

# 基于 FETI 的非协调等几何分析\*

祝雪峰<sup>1</sup>, 胡平<sup>1</sup>, 马正东<sup>2</sup>, 刘炜<sup>3</sup>

- (1. 大连理工大学 汽车工程学院, 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;  
2. 密歇根大学 机械工程系, 美国 安娜堡 48105;  
3. 北京师范大学珠海分校 应用数学学院, 广东 珠海 519087)

(我刊编委胡平来稿)

**摘要:** 基于非均匀有理 B 样条的等几何分析方法是一种无需网格划分的新的计算方法,旨在实现直接利用 CAD 模型进行分析,有望取代目前传统有限元技术.等几何分析已被成功应用在固体力学,流固耦合及拓扑优化等诸多领域.等几何分析方法要求 CAD 曲面或者实体高阶连续,而绝大多数 CAD 模型内多个曲面不但无法保持高阶连续,而且在公共界面处是几何非协调的.这一缺陷严重制约了等几何分析技术的进一步发展和应用.另外,由于采用高阶单元,等几何分析计算量较等自由度传统有限元要耗时.为解决这些难题,笔者在先前工作基础之上,提出了基于 FETI 方法的非协调等几何分析.新方法较以往的零空间解法更加快捷,适用于大规模数据的并行计算.数值算例表明该方法无需修改 CAD 模型,实施简单,精度满足要求,可处理复杂 CAD 模型.

**关键词:** 非协调等几何分析; FETI 算法; NURBS 有限元; 并行计算

**中图分类号:** O302      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.08.001

## 引 言

非均匀有理 B 样条(non-uniform rational B-spline, NURBS)是计算机辅助几何设计(CAD)和计算机辅助工程(CAE)中最基本的自由曲面表示形式.由于 NURBS 可以精确表示解析形状自由曲线曲面,国际标准组织(ISO)于 1991 年把 NURBS 作为表示工业产品几何形状的工业标准.然而,在计算力学领域,NURBS 应用较少.近年来,随着工程问题规模越来越大,网格数量越来越多,划分网格代价也越来越大.据统计,网格划分几乎占用了分析过程的 80%.另外,工程问题所需要的精度要求也越来越高,要求网格质量越来越好.在这种背景下,人们开始探索新型的有限元技术.人们希望能找到一种能减少网格划分时间,提高分析精度的新方法.

\* 收稿日期: 2012-09-24; 修订日期: 2013-07-01

**基金项目:** 国家自然科学基金重点资助项目(10932003;11272075);国家重点基础研究发展计划资助项目(973 计划,2010CB832700);国家工信部 04 重大专项项目基金资助项目(2011ZX04001-021)

**作者简介:** 祝雪峰(1979—),男,河北人,师资博士后,博士(Tel:+86-411-84706475;E-mail:xuefeng@dlut.edu.cn);  
胡平(1956—),男,吉林人,教授,博士,博士生导师(通讯作者.Tel:+86-411-84702573;E-mail:pinghu@dlut.edu.cn).

无网格技术能够满足这一要求,但是无网格也有很多问题,有一定的适用范围. Hughes 等<sup>[1]</sup>于 2005 年引入了基于 NRUBS 的等几何分析技术,希望实现 CAD 和有限元分析(finite element analysis, FEA)的融合,即摒弃原有的以网格为基础的有限元技术,而采用 NURBS 或者 T-splines 表示的 CAD 曲面作为分析的载体. 其核心思想是用 NURBS 基函数代替原有的 Lagrange 基函数或者其他类型基函数,自由曲面(或实体)控制点上的自由度代替有限元节点的自由度. 等几何分析方法无需划分网格,可实现自动化全局加密或局部加密,其精度在某些领域可媲美谱方法,目前正成为计算力学研究的一个热点. 等几何分析技术目前已应用在固体力学<sup>[2]</sup>、流体力学<sup>[3]</sup>、流固耦合<sup>[4]</sup>、拓扑优化<sup>[5]</sup>等多个领域,被证明是一种极有潜力的计算方法. 我国王东东等<sup>[6]</sup>,张勇等<sup>[7]</sup>学者对等几何分析发展做出了杰出贡献.

然而,等几何分析方法存在一个严重的问题,即要求用于分析的 CAD 曲面必须高阶连续,或者至少连续. 然而主流 CAD 软件生成的模型中的 NURBS 曲面在其内部公共交界处仅保持几何连续,甚至无法满足连续,其 NURBS 单元常常在界面处不匹配. 这种几何常被称为非匹配 NURBS 几何或者非协调 NURBS 几何. 非协调 NURBS 几何在 CAD 和计算机辅助制造(CAM)领域非常常见,而且由于数据转换等原因,经常导致 CAD 模型出现狭缝和重叠. 为处理这些问题,传统有限元方法通过将非协调 CAD 几何划分成逼近网格来进行分析. 但是由于曲面非协调的原因,导致有些有限元单元几何形状产生畸形,而有限元对几何形状要求又比较高,因此网格划分完后又不得不借助人工修复方法,浪费大量时间. 由于非协调几何数据转化或者设计缺陷而引入的重叠或者缝隙都为计算机辅助制造和设计带来很大困难. 据统计,美国每年为修复这些模型所支出费用高达 6 亿美元. 非协调或非匹配的 CAD 几何导致等几何分析无法应用复杂的 CAD 模型作为分析载体,严重阻碍了等几何分析技术的应用和推广.

为解决这一问题,笔者曾发展了基于多点约束和零空间解法的非协调等几何分析方法<sup>[8]</sup>,可分析非协调 NURBS 几何,取得了较好的结果. 但这种方法也有一些缺陷:由于引入零空间技术导致计算量增加,不适合求解大规模工程问题. 为此笔者在本文中引入了 FETI(finite element tearing and interconnecting)方法,利用预处理技术和共轭梯度迭代求解,数值算例表明本方法无需修改 CAD 模型,也无需构建高阶连续的 CAD 模型,可处理复杂 CAD 模型,适用于并行计算.

## 1 非协调等几何分析

### 1.1 非均匀有理 B 样条和等几何分析

NURBS 能精确地描述曲线、复杂的 3D 曲面和实体. NURBS 曲面有如下张量积形式的解析表示:

$$S(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(u, v) P_{i,j}, \quad (1)$$

式中,  $R_{i,j}$  是 NURBS 基函数,  $P_{i,j}$  是控制顶点,  $R_{i,j}$  在区间  $[u_i, u_{i+p+1}] \otimes [v_i, v_{i+p+1}]$  上非零.

NURBS 基函数有很多良好的特性,如

1) 非负性:  $R_{i,j}(u, v) \geq 0$ ;

2) 单位分解性:  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(u, v) = 1$ ;

3) 局部支集性:  $R_{i,j}(u, v) = 0$ , 其中  $u \notin [u_i, u_{i+p+1}]$ ,  $v \notin [v_i, v_{i+p+1}]$ ;

4) 可微性: 微分后仍为 NURBS 基函数.

图 1 为定义在节点区间 $[0, 1]$ 上的一族 NURBS 基函数。

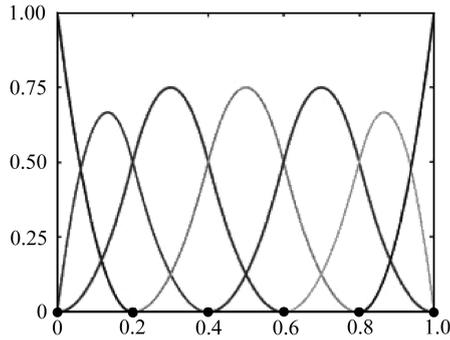


图 1 NURBS 基函数

Fig. 1 NURBS basis functions

NURBS 的另一个优点是计算简单,基函数求值可通过 de boor 递推公式求之,可大大简化计算.任意高阶的基函数均可变成 0 次的常量基函数的线性组合.

等几何分析方法与传统有限元区别有二:1) 用上述 NURBS 或者样条函数代替原有的 Lagrange 基函数; 2) 等几何分析允许自由度被定义在控制点上(通常不在物理域上),而传统有限元要求节点在物理域上.更多细节,读者可参考等几何分析的专著(如文献[9]).

### 1.2 非协调几何和弱连续条件

目前 CAD 模型主流表示方法有两种:边界表示法和实体造型方法.二者生成 CAD 模型时一个重要工具为 Boolean 和算子,常见的如“交、并、补”3 种运算. Boolean 和算子常导致完整的曲面或实体被裁减,从而产生大量的所谓“剪切曲面”.剪切曲面除了在公共边界处保持几何连续外,二者的控制网格几乎没有明显的几何联系,我们称这种几何为非协调剪切 CAD 几何.通过简单的 CAD 操作,可将每个剪切曲面片转化为剪切的样条曲面.处理这种非协调参数样条曲面的等几何分析方法称之为非协调等几何分析方法.

非协调等几何分析的思想源于非协调有限元,可看作非协调有限元的推广.非协调有限元已存在多年,如壳分析中常用的离散 Kirchhoff 单元.诸多非协调有限元的一个公共特点是位移函数或者其微分形式在某些点处保持某种连续.将这种多点约束的思想,推广到非协调参数样条曲面和剪切参数样条曲面(或实体),通过在参数样条曲面间公共边界上找到一些关键点,使定义在这个曲面上的位移函数和其微分形式在这些点处满足某种连续性条件,从而建立这些参数样条曲面之间的联系.

下面以两个非协调剪切 NURBS 曲面(如图 2)为例,给出二者弱  $C^0$  和弱  $G^1$  连续性条件.

#### 1) 选取边界连接点

在非协调等几何分析中,边界连接点的选取需遵循一定的规律,以保证尽可能包括所有的约束信息.

考虑两个非协调的有公共交集的曲面  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$ ,二者几何逼近函数定义为  $S_1, S_2$ ,二者共享边界定义为  $\Gamma$ ,其曲线表达形式为  $C(t)$ .设曲面  $S_i(i=1, 2)$  上的参数  $u-v$  曲线(图 2 中虚线)与曲线  $C(t)$  所交交点在曲线参数空间上的值分别为

$$\begin{cases} \mathbf{L}_i = \left\{ t_0, \frac{t_0 + t_1}{2}, \dots, \frac{t_{n_i-1} + t_{n_i}}{2}, t_{n_i} \right\}, \\ \mathbf{L}_j = \left\{ t_0, \frac{t_0 + t_1}{2}, \dots, \frac{t_{n_j-1} + t_{n_j}}{2}, t_{n_j} \right\}. \end{cases} \quad (2)$$

这些点在区域  $\Omega_i (i = 1, 2)$  的参数空间所对应的点分别为

$$\begin{cases} S_i = \left\{ C_{i,j}(t_0), C_{i,j}\left(\frac{t_0+t_1}{2}\right), \dots, C_{i,j}\left(\frac{t_{n_i-1}+t_{n_i}}{2}\right), C_{i,j}(t_{n_i}) \right\}, \\ S_j = \left\{ C_{i,j}(t_0), C_{i,j}\left(\frac{t_0+t_1}{2}\right), \dots, C_{i,j}\left(\frac{t_{n_j-1}+t_{n_j}}{2}\right), C_{i,j}(t_{n_j}) \right\}, \end{cases} \quad (3)$$

这些点即我们所选的关键点. 此选择方法可保证尽可能减少冗余的刚体位移.

根据 NURBS 点逆算法(参见文献[10]第三章), 可求得以上点在各自曲面参数坐标系下参数值, 定义如下:

$$U_k = \left\{ (u^k, v^k)_1, (u^k, v^k)_2, \dots, (u^k, v^k)_i, \dots, (u^k, v^k)_{m_i} \right\}, \quad k = 1, 2. \quad (4)$$

## 2) 弱 $C^0$ 连续性条件

据  $S_1|_\Gamma = S_2|_\Gamma$ , 可得

$$\sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{m_k} R_{i,j} (u^k, v^k)^k P_{i,j}^k = \sum_{i=1}^{n_l} \sum_{j=1}^{m_l} R_{i,j} (u^l, v^l)^l P_{i,j}^l, \quad (5)$$

向量形式为

$$B^k P^{(k)} = B^l P^{(l)}, \quad (6)$$

其中,  $P^{(k)}$  和  $P^{(l)}$  为控制顶点向量. 此即几何函数控制顶点的弱约束条件.

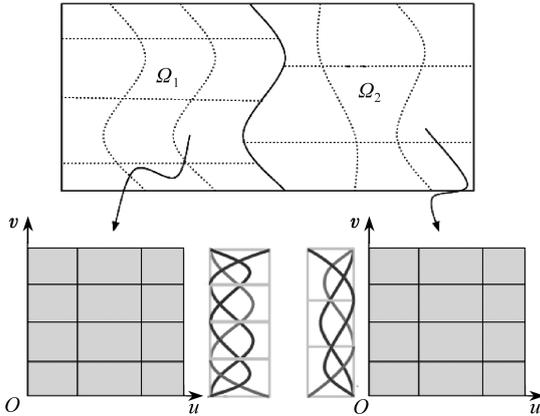


图2 非协调子域及其参数空间

Fig.2 Two nonconforming NURBS patches defined on the parametric spaces

## 1.3 多点约束的非协调等几何分析

强制两个子域的位移函数也满足上述弱  $C^0$  约束条件, 可得到如下的两个曲面自由度的一个约束条件:

$$B^1 d^1 = B^2 d^2, \quad \text{在 } \Omega^1 \cap \Omega^2 \text{ 上.} \quad (7)$$

类似地, 若有  $K$  个子域, 则子域  $\Omega^k$  和  $\Omega^l$  之间的约束为

$$B^k d^k = B^l d^l, \quad \text{在 } \Omega^k \cap \Omega^l \text{ 上.} \quad (8)$$

线弹性力学问题多个子域的能量泛函形式表示如下:

$$J^*(v_1, v_2, \dots, v_k, \lambda) = \sum_i J_i(v_i)_{\Omega_i} + \sum_{1 \leq k, l \leq K} \int_{\Gamma_{k,l}} (v_k - v_l) \lambda_{k,l} d\Gamma, \quad (9)$$

其中,  $v_k$  为定义在每个子域上的试探函数,  $\lambda_{k,l}$  为 Lagrange 乘子, 泛函  $J_i(v_i)$  为每个子域上的能量泛函.

设定义在每个子域上的逼近位移函数为

$$\mathbf{u}_i \approx \mathbf{u}_i^h = \sum_A R_A^i d_A^i, \quad i = 1, 2, \dots, K. \quad (10)$$

全域位移向量形式为

$$\mathbf{d}^T = ((\mathbf{d}_1^1 \mathbf{d}_T^1)^T, (\mathbf{d}_1^2 \mathbf{d}_T^2)^T, \dots, (\mathbf{d}_1^K \mathbf{d}_T^K)^T), \quad (11)$$

全局半正定刚度阵为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & & & \\ & \mathbf{K}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{K}_K \end{bmatrix}, \quad (12)$$

全局载荷向量为

$$\mathbf{f}^T = ((\mathbf{f}^1)^T, (\mathbf{f}^2)^T, \dots, (\mathbf{f}^K)^T). \quad (13)$$

联立约束条件,得到一个半正定方程组:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$\mathbf{A}$  为如下的全局约束矩阵:

$$\mathbf{A}^{(k,l)} \mathbf{d} = [\dots \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{B}_T^k \quad \dots \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{B}_T^l \quad \dots] \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{d}_1^k \\ \mathbf{d}_T^k \\ \vdots \\ \mathbf{d}_1^l \\ \mathbf{d}_T^l \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (15)$$

其中,  $\mathbf{d}_1^k$  代表第  $k$  个子域上与内边界无关的控制点的自由度,  $\mathbf{d}_T^k$  代表第  $k$  个子域上与内边界相关的控制点的自由度.

### 1.4 零空间解法

笔者在文献[8]中采用零空间方法求解上述半正定方程组. 此方法要求  $\mathbf{A}$  行满秩, 如果  $\mathbf{A}$  非行满秩, 则可根据 2.1 小节中所述的预处理方法构造新的行满秩约束矩阵. 由于零空间解法需要求解矩阵  $[\mathbf{A}, \mathbf{0}]$  的子空间向量, 当自由度较大时, 耗时颇为巨大, 因此不适合大规模数据计算. 为此, 引进了适用于并行计算的基于 FETI 的非协调等几何分析.

## 2 基于 FETI 的非协调等几何分析

### 2.1 FETI 算法

FETI(finite element tearing and interconnect)算法最早由 Farhat 等<sup>[11]</sup>引入, FETI 算法非常适合大规模问题的并行计算. 目前被广泛应用在力学、电磁学等多个领域.

FETI 实质是一种域分解算法. 传统域分解法是将子域之间的作用力作为一个参数, 当子域在交界处相互作用力平衡, 则每个子域的解的集合就是全局的解. 相互作用力用共轭梯度迭代来修正. 对于每次迭代, 每个子域的信息都会传递给相邻子域, 非相邻的则需一定迭代次数

后才可传递给对方. 由于有这个特点, 当子域数量增加的时候, 许多域分解法都会出现收敛速度急剧退化的缺点. 而在 FETI 法内有一种机制, 使得收敛的速度和子域的数量没有关系, 这样就允许划分许多的子域. 因此, FETI 算法非常稳定, 被广泛采用. 关于传统 FETI 算法和相应的并行算法, 读者请参见文献[11-12].

## 2.2 基于 FETI 的等几何分析

由于零空间算法需要零空间矩阵, 不适合大规模工程问题的求解. 而本算法引入了共轭梯度迭代和预处理技术, 无需求解大规模约束矩阵的零空间矩阵, 因此适合求解大规模多域问题.

通常假设  $A$  为满秩的; 若  $A$  不满秩, 则可通过奇异值分解之:

$$A = U \begin{bmatrix} S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} V = U \begin{bmatrix} S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} SV_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

其中  $U$  和  $V$  是正交矩阵.

根据方程(14), 有

$$Ad = U \begin{pmatrix} SV_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} d = \mathbf{0} \Rightarrow SV_1 d = \tilde{A}d = \mathbf{0}, \quad (17)$$

其中  $\tilde{A}$  是新的行满秩的约束矩阵.

将上述方程代入到方程(14), 可得到新的方程:

$$\begin{bmatrix} K & \tilde{A}^T \\ \tilde{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d \\ \lambda^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

矩阵  $K$  的零空间矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & R_K \end{bmatrix}. \quad (19)$$

(为简化说明, 下面仍采用  $A$  来表示  $\tilde{A}$ )

显然  $\ker K \cap \ker A = \emptyset$ , 则方程(18)解存在的充分必要条件是

$$f - A^T \lambda \in \text{range } K. \quad (20)$$

令位移函数为

$$d = K^\dagger (f - A^T \lambda) + R\alpha, \quad (21)$$

其中  $R\alpha \in \ker K, R$  满足

$$R^T (f - A^T \lambda) = \mathbf{0}, \quad (22)$$

方程  $Ad = \mathbf{0}$  变为

$$AK^\dagger f - AK^\dagger A^T + \lambda AR\alpha = \mathbf{0}. \quad (23)$$

令  $F = AK^\dagger A^T, w = AF^\dagger f, e = R^T f, G = AR$ , 方程变为

$$\begin{cases} F\lambda - G\alpha = w, \\ G^T \lambda = e. \end{cases} \quad (24)$$

求解此方程可得  $\lambda$  和  $\alpha$ , 进而根据方程(21) 可得  $d$ . 为避免求解  $K$  的伪逆, 考虑到并行计算的方便, 我们引入投影算子

$$P: \Lambda \rightarrow \ker G^T, \tag{25}$$

其中  $\Lambda$  为 Lagrange 空间.

$P$  形式如下:

$$P = I - G (G^T G)^{-1} G^T, \tag{26}$$

结合式(24)和(26),得

$$\begin{cases} P(F\lambda - w) = 0, \\ G^T \lambda = e. \end{cases} \tag{27}$$

采用共轭梯度法求解上述关于  $\lambda$  的方程. 首先选取  $\lambda^0 \in U$ , 满足  $G^T \lambda^0 = e$ . 通常在弹性静力学问题中, 选取

$$\lambda^0 := G (G^T G)^{-1} e. \tag{28}$$

令  $\lambda = \lambda^0 + \tilde{\lambda}$ , 则方程为

$$P^T F \tilde{\lambda} = P^T (w - F \lambda^0), \tag{29}$$

求解后, 可得

$$\lambda = \lambda^0 + \tilde{\lambda}, \alpha = (G^T G)^{-1} G^T (F \lambda - w), \tag{30}$$

利用方程(21)即可求得位移解  $d$ .

以下几点值得注意:

1) 如前所述, 方程(29)、(30)皆可在子域上单独迭代求解, 因此易实现并行化. 如何实现并行化非本文主旨, 不再赘述. 读者请参见文献[3].

2) 本文所述 FETI 方法仅适用于线弹性问题, 对于板壳和动力学问题, 略有不同, 读者请参见文献[4].

3) 传统 FETI 方法是基于有限元网格而言, 而本文是针对非协调 NURBS 子域而言.

### 3 数值算例

#### 3.1 分片检验: 悬臂梁

长 10 宽 2 的悬臂梁如图 3(a)所示, 一端固定. 分别考察 A 和 B 两种载荷约束. 其中 A 工况下力大小为 1 000.00, B 工况下力大小为 150.00. 弹性模量为 1 500.00, Poission 比为 0.25. 如图 3(b)所示, 用两个非协调 NURBS 曲面逼近物理域. 初始控制点分别是 16 和 24, NURBS 单元数目为 4 和 8. 表中其他单元的个数均为 10. 从表 1 可看出, 其它有限元和解析解相比, 除了协调的等几何 NURBS 元之外, 本文方法均优于其它有限元单元. 表 2 表示随着 NURBS 曲面加密, 在载荷 A 和 B 下所得 C 点位移均收敛到解析解.

表 1 悬臂梁应力和位移结果对比

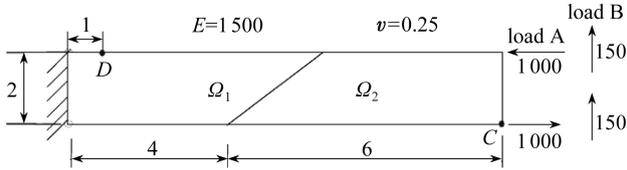
Table 1 Comparison of stress and displacement between the present method and other finite element methods

methods	displacement at C		stress at D	
	load A	load B	load A	load B
Allman	59.75	62.10	-1 904.87	-2 547.51
quasi-conforming element	72.18	74.48	-2 167.05	-2 610.07
IGA	98.17	100.24	-2 965.79	-4 008.13
FETI-NIGA	92.87	93.28	-2 867.39	-3 881.21
exact solution	100.00	103.00	-3 000.00	-4 050.00

表 2 逐步加密 C 点位移变化情况

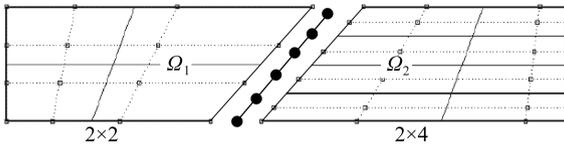
Table 2 Numerical convergence of displacement at C point under different loads

	initial element	refinement 2	refinement 3	refinement 4
	domain 1, domain 2			
	2×2, 2×4	4×4, 4×8	8×8, 8×16	16×16, 16×32
load A	92.87	93.96	97.32	98.91
load B	93.28	95.17	99.76	101.89



(a) 悬臂梁模型

(a) A cantilever beam model



(b) 初始 NURBS 曲面的控制网格

(b) Control nets of two nonconforming NURBS patches

图 3 悬臂梁问题

Fig. 3 A cantilever beam problem

### 3.2 汽车车身部件分析

将本文方法推广到 3D 非协调 NURBS 几何,并尝试用于分析汽车车身零部件.图 4 中左图所示为部分未剪裁的汽车车身 CAD 模型,模型由 5 个非协调的剪切片组成(注意其 NURBS 单元在交界处是非协调的).图 4 中右图表示剪裁后和经过偏移(offset)后的车身.注意在厚度方向,采用 3 个控制顶点,一个二次 NURBS 单元.这么做的原因是其厚度方向的应变可保证至少为一次的,从而避免闭锁现象发生.

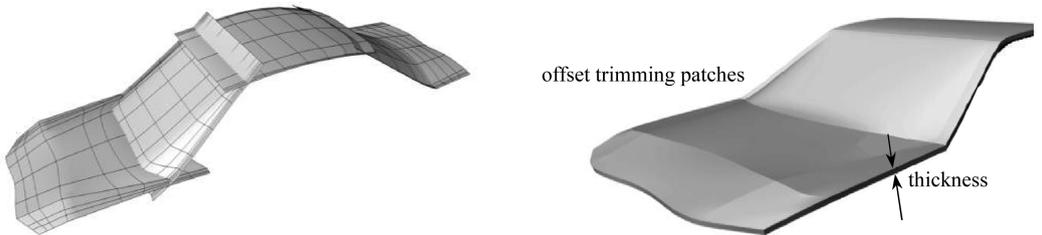


图 4 未剪切前车身和剪切后加厚车身

Fig. 4 Car-body models before refinement and after refinement and offsetting

另外,当网格加密时,由于 FETI 算法收敛性不依赖于子域数目,可通过重节点插值技术,将 5 个子域分成更小子域.将车身两段固定,图 5 所示为此车身在自身重力下的  $x$  方向的位移和应力  $\sigma_{xx}$  的云图.左图为  $x$  方向的位移云图,右图是应力  $\sigma_{xx}$  的云图.表 3 对比了解不同自由度 CAD 模型时 FETI 方法和零空间解法所需时间,计算表明前者所耗时间大约只相当于后

者的 1/5. 因此,对于大规模的工程问题,在计算速度上,FETI 方法明显优于零空间解法. 作者还将本文方法和传统有限元做了对比. 如图 6 所示,随着 NURBS 曲面加密,本文方法和传统有限元(ANSYS147 号固体壳元)所得  $x$  方向的位移最大值均大致收敛到一个略大于 0.5 的值. 有限元位移结果较本文略小. 本算例没有解析解,但从图 6 可知本文方法较传统有限元收敛速度更快.

表 3 FETI 和零空间算法的非协调等几何分析耗时对比

Table 3 Comparison of time consuming between FETI and zero space algorithm

DOF $N$	FETI $t/s$	zero space method $t/s$
2 036	12	23
23 971	61	312
107 892	326	-

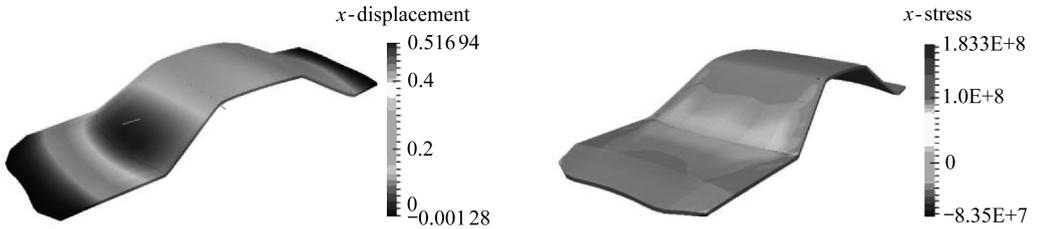


图 5 自重作用下  $x$  位移云图和  $\sigma_{xx}$  应力云图

Fig. 5 Contours of  $x$ -displacement component and  $x$ -stress component under self-weight

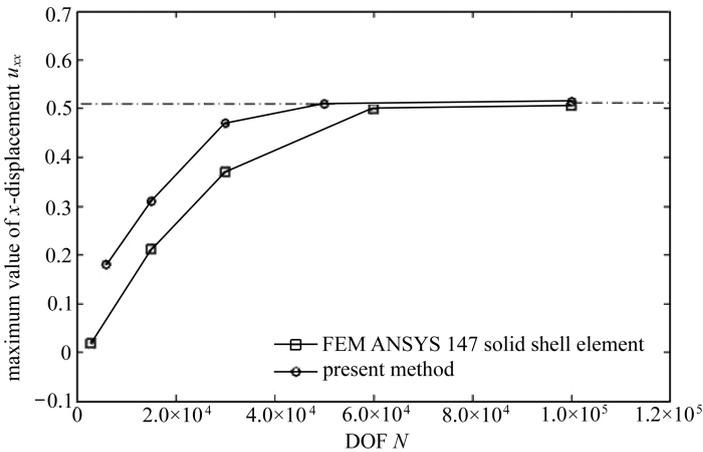


图 6 本文方法和有限元所得  $x$  位移最大值收敛性对比

Fig. 6 Comparison of maximum values of  $x$ -displacements between the present method and traditional finite element (ANSYS 147 solid shell element)

## 4 结 论

本文针对等几何分析的弊端,在原有工作基础之上提出了基于 FETI 的非协调等几何分析方法. 对比先前的零空间方法,本文方法能够满足分析精度要求,适合求解大规模工程问题. 数值算例也证明本方法的有效性. 然而,这种方法在处理固体壳时,厚度方向需要至少 3 个控制顶点,因此计算量仍然较大. 未来,我们将尝试把 Kirchhoff 壳理论和本文方法结合来解决这一

问题,可望减少计算量.

### 参考文献(References):

- [1] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, **194**(39/41): 4135-4195.
- [2] Cottrell J A, Hughes T J R, Reali A. Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, **196**(41/44): 4160-4183.
- [3] Bazilevs Y, Hsu M-C, Akkerman I, Wright S, Takizawa K, Henicke B, Spielman T, Tezduyar T E. 3D simulation of wind turbine rotors at full scale—part I: geometry modeling and aerodynamics[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2011, **65**(1/3): 207-235.
- [4] Bazilevs Y, Calo V M, Zhang Y, Hughes T J R. Isogeometric fluid-structure interaction analysis with applications to arterial blood flow[J]. *Computational Mechanics*, 2006, **38**(4/5): 310-322.
- [5] Wall W A, Frenzel M A, Cyron C. Isogeometric structural shape optimization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, **197**(33/40): 2976-2988.
- [6] 王东东, 轩军厂, 张灿辉. 几何精确 NURBS 有限元中边界条件施加方式对精度影响的三维计算分析[J]. 计算力学学报, 2012, **29**(1): 31-37. (WANG Dong-dong, XUAN Jun-chang, ZHANG Can-hui. A three dimensional computational investigation on the influence of essential boundary condition imposition in NURBS isogeometric finite element analysis[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, **29**(1): 31-37. (in Chinese))
- [7] 张勇, 林皋, 胡志强, 钟红. 基于等几何分析的比例边界有限元方法[J]. 计算力学学报, 2012, **29**(3): 433-438. (ZHANG Yong, LIN Gao, HU Zhi-qiang, ZHONG Hong. Scaled boundary finite element method based on isogeometric analysis[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, **29**(3): 433-438. (in Chinese))
- [8] 祝雪峰, 马正东, 胡平. 几何精确的非协调等几何分析[J]. 固体力学学报, 2012, **33**(5): 487-492. (ZHU Xue-feng, MA Zheng-dong, HU Ping. Nonconforming isogeometric analysis with exact geometry[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2012, **33**(5): 487-492. (in Chinese))
- [9] Cottrell J A, Hughes T J R, Bazilevs Y. *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*[M]. UK: Wiley, 2009.
- [10] Piegl L, Tiller W. *The NURBS Book*[M]. 2nd ed. Monographs in Visual Communication. USA: Springer Verlag, 1997.
- [11] Farhat C, Roux F X. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991, **32**(6): 1205-1227.
- [12] Farhat C, Roux F. Implicit parallel processing in structural mechanics[J]. *Computational Mechanics Advances*, 1994, **2**(1): 1-124.
- [13] Farhat C, Lesoinne M, LeTallec P, Pierson K, Rixen D. FETI-DP: a dual-primal unified FETI method—part I: a faster alternative to the two-level FETI method[J]. *International Journal*

*for Numerical Methods in Engineering*, 2001, **50**(7): 1523-1544.

## Nonconforming Isogeometric Analysis With FETI Method

ZHU Xue-feng<sup>1</sup>, HU Ping<sup>1</sup>, MA Zheng-dong<sup>2</sup>, LIU Wei<sup>3</sup>

- (1. *State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, School of Automotive Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P. R. China;*
2. *Department of Mechanical Engineering, Michigan University, Ann Arbor, Michigan 48105, USA;*
3. *College of Applied Mathematics, Beijing Normal University (Zhuhai), Zhuhai, Guangdong 519087, P. R. China)*

**Abstract:** Nonconforming isogeometric analysis (NIGA) with FETI method was proposed. The major purpose was to enable applying the isogeometric analysis directly to the NURBS models with trimmed patches for more general and practical engineering applications. The basic idea was to use the NURBS version of FETI to replace the zero space algorithm. The present method can deal with large scale engineering problem rapidly and is suitable for parallel computing. Numerical examples for patch tests and a car body analysis are presented to verify the efficiency of this method.

**Key words:** nonconforming isogeometric analysis; FETI method; NURBS-based finite element method; parallel computing