\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{S}}=[\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}]/2$.

令 $\bar{\boldsymbol{H}}(\bar{z})=-\bar{\boldsymbol{D}}\bar{z}+\bar{\boldsymbol{A}}[\bar{\boldsymbol{f}}(\bar{z})-\bar{\boldsymbol{f}}(\mathbf{0})]+\bar{\boldsymbol{B}}[\bar{\boldsymbol{g}}(\bar{z})-\bar{\boldsymbol{g}}(\mathbf{0})]$，根据上面的分析我们可以得到

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{P}\bar{z})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{H}}(\bar{z})=(\boldsymbol{P}\bar{z})^{\mathrm{T}}\{-\bar{\boldsymbol{D}}\bar{z}+\bar{\boldsymbol{A}}[\bar{\boldsymbol{f}}(\bar{z})-\bar{\boldsymbol{f}}(\mathbf{0})]+\bar{\boldsymbol{B}}[\bar{\boldsymbol{g}}(\bar{z})-\bar{\boldsymbol{g}}(\mathbf{0})]\}=\\ &\quad-\bar{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{D}}\bar{z}+\bar{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{A}}[\bar{\boldsymbol{f}}(\bar{z})-\bar{\boldsymbol{f}}(\mathbf{0})]+\bar{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{B}}[\bar{\boldsymbol{g}}(\bar{z})-\bar{\boldsymbol{g}}(\mathbf{0})]\leqslant\\ &\quad-|\bar{z}|^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{D}}|\bar{z}|+|\bar{z}|^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}|\bar{z}|+|\bar{z}|^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{\Gamma}}|\bar{z}|=\\ &\quad-|\bar{z}|^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{P}(-\bar{\boldsymbol{D}}+\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}+\bar{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{\Gamma}})]|\bar{z}|=\\ &\quad-|\bar{z}|^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{P}(-\bar{\boldsymbol{D}}+\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{\Lambda}}+\bar{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{\Gamma}})]^{\mathrm{S}}|\bar{z}|\leqslant\\ &\quad-\varepsilon\|\bar{z}\|^2.\end{aligned} \tag{24}$$

根据上式及 Schwartz 不等式，可得

$$\varepsilon\|\bar{z}\|^2\leqslant\|\boldsymbol{P}\|\,\|\bar{z}\|\,\|\bar{\boldsymbol{H}}(\bar{z})\|,$$

即

$$\frac{\varepsilon\|\bar{z}\|}{\|\boldsymbol{P}\|}\leqslant\|\bar{\boldsymbol{H}}(\bar{z})\|.$$

故有 $\lim_{\|\bar{z}\|\to\infty}\|\bar{\boldsymbol{H}}(\bar{z})\|=\infty$. 根据引理4，我们得到映射 $\boldsymbol{H}(\cdot)$ 是同胚的，故存在唯一的点 $\bar{z}^*$ 使得 $\boldsymbol{H}(\bar{z}^*)=\mathbf{0}$，即系统(3)有唯一的平衡点. □

定理2 对于基于忆阻的神经网络式(3)，若 $\boldsymbol{D}-|\boldsymbol{A}|_{\max}\boldsymbol{\Lambda}-|\boldsymbol{B}|_{\max}\boldsymbol{\Gamma}$ 是非奇异的 M-矩阵，则式(3)全局一致渐近稳定.

证明 因为 $\boldsymbol{D}-|\boldsymbol{A}|_{\max}\boldsymbol{\Lambda}-|\boldsymbol{B}|_{\max}\boldsymbol{\Gamma}$ 是非奇异的 M-矩阵，根据定义，存在常数 $\beta_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$\beta_i d_i-\sum_{j=1}^{n}\beta_j(\bar{a}_{ij}\mu_j+\bar{b}_{ij}\lambda_j)>0. \tag{25}$$

根据定理 1 的分析，可知式(15)有唯一的平衡点.将平衡点记为 $\boldsymbol{z}^*$，我们利用平移 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}^*$ 将式(15) 的平衡点移至原点,得

$$\dot{x}_i(t)=-d_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{n}F_{ij}(x_j(t),t)+\sum_{j=1}^{n}G_{ij}(x_j(t-\tau_j),t),\tag{26}$$

其中

$$\begin{aligned}F_{ij}(x_j(t),t)=&[\xi_{ij}(t)a'_{ij}\hat{f}_j(z_j)+(1-\xi_{ij}(t))a''_{ij}\hat{f}_j(z_j)]-\\&[\xi^*_{ij}(t)a'_{ij}\hat{f}_j(z^*_j)+(1-\xi^*_{ij}(t))a''_{ij}\hat{f}_j(z^*_j)]\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}G_{ij}(x_j(t-\tau_j),t)=&[\xi_{ij}(t)b'_{ij}\hat{g}_j(z_j(t-\tau_j))+(1-\xi_{ij}(t))b''_{ij}\hat{g}_j(z_j(t-\tau_j))]-\\&[\xi^*_{ij}(t)b'_{ij}\hat{g}_j(z^*_j(t-\tau_j))+(1-\xi^*_{ij}(t))b''_{ij}\hat{g}_j(z^*_j(t-\tau_j))].\end{aligned}$$

考虑到 $\xi_{ij}(t),\xi^*_{ij}(t)\in[0,1]$，令 $\xi_{ij}(t)=\xi^*_{ij}(t)=0$，可得

$$\begin{cases}F_{ij}(x_j(t),t)=a''_{ij}\hat{f}_j(z_j)-a''_{ij}\hat{f}_j(z^*_j),\\G_{ij}(x_j(t-\tau_j),t)=b''_{ij}\hat{g}_j(z_j(t-\tau_j))-b''_{ij}\hat{g}_j(z^*_j(t-\tau_j)).\end{cases}\tag{27}$$

令 $\xi_{ij}(t)=0$，$\xi^*_{ij}(t)=1$，可得

$$\begin{cases}F_{ij}(x_j(t),t)=a''_{ij}\hat{f}_j(z_j)-a'_{ij}\hat{f}_j(z^*_j),\\G_{ij}(x_j(t-\tau_j),t)=b''_{ij}\hat{g}_j(z_j(t-\tau_j))-b'_{ij}\hat{g}_j(z^*_j(t-\tau_j)).\end{cases}\tag{28}$$

令 $\xi_{ij}(t)=1$，$\xi^*_{ij}(t)=0$，可得

$$\begin{cases}F_{ij}(x_j(t),t)=a'_{ij}\hat{f}_j(z_j)-a''_{ij}\hat{f}_j(z^*_j),\\G_{ij}(x_j(t-\tau_j),t)=b'_{ij}\hat{g}_j(z_j(t-\tau_j))-b''_{ij}\hat{g}_j(z^*_j(t-\tau_j)).\end{cases}\tag{29}$$

令 $\xi_{ij}(t)=\xi^*_{ij}(t)=1$，可得

$$\begin{cases}F_{ij}(x_j(t),t)=a'_{ij}\hat{f}_j(z_j)-a'_{ij}\hat{f}_j(z^*_j),\\G_{ij}(x_j(t-\tau_j),t)=b'_{ij}\hat{g}_j(z_j(t-\tau_j))-b'_{ij}\hat{g}_j(z^*_j(t-\tau_j)).\end{cases}\tag{30}$$

根据式(27)～(30)，可得

$$\begin{aligned}&|F_{ij}(x_j(t),t)|\leqslant\\&\quad\max\{|a''_{ij}\hat{f}_j(z_j)-a''_{ij}\hat{f}_j(z^*_j)|,|a'_{ij}\hat{f}_j(z_j)-a''_{ij}\hat{f}_j(z^*_j)|,\\&\quad|a''_{ij}\hat{f}_j(z_j)-a'_{ij}\hat{f}_j(z^*_j)|,|a'_{ij}\hat{f}_j(z_j)-a'_{ij}\hat{f}_j(z^*_j)|\}\end{aligned}\tag{31}$$

及

$$\begin{aligned}&|G_{ij}(x_j(t-\tau_j),t)|\leqslant\\&\quad\max\{|b''_{ij}\hat{g}_j(z_j(t-\tau_j))-b''_{ij}\hat{g}_j(z^*_j(t-\tau_j))|,\\&\quad|b'_{ij}\hat{g}_j(z_j(t-\tau_j))-b''_{ij}\hat{g}_j(z^*_j(t-\tau_j))|,\\&\quad|b''_{ij}\hat{g}_j(z_j(t-\tau_j))-b'_{ij}\hat{g}_j(z^*_j(t-\tau_j))|,\\&\quad|b'_{ij}\hat{g}_j(z_j(t-\tau_j))-b'_{ij}\hat{g}_j(z^*_j(t-\tau_j))|\}.\end{aligned}\tag{32}$$

首先估计 $|F_{ij}(x_i(t),x_j(t),t)|$. 根据式(31) 及假设 H_1,若 $a'_{ij}<a''_{ij}$，有

$$a'_{ij}\hat{f}_j(z_j)-a''_{ij}\hat{f}_j(z^*_j)\leqslant a''_{ij}[\hat{f}_j(z_j)-\hat{f}_j(z^*_j)],$$

从而有

$$|a'_{ij}\hat{f}_j(z_j)-a''_{ij}\hat{f}_j(z^*_j)|\leqslant a''_{ij}\mu_j|z_j-z^*_j|.\tag{33}$$

若 $a_{ij}^{''} < a_{ij}^{'}$, 因

$$a_{ij}^{'}\hat{f}_j(z_j) - a_{ij}^{''}\hat{f}_j(z_j^*) = -[a_{ij}^{''}\hat{f}_j(z_j^*) - a_{ij}^{'}\hat{f}_j(z_j)].$$

类似地,有

$$a_{ij}^{''}\hat{f}_j(z_j^*) - a_{ij}^{'}\hat{f}_j(z_j) \leqslant a_{ij}^{'}[\hat{f}_j(z_j^*) - \hat{f}_j(z_j)],$$

故

$$|a_{ij}^{'}\hat{f}_j(z_j) - a_{ij}^{''}\hat{f}_j(z_j^*)| = |a_{ij}^{''}\hat{f}_j(z_j^*) - a_{ij}^{'}\hat{f}_j(z_j)| \leqslant a_{ij}^{'}\lambda_j|z_j^* - z_j|. \tag{34}$$

根据式(33)和式(34), 有

$$|a_{ij}^{'}\hat{f}_j(z_j) - a_{ij}^{''}\hat{f}_j(z_j^*)| \leqslant \bar{a}_{ij}\mu_j|z_j - z_j^*|. \tag{35}$$

类似地,我们可以得到如下的不等式:

$$|F_{ij}(x_j(t),t)| \leqslant \bar{a}_{ij}\lambda_j|x_j(t)|, \ |G_{ij}(x_j(t-\tau_j),t)| \leqslant \bar{b}_{ij}\lambda_j|x_j(t-\tau_j)|. \tag{36}$$

下一步证明系统的全局一致渐近稳定性. 首先取 Lyapunov 函数

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n}\beta_i|x_i(t)| + \sum_{i=1}^{n}\int_{t-\tau_i}^{t}\gamma_i|x_i(s)|\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\gamma_i = \sum_{j=1}^{n}\beta_j b_{ji}^{''}\lambda_i$.

对 $V(x)$ 沿式(26)求右上 Dini 导数, 并结合式(36)有

$$\begin{aligned}
D^+V(x) = \sup\Big\{&\sum_{i=1}^{n}\beta_i \operatorname{sgn} x_i(t)\Big[-d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n}F_{ij}(x_j(t),t) + \\
&\sum_{j=1}^{n}G_{ij}(x_j(t-\tau_j),t)\Big] + \sum_{i=1}^{n}\gamma_i[|x_i(t)| - |x_i(t-\tau_i)|]\Big\} \leqslant \\
&-\sum_{i=1}^{n}\beta_i d_i|x_i(t)| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_i\bar{a}_{ij}\mu_j|x_j(t)| + \\
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_i\bar{b}_{ij}\lambda_j|x_j(t-\tau_j)| + \sum_{i=1}^{n}\gamma_i[|x_i(t)| - |x_i(t-\tau_i)|] = \\
&-\sum_{i=1}^{n}\beta_i d_i|x_i(t)| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\beta_i(a_{ij}^{''}\mu_j + b_{ij}^{''}\lambda_j)|x_i(t)|] \leqslant \\
&-\omega\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)| = -\omega\|x(t)\|_1,
\end{aligned}$$

其中

$$\omega = \min_{1\leqslant i\leqslant n}\Big\{\beta_i d_i - \sum_{j=1}^{n}\beta_j(\bar{a}_{ji}\mu + \bar{b}_{ji}\lambda)\Big\}.$$

根据式(25), 我们有 $\omega > 0$. 故根据引理 3, 微分包含式(14)全局一致渐近稳定. 因为式(14)与式(3)具有相同的解集,故式(3)也全局一致渐近稳定. □

3 仿真结果

本节将给出一个实例来验证上述的结果.

例 1 考虑下述基于忆阻的时滞神经网络

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = -\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-\tau)) + \boldsymbol{s}, \tag{37}$$

其中

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}5&0\\0&8\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}2&a_{12}\\a_{21}&-3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}-5&b_{12}\\b_{21}&-4\end{pmatrix},$$

$$a_{12}=\begin{cases}-1, & \dot{x}_1>\dot{x}_2,\\ 0.5, & \dot{x}_1<\dot{x}_2,\end{cases}\quad a_{21}=\begin{cases}-3, & \dot{x}_2>\dot{x}_1,\\ 4, & \dot{x}_2<\dot{x}_1,\end{cases}$$

$$b_{12}=\begin{cases}2, & \dot{x}_1>\dot{x}_2,\\ 3, & \dot{x}_1<\dot{x}_2,\end{cases}\quad b_{21}=\begin{cases}-2, & \dot{x}_2>\dot{x}_1,\\ 1, & \dot{x}_2<\dot{x}_1,\end{cases}$$

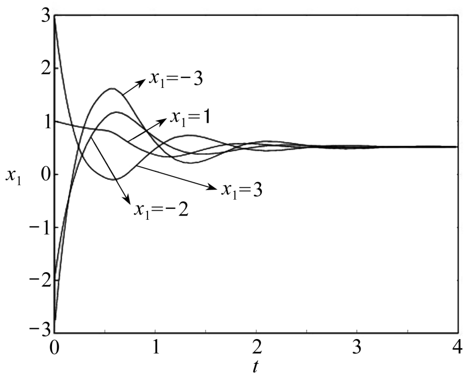
$$f_i(x)=g_i(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}},\qquad i=1,2.$$

显然,f_i 和 g_i 均为 Lipschitz 连续,其 Lipschitz 常数分别为 $\mu_i=\lambda_i=1/4$. 可算得

$$|\boldsymbol{A}|_{\max}=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix},\ |\boldsymbol{B}|_{\max}=\begin{pmatrix}5&3\\2&4\end{pmatrix},$$

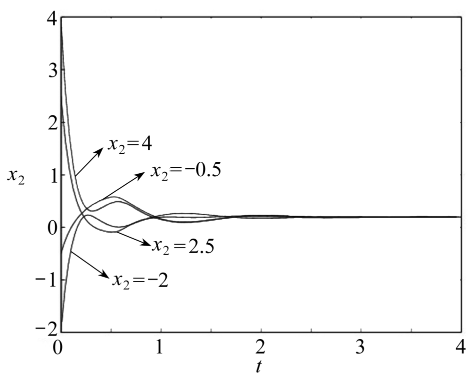
$$\boldsymbol{D}-|\boldsymbol{A}|_{\max}\boldsymbol{\Lambda}-|\boldsymbol{B}|_{\max}\boldsymbol{\Gamma}=\begin{pmatrix}3.25&-1\\-1.25&6.25\end{pmatrix}.$$

容易验证 $\boldsymbol{D}-|\boldsymbol{A}|_{\max}\boldsymbol{\Lambda}-|\boldsymbol{B}|_{\max}\boldsymbol{\Gamma}$ 是非奇异的 M-矩阵. 故根据定理2,系统(37)全局一致渐近稳定,系统状态变量的瞬态响应图如图 2 所示.



(a) 例 1 中 x_1 关于时间的瞬态响应

(a) Transient state of x_1 in example 1



(b) 例 1 中 x_2 关于时间的瞬态响应

(b) Transient state of x_2 in example 1

图2 例 1 中 x 关于时间的瞬态响应

Fig. 2 Transient states of the neural network in example 1

4 结 论

本文提出了关于忆阻的分段线性的数学模型,并基于此模型构造了时滞神经网络. 该模型本质上是一个依赖状态的非线性切换系统. 研究切换系统一般采用多 Lyapunov 方法,但由于该系统结构比较复杂,很难采用多 Lyapunov 方法. 我们采用了 Filippov 理论,将不连续系统转化为微分包含来研究,得到了满意的结果.

参考文献(References):

[1] Strukov D B, Snider G S, Stewart D R, Williams R S. The missing memristor found[J]. *Nature*, 2008, **453**(7191): 80-83.

[2] Chua L O. Memristor-the missing circuit element[J]. *IEEE Transactions on Circuit Theory*,

1971, **18**(5): 507-519.

[3] Pershin Y V, Ventra M D. Spin memristive systems: spin memory effects in semiconductor spintronics[J]. *Physical Review B*, 2008, **78**(11): 1-4.

[4] Yang J J, Pickett M D, Li X, Ohlberg D A A, Stewart D R, Williams R S. Memristive switching mechanism for metal/oxide/metal nanodevices[J]. *Nature Nanotechnology*, 2008, **3**(7): 429-433.

[5] Wang X, Chen Y, Xi H, Li H, Dimitrov D. Spintronic memristor through spin-torque-induced magnetization motion[J]. *IEEE Electron Device Letters*, 2009, **30**(3): 294-297.

[6] Xia Y, Wang J. Global asymptotic and exponential stability of a dynamic neural system with asymmetric connection weights[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(4): 635-638.

[7] Hu S, Wang J. Global asymptotic stability and global exponential stability of continuous-time recurrent neural networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **46**(5):802-807.

[8] Cao J, Wang J. Global asymptotic stability of a general class of recurrent neural network with time-varing delays[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I:Fundamental Theory and Applications*, 2003, **50**(1): 34-44.

[9] Zhang J. Globally exponential stability of neural networks with variable delays[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I:Fundamental Theory and Applications*, 2003, **50**(2): 288-291.

[10] Zeng Z, Wang J, Liao X. Global exponential stability of a general class of recurrent neural networks with time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2003, **50**(10): 1353-1358.

[11] Cao J, Wang J. Global asymptotic and robust stability of recurrent neural networks with time delays[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2005, **52**(2): 417-426.

[12] Liao X, Wang J, Zeng Z. Global asymptotic stability and global exponential stability of delayed cellular neural networks[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2005, **52**(7): 168-173.

[13] Zeng Z, Wang J, Liao X. Global asymptotic stability and global exponential stability of neural networks with unbounded time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2005, **52**(3): 403-409.

[14] Cao J, Yuan K, Li H. Global asymptotical stability of recurrent neural networks with multiple discrete delays and distributed delays[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2006, **17**(6): 1646-1651.

[15] Zeng Z, Wang J. Improved conditions for global exponential stability of recurrent neural networks with time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2006, **17**(3): 623-635.

[16] Chen W, Zheng W. Global asymptotic stability of a class of neural networks with distributed delays[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2006, **53**(3): 244-252.

[17] Yu W, Cao J, Wang J. An LMI approach to delayed global asymptotic stability of the Cohen-Grossberg neural networks via nonsmooth analysis[J]. *Neural Networks*, 2007, **20**(7): 810-818.

[18] Chen W, Zheng W. On global asymptotic stability of Cohen-Grossberg neural networks with variable delays[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2008, **55**(10): 3145-3159.

[19] Shen Y, Wang J. An improved algebraic criterion for global exponential stability of recurrent neural networks with time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2008, **19**(3): 528-531.

[20] Filippov A F. *Differential Equations With Discontinuous Right-Hand Sides*[M]. Dordrecht: Kluwer, 1988.

[21] Paden B E, Sastry S S. A calculus for computing Filippov's differential inclusions with applications to the variable structure control of robot manipulators[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1987, **34**(1): 73-82.

[22] Bacciotti A, Rosier L. *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*[M]. 2nd ed. Communications and Control Engineering. Vol 14. London: Springer, 2005.

[23] Forti M, Tesi A. New conditions for global stability of neural networks with application to linear and quadratic programming problems[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 1995, **42**(7): 354-366.

[24] Berman A, Plemmons R J. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*[M]. New York: Academic Press, 1979.

Global Uniform Asymptotic Stability of Memristor-Based Recurrent Neural Networks With Time Delays

HU Jin, SONG Qian-kun

(*Department of Mathematics*, *Chongqing Jiaotong University*,
Chongqing 400074, *P. R. China*)

Abstract: Memristor is a newly prototyped nonlinear circuit device. Its value is not unique and changes according to the value of the magnitude and polarity of the voltage applied to it. Due to this feature, the memristor has the function of memory and broad potential applications of memristors have been reported in various fields. A simplified mathematical model was proposed to characterize the pinched hysteresis feature of the memristor and a memristor-based recurrent neural network model was given. With the theory of differential inclusion, Lyapunov approach and homeomorphism theory, the existence and uniqueness of the equilibrium point of the model were obtained, and the global uniform asymptotic stability of memristor-based recurrent neural networks was also obtained. Finally, the simulation result shows the efficiency of the theorem.

Key words: memristor; recurrent neural network; global uniform asymptotic stability