

稳态热传导的二阶一致无网格法*

王冰冰, 高欣, 段庆林

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116023)

摘要: 将具二阶一致性的3点积分方法(quadratically consistent 3-point integration method, QC3)拓展到稳态热传导问题的无网格法分析中. 数值结果表明, 与标准三角形积分方法以及已存在的仅满足线性一致性的1点积分方法相比, 所建议的QC3方法不仅能精确地通过二阶分片试验, 而且在精度、收敛性以及计算效率等方面都表现出显著优势.

关键词: 无网格; 数值积分; 导数修正; 热传导; 一致性

中图分类号: O343.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.07.010

引言

无网格法已在热传导的数值分析中得到广泛应用, 见文献[1-5]. 然而, 由于其形函数的丰富性, Galerkin弱形式的准确积分要求较多的区域积分点, 如文献[4]在每个积分子域内采用 6×6 的Gauss积分点, 因而严重降低了方法的计算效率.

无网格领域已发展了一些高效积分方法, 如Beissel和Belytschko^[6]的节点积分, Duan和Belytschko^[7]的稳定应力点积分等. 其中, 最成功的方法当属Chen等^[8]的基于应变光顺的稳定相容节点积分(stabilized conforming nodal integration, SCNI). SCNI的一突出优点是不引入任何人工参数, 且能通过线性分片试验, 已成为无网格领域代表性的高效积分方法. Wu等^[5]已将该技术应用于三维热传导问题.

然而, Puso等^[9]发现SCNI仍然可能导致边界附近锯齿形振荡模式的出现. 更为重要的是, Duan等^[10]指出, 即使对于二次无网格近似, SCNI也只能通过线性分片试验, 而不能通过二次的分片试验. 本质上, SCNI是1点积分方案, 在围绕每个节点划分的积分子域之内只有1个积分点, 即该节点. 采用1个积分点只能反映出常数应变场, 而不能再现与位移二次插值(近似)相一致的线性应变场, 因而不能通过二次分片试验. 为此, Duan等^[10]发展了一个3点积分方案, 积分点上节点形函数的空间导数由它与形函数之间散度定理的离散形式计算. 该方法能够再现线性应变场, 可精确通过二次分片试验, 因而称之为二阶一致3点积分方法(quadratically consistent 3-point integration method, QC3). 相应的, SCNI可被称为线性一致1点积分方法

* 收稿日期: 2012-10-19; 修订日期: 2013-05-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11102036; 11232003); 973计划资助项目(2010CB731502); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(DUT12LK08)

作者简介: 王冰冰(1989—), 男, 河南内黄人, 硕士生(E-mail: bingkwang@gmail.com); 段庆林(1979—), 男, 博士, 副教授(通讯作者. E-mail: qinglianduan@dlut.edu.cn).

(linearly consistent 1-point integration method, LC1).

目前, QC3 方法还仅限于线弹性问题. 本文目的是将 QC3 方法拓展到稳态热传导问题, 并通过数值结果比较它与 LC1 等其它积分方法的收敛性、计算精度、效率等数值指标.

1 控制方程及空间离散

二维稳态热传导的控制方程为

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[k \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] + \rho Q = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, i = 1, 2, \quad (1)$$

其中, $\phi(\mathbf{x})$ 为待求的温度场, k 为材料的导热系数, ρ 为密度, Q 是物体内部的热源密度, Ω 表示问题的求解域, $i = 1, 2$ 分别表示 x 和 y 方向, 哑指标须按 Einstein 求和约定进行求和. Dirichlet (第一类) 和 Neumann (第二类) 边界条件分别为

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}) = \bar{\phi}, & \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}, \\ k \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_i} n_i = q, & \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}, i = 1, 2, \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\bar{\phi}$ 为边界温度的固定值, q 为边界给定热流密度, Γ_1 和 Γ_2 分别表示 Dirichlet 和 Neumann 边界. 采用移动最小二乘 (moving least-squares, MLS) 构造节点形函数, 将待求温度场 $\phi(\mathbf{x})$ 近似为

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Phi}, \quad (3)$$

其中, $\boldsymbol{\Phi} = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \cdots \quad \Phi_{n_p}]^T$ 为待求的节点温度参数向量, $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ 为相应的节点形函数矩阵. MLS 形函数及其空间导数的计算过程见诸于众多文献, 如文献 [10] 等, 这里不再赘述. 应用 Galerkin 弱形式, 并采用 Nitsche 法^[10] 施加本质边界条件, 则系统最终的离散方程可写为

$$(\mathbf{K} - \mathbf{K}^T + \beta \mathbf{K}^p) \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{f} - \mathbf{f}^T + \beta \mathbf{f}^p, \quad (4)$$

式中

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega, \quad \mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T Q d\Omega, \quad (5)$$

$$\begin{cases} \mathbf{K}^T = \int_{\Gamma_1} [\mathbf{N}^T (\mathbf{L}_n^T \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{N}) + (\mathbf{L}_n^T \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{N})^T \mathbf{N}] d\Gamma, \\ \mathbf{f}^T = \int_{\Gamma_1} (\mathbf{L}_n^T \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{N})^T \bar{\phi} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \mathbf{N}^T \bar{q} d\Gamma, \end{cases} \quad (6)$$

$$\mathbf{K}^p = \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma, \quad \mathbf{f}^p = \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}^T \bar{\phi} d\Gamma, \quad (7)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} k & \\ & k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{L}_n = [n_x \quad n_y]^T, \quad (8)$$

应说明的是, \mathbf{K}^T , \mathbf{K}^p 以及 \mathbf{f}^p 和 \mathbf{f}^T 中的第 1 项为 Nitsche 法引入的额外项, β 为罚系数.

2 二阶一致 3 点积分方法 QC3

如式(5)所示, 系统矩阵中的 \mathbf{K} 阵的计算需进行区域积分. 传统无网格法中, 该阵元素的计算为

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\Omega =$$

$$k \sum_{G=1}^{n_G} W_G \left[\frac{\partial N_I(\mathbf{x}_G)}{\partial x} \frac{\partial N_J(\mathbf{x}_G)}{\partial x} + \frac{\partial N_I(\mathbf{x}_G)}{\partial y} \frac{\partial N_J(\mathbf{x}_G)}{\partial y} \right], \quad (9)$$

其中, n_G 为积分点个数, W_G 为积分点 \mathbf{x}_G 的权系数, $N_{I,x}(\mathbf{x}_G)$ 和 $N_{I,y}(\mathbf{x}_G)$ 为积分点 \mathbf{x}_G 上标准的 MLS 形函数的空间导数. 由于 MLS 形函数是非多项式的有理函数, 上式的精确计算需要较多的积分点. 如对于二阶近似, 若采用背景三角形网格进行区域积分, 则每个单元需使用 16 个积分点才能保证较好的计算稳定性和精度, 这显然会导致相对低下的计算效率. 针对该问题, 本文引入 Duan 等^[10] 的 3 点积分格式 QC3. 如图 1 所示, 在每个背景三角形单元内区域积分仅使用 3 个积分点(图中的五角星), 边界积分在每条边上使用两个一维 Gauss 点(图中的三角形).

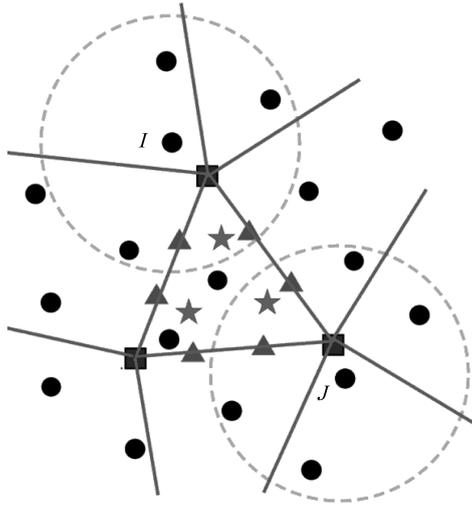


图 1 QC3 积分方法示意图

Fig. 1 Schematic diagram of QC3 integration method

QC3 方法的核心思想是导数修正, 即积分点上形函数的空间导数不采用标准形式, 而是由如下的散度定理确定:

$$\int_{\Omega_S} N_{I,i}(\mathbf{x}) \mathbf{q}(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Gamma_S} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{q}(\mathbf{x}) n_i d\Gamma - \int_{\Omega_S} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{q}_{,i}(\mathbf{x}) d\Omega, \quad (10)$$

其中, Ω_S 是背景积分子域, Γ_S 是其边界, $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{,x}(\mathbf{x}) \cup \mathbf{p}_{,y}(\mathbf{x})$, $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 是 MLS 形函数的基底函数向量. 本文采用二次近似, 即 $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2]^T$, 则 $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y]^T$, 因而式(10)实际上表示了 3 个方程, 刚好可以用于确定 3 个积分点上形函数的空间导数. 采用数值积分, 式(10)的离散形式为

$$\sum_{H=1}^3 W_H \tilde{N}_{I,i}(\mathbf{x}_H) \mathbf{q}(\mathbf{x}_H) = \sum_{L=1}^3 \sum_{G=1}^2 N_I(\mathbf{x}_G) \mathbf{q}(\mathbf{x}_G) n_i^L w_G - \sum_{H=1}^3 W_H N_I(\mathbf{x}_H) \mathbf{q}_{,i}(\mathbf{x}_H), \quad (11)$$

其中, W_H 和 w_G 分别为区域积分点和边界积分点的积分权重, n_i^L 表示边界的单位外法线方向. 注意到, 为与标准(经典)的空间导数 $N_{I,i}(\mathbf{x})$ 相区别, 我们使用 $\tilde{N}_{I,i}(\mathbf{x})$ 表示由上式确定的修正导数. 以 x 方向导数为例, 代入 $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y]^T$, $\mathbf{q}_{,x}(\mathbf{x}) = [0 \ 1 \ 0]^T$ 和 $\mathbf{q}_{,y}(\mathbf{x}) = [0 \ 0 \ 1]^T$, 式(11)可进一步写为

$$\mathbf{W} \mathbf{d}_x = \mathbf{f}_x, \quad (12)$$

其中

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 & W_3 \\ W_1 x_1 & W_2 x_2 & W_3 x_3 \\ W_1 y_1 & W_2 y_2 & W_3 y_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_x = \begin{Bmatrix} \tilde{N}_{I,x}(\mathbf{x}_1) \\ \tilde{N}_{I,x}(\mathbf{x}_2) \\ \tilde{N}_{I,x}(\mathbf{x}_3) \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

$$\mathbf{f}_x = \begin{Bmatrix} \sum_{L=1}^3 \sum_{G=1}^2 N_I(\mathbf{x}_G) n_x^L w_G \\ \sum_{L=1}^3 \sum_{G=1}^2 N_I(\mathbf{x}_G) x_G n_x^L w_G - \sum_{H=1}^3 W_H N_I(\mathbf{x}_H) \\ \sum_{L=1}^3 \sum_{G=1}^2 N_I(\mathbf{x}_G) y_G n_x^L w_G \end{Bmatrix}. \quad (14)$$

求解方程式(12),可得到3个积分点上的 x 方向修正导数 $\tilde{N}_{I,x}(\mathbf{x})$, y 方向修正导数 $\tilde{N}_{I,y}(\mathbf{x})$ 可类似求得.使用它们计算式(5)所示的 \mathbf{K} 阵,则该阵元素在一个背景三角形单元上的计算公式可写为

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J d\Omega = k \sum_{H=1}^3 W_H \left[\frac{\partial \tilde{N}_I(\mathbf{x}_H)}{\partial x} \frac{\partial \tilde{N}_J(\mathbf{x}_H)}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{N}_I(\mathbf{x}_H)}{\partial y} \frac{\partial \tilde{N}_J(\mathbf{x}_H)}{\partial y} \right]. \quad (15)$$

应说明的是,式(11)在文献[10]中被称为二阶的离散散度一致性(discrete divergence consistency, DDC),因为这里 $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{,x}(\mathbf{x}) \cup \mathbf{p}_{,y}(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y]^T$ 与二阶基底 $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2]^T$ 相对应.若在每个背景积分单元内仅使用一个积分点,如Chen等^[8]的SCNI方法,则只能满足一阶的离散散度一致性,即 $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y]^T$ 和 $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{,x}(\mathbf{x}) \cup \mathbf{p}_{,y}(\mathbf{x}) = [1]$,则式(11)退化为

$$\tilde{N}_{I,i}(\mathbf{x}_H) = \frac{1}{A_{\Omega}} \sum_{L=1}^3 \sum_{G=1}^2 N_I(\mathbf{x}_G) n_i^L w_G, \quad (16)$$

上式正是Chen等^[8]在SCNI方法中计算修正导数所使用的公式.因而,SCNI只具有一阶的一致性,可被称为线性一致1点积分方法.

3 数值算例

本文采用如下两个算例考察QC3,LC1以及标准三角形(standard triangle, ST)积分方法,温度场相对误差用 E_{ϕ} 表示.ST方法中,分别考察了在每个背景三角形单元中采用1,3,7和16个积分点,它们分别被命名为ST1,ST3,ST7和ST16.MLS形函数采用二阶基底.为方便起见,所有算例的材料参数无量纲化,导热系数 $k=1$,密度 $\rho=1$,计算域取为 1×1 的方形域.

3.1 算例1

分片试验对于保证数值收敛性具有重要意义,它用于测试数值方法是否能够精确再现插值基底所代表的温度场.本文考虑线性和二次分片试验,其温度场的解析解分别设为

$$\phi(\mathbf{x}) = x + y + 1, \quad (17)$$

$$\phi(\mathbf{x}) = x^2 + xy + y^2, \quad (18)$$

与该解析解相应的域内热源分别为 $Q=0$ 和 $Q=-4.4$ 个边界均按解析解施加Dirichlet边界条

件. 计算节点配置为 5×5 , 且分布不规则. 表 1 为各种积分方法温度场的相对误差. 显然, LC1 和 QC3 均通过了线性分片试验. 然而, 对于二次分片试验, LC1 不能通过, 而本文建议的 QC3 方法却精确地通过了该试验. 这预示着 QC3 具有比 LC1 更好的计算精度和收敛性. 值得注意的是, ST 方法既不能通过线性也不能通过二次分片试验. 但是, 随着积分点数目增多, ST 方法的数值误差逐渐减小.

表 1 分片试验结果

Table 1 Results of patch tests

| | ST1 | ST3 | ST7 | ST16 | LC1 | QC3 |
|---------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| E_ϕ (linear patch test) | 0.58E-04 | 0.45E-05 | 0.16E-05 | 0.63E-06 | 0.19E-12 | 0.16E-12 |
| E_ϕ (quadratic patch test) | 0.80E-03 | 0.57E-05 | 0.15E-04 | 0.88E-05 | 0.62E-03 | 0.47E-12 |

3.2 算例 2

考虑计算域上边界有固定热流 $\bar{q} = 10$, 其余边界温度固定为 0. 该问题的解析解见文献 [3]. 采用 11×11 , 17×17 , 33×33 和 41×41 , 4 种节点配置, 得到的方法收敛性如图 2 所示. 可以看出, QC3 比 LC1 精确得多, 且收敛更快. ST16 的精度和收敛性虽已接近于 QC3, 但是由于每个背景单元内采用 16 个积分点, 显然会比 QC3 耗费更多的 CPU 时间, 这由图 3 可看出. 显然, 在考察的各种方法中, QC3 最高效.

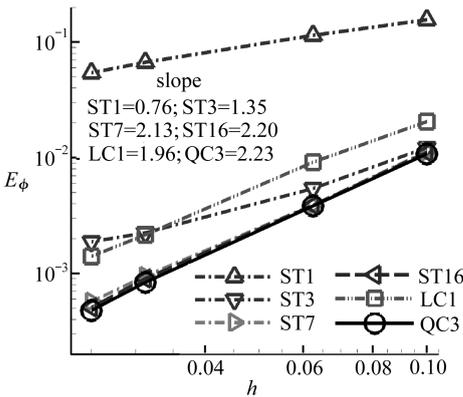


图 2 算例 2 的温度场收敛性

Fig. 2 Convergence of temperature fields in example 2

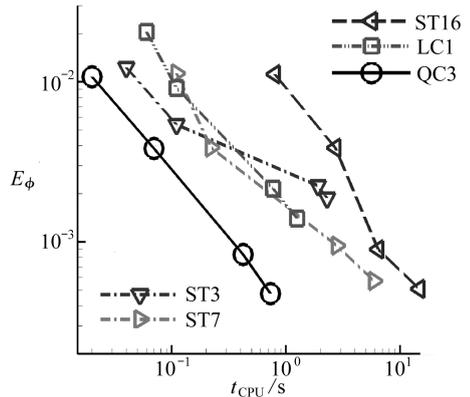


图 3 算例 2 的计算效率

Fig. 3 Computational efficiency in example 2

4 结 论

本文将二阶一致性 3 点积分方法 QC3 应用于稳态热传导问题的无网格法分析, 并与目前无网格领域的主流积分方法 LC1 及标准三角形积分 (ST1, ST3, ST7, ST16) 方法做比较. 数值结果表明, QC3 可精确通过线性和二次分片试验, 且在计算精度、收敛性以及计算效率等方面都显著优于其它方法, 因而是本文建议采用的积分方案.

参考文献 (References):

- [1] 署恒木, 黄朝琴, 李翠伟. 瞬态热传导问题的加权最小二乘无网格法[J]. 计算力学学报, 2008, 25(6): 905-908. (SHU Heng-mu, HUANG Zhao-qin, LI Cui-wei. Meshless weighted least-square method for transient heat conduction problems[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2008, 25(6): 905-908. (in Chinese))

- [2] 孔倩, 李鹏. 热传导方程的无网格 Galerkin 方法数值模拟研究[J]. 计算机应用, 2011, **31**(2): 47-49. (KONG Qian, LI Peng. Element free Galerkin method to solve heat equation[J]. *Journal of Computer Applications*, 2011, **31**(2): 47-49. (in Chinese))
- [3] Liu Y, Zhang X, Lu M W. A meshless method based on least-squares approach for steady-and unsteady state heat conduction problems[J]. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 2005, **47**(3): 257-275.
- [4] Wu X H, Tao W Q. Meshless method based on the local weak-forms for steady state heat conduction problems[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2008, **51**(11/12): 3103-3112.
- [5] Wu S C, Liu G R, Zhang H O, Zhang G Y. A node-based smoothed point interpolation method (NS-PIM) for three-dimensional heat transfer problems[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2009, **48**(7): 1367-1376.
- [6] Beissel S, Belytschko T. Nodal integration of the element-free Galerkin method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, **139**(1/4): 49-74.
- [7] Duan Q L, Belytschko T. Gradient and dilatational stabilizations for stress-point integration in the element-free Galerkin method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, **77**(6): 776-798.
- [8] Chen J S, Wu C T, Yoon S, You Y. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, **50**(2): 435-466.
- [9] Puso M A, Chen J S, Zywicz E, Elmer W. Meshfree and finite element nodal integration methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, **74**(3): 416-446.
- [10] Duan Q L, Li X K, Zhang H W, Belytschko T. Second-order accurate derivatives and integration schemes for meshfree methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2012, **92**(4): 399-424.

Quadratically Consistent Meshfree Methods for Heat Conduction in Steady State

WANG Bing-bing, GAO Xin, DUAN Qing-lin

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, P. R. China)

Abstract: The quadratically consistent 3-point integration method (QC3) was extended to the meshfree analysis of heat conduction problem in steady state. Numerical results show that, in comparison with the standard triangle integration method and the existing 1-point integration method which only satisfies the linear consistency, the proposed QC3 method not only passes the quadratic patch test exactly, but also exhibits significant superiority in terms of accuracy, convergence and efficiency.

Key words: meshfree; numerical integration; derivative correction; heat conduction; consistency