

混合层无粘稳定性分析的 Legendre 级数解*

郭欣¹, 王嫻², 许丁², 谢公南³

- (1. 中煤科工集团西安研究院, 西安 710054;
2. 西安交通大学 航天航空学院, 机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049;
3. 西北工业大学 工程仿真与宇航计算实验室, 西安 710072)

(本刊编委谢公南来稿)

摘要: 基于泛函分析中的不动点理论, 采用不动点方法首次获得混合层无粘线性稳定性方程的显式 Legendre 级数解, 该级数解在整个无界流动区域内一致有效. 现有基于传统摄动法得到的无界流动区域一致有效解仅适用于长波扰动和中性扰动两种特殊情况, 而使用不动点方法可以得到所有不稳定扰动波数的特征解. 另外, 在不动点方法框架下, 扰动相速度和扰动增长率可根据方程的可解性条件来唯一确定. 为了验证该方法的有效性, 将该方法和现有文献中的数值计算结果相比较, 结果表明该方法具有精度高、收敛快等优点.

关键词: 不动点方法; 可解性条件; Legendre 级数解; Rayleigh 稳定性方程; 混合层

中图分类号: O351; TB126 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.08.002

引 言

具有不同属性的流体混合过程广泛出现在自然界与工业生产当中, 如发动机燃烧室中燃料和空气的混合燃烧过程. 其中混合层流动可看作这种混合过程的一个简化模型. 混合层流动作为一种自由剪切流动已得到了广泛的关注. 国内多家高校及研究所针对混合层流动业已开展了深入的研究, 主要涉及有如何增强混合层混合过程的方法, 混合层流动的数值模拟, 以及混合层流动中旋涡与小激波结构的演化规律的探讨等^[1-5].

关于混合层这类自由剪切层流动的稳定性问题更是得到了人们的重视. 最早 Rayleigh 给出了平行剪切流动无粘稳定性的 Rayleigh 拐点定理^[6]. 随后人们对该问题进行了深入的研究, 早期关于自由剪切层稳定性问题的综述性文章可见文献^[7], 在该文中 Michalke 主要讨论了低速不可压缩、忽略热传导的自由剪切层的稳定性问题. 另外, 关于自由剪切层的线性以及非线性稳定性问题的详细讨论可参见文献^[8].

虽然真实流动中总是存在粘性作用, 但是 Rayleigh 拐点定理表明速度剖面具有拐点的流动对任意小的无粘扰动总是不稳定的, 而粘性对这类流动来说总是起着稳定的作用^[9]. 所以

* 收稿日期: 2013-05-30; 修订日期: 2013-06-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11102150; 11242010); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目

作者简介: 郭欣(1981—), 女, 西安人, 工程师, 硕士(E-mail: guoxin285@126.com);
许丁(1980—), 男, 西安人, 讲师, 博士(通讯作者. E-mail: dingxu@mail.xjtu.edu.cn).

对混合层、射流等流动来说,无粘稳定性分析仍然具有实际意义.因此,在本文中考虑混合层流动的无粘稳定性分析,控制方程是 Rayleigh 稳定性方程^[6]

$$(U - c) \left(\frac{d^2 \phi}{dy^2} - \alpha^2 \phi \right) - \frac{d^2 U}{dy^2} \phi = 0, \quad (1)$$

其中,函数 $\phi(y)$ 为扰动流函数的特征函数,通常 $\phi(y)$ 是复值函数,即 $\phi = \phi_r + i\phi_i$. 方程(1)中的参数 α 为扰动波的波数, c 为扰动波速度.当进行时间模态分析时,扰动波数 α 给定,寻求 c 关于 α 的函数形式 $c = c(\alpha)$. 一般时间模态分析中 c 为复数,即 $c = c_r + ic_i$,其中实部 c_r 代表扰动波的相速度,而虚部 c_i 与 α 的积为扰动增长率.

另外,对于像混合层这样的无界流动,从物理上考虑扰动在无穷远处趋于 0, $\phi(y)$ 在数学上具有如下渐近性质^[10-12]:

$$\phi(y) \sim e^{\mp \alpha y}, \quad y \rightarrow \pm \infty. \quad (2)$$

目前来说,关于 Rayleigh 稳定性方程的求解可以分为解析法和数值法两大类.其中解析法以摄动法为典型代表,在早期计算机还未普及时主要采用这种方法^[10-11,13-16]. Heisenberg^[14] 给出了以 α^2 为摄动参数的摄动解. Tollmien^[15] 独立得到了一个用 Frobenius 级数表示的渐近解. 随后指出引入某种变换时这两种解的形式实际上是等价的^[13]. 虽然上述摄动解具有显式解析的形式,但是这些解在数学上是局部解,仅对于有界流动是一致收敛的. 对于无界流动,如本文讨论的混合层流动,这些摄动解不满足一致有效,尤其是他们不能满足式中指出的渐近特性. 为了克服上述不足, Drazin 等^[10-11] 考虑了无界流动的长波扰动形式 ($\alpha \rightarrow 0$), 并给出了一个对于无界流动一致有效的摄动解,该摄动解以 α 为摄动参数. 遗憾的是该摄动解只在 $\alpha = 0$ 附近成立,因此该解不能预测最大扰动增长率. Tatsumi 等^[16] 给出了混合层另外两个形式的摄动解,他们分别在 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 1$ 附近成立,但是当 α 位于 $0 < \alpha < 1$ 的中间区域时这两个摄动解都将失效.

在数值求解方面,随着高速、大容量计算机的迅速发展,以及高效数值算法的提出,现在对包括 Rayleigh 方程在内的流动稳定性方程的求解已变得容易得多. 例如打靶法,有限差分方法、谱方法^[6,13,17-19] 等已在流动稳定性方程求解中得到了广泛使用. 其中谱方法由于其高精度的特点更是受到广大学者的欢迎. 谱方法的基本思想是一个函数 $\chi(z)$ 可以用一组完备的正交函数系 $\{e_k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$ 来展开:

$$\chi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\chi}_k e_k, \quad (3)$$

比如周期函数可以用三角函数系进行 Fourier 级数展开. 在实际应用中,不可能使用无穷个基函数,通常选用 N 个基函数的线性组合 $\chi_N(z)$ 来逼近 $\chi(z)$:

$$\chi(z) \approx \chi_N(z) = \sum_{k=0}^N \hat{\chi}_k e_k. \quad (4)$$

一般来说, $\chi_N(z)$ 逼近 $\chi(z)$ 的程度主要由基函数的个数 N 来决定, N 越大精度越高. 另外,通常的做法是展开式(4)只在有限的离散点上严格成立,这些离散点位置的选取也对解的精度和算法执行效率有着重要的影响.

虽然谱方法的思想很简单,但是对一个具体问题要想得到满足一定精度的近似解 $\chi_N(z)$, 选取合适的 N 值是非常关键的. N 太小精度不够,太大计算代价过高. 通常的做法是按照由小到大的顺序选取多个 N 值分别进行尝试,如 $N_1, N_2, N_3 (N_1 < N_2 < N_3)$, 得到 3 个精度逐渐增加的近似解 $\chi_{N_1}(z)$, $\chi_{N_2}(z)$ 和 $\chi_{N_3}(z)$. 这些不同精度的近似解之间的联系是什么呢? 一种经济有

效的做法是高阶精度解在求得时可以充分利用低阶精度解的结果,高阶解是低阶解与修正项的组合.如果算法具有这种性质,称这种算法具有继承性.遗憾的是包括传统谱方法在内的数值算法大多不具有这种继承性,即在求高阶解时低阶解所包含的有效信息没有被充分利用.

最近,基于泛函分析中的不动点思想所提出的不动点方法^[20]被用来获得微分方程的显式近似解析解.本文采用不动点方法,得到了混合层无粘稳定性分析的显式 Legendre 级数解,该 Legendre 级数解在整个流动区域内一致有效.并且该方法不再局限于长波扰动,采用该方法可以精确得到所有不稳定扰动波数的 Legendre 级数解.同时需要指出的是在采用不动点方法求解方程时,不同精度的近似解被紧密联系起来,高阶近似解可看成是低价近似解与修正项的组合,从而低阶近似解所包含的有效信息被充分利用起来.正是由于不动点方法具有上述的继承性质,因此解的精度可以经济、高效地逐步提高到任意精度.另外在不动点方法框架下,扰动相速度和扰动增长率的确定变得更加直接,可以由方程的可解性条件来给出.

1 混合层无粘稳定性方程

混合层的基本流动速度分布 $U(y)$ 一般可用如下函数较好地描述^[12-13]:

$$U(y) = (1 + \tanh y)/2, \quad (5)$$

该速度分布在 $y_s = 0$ 处存在一个拐点,即 $U''(y_s) = 0$. 该流动所对应的无粘稳定性方程可用 Rayleigh 方程(1)来描述.对于混合层这样的无界流动,物理上扰动在无穷远处趋于 0,相应的边界条件为

$$\phi(-\infty) = 0, \quad \phi(+\infty) = 0. \quad (6)$$

方程(1)及边界条件(6)都是齐次的,对于给定波数 α ,方程要有非平凡解只有在特定 c 才有可能.所以, Rayleigh 方程实际上是一个以 c 为特征值、 ϕ 为特征函数的特征值问题.由于问题的齐次性,特征函数 ϕ 的确定可以相差任意非 0 常数因子.不失一般性,这里引入下述辅助条件将 ϕ 确定下来:

$$\phi_r(0) = 1, \quad \phi_i(0) = 0. \quad (7)$$

对方程(1)及边界条件(6)进行实部与虚部分离,可以得到

$$\begin{cases} (U - c_r) \left[\frac{d^2 \phi_r}{dy^2} - \alpha^2 \phi_r \right] + c_i \left[\frac{d^2 \phi_i}{dy^2} - \alpha^2 \phi_i \right] - \frac{d^2 U}{dy^2} \phi_r = 0, \\ (U - c_r) \left[\frac{d^2 \phi_i}{dy^2} - \alpha^2 \phi_i \right] - c_i \left[\frac{d^2 \phi_r}{dy^2} - \alpha^2 \phi_r \right] - \frac{d^2 U}{dy^2} \phi_i = 0. \end{cases} \quad (8)$$

对于 $\alpha = 0$ 这种平凡情况,容易找到上述方程(8)的解

$$\begin{cases} \phi_r|_{\alpha=0} = 1, \quad \phi_i|_{\alpha=0} = \tanh y, \\ c_r|_{\alpha=0} = 1/2, \quad c_i|_{\alpha=0} = 1/2. \end{cases} \quad (9)$$

为了方便处理无界区域,这里对自变量 y 做适当变换

$$z = \tanh y. \quad (10)$$

通过该变换原来的无界区域 $y \in (-\infty, +\infty)$ 被映射到一个有界区域 $z \in (-1, 1)$. 另外考虑到特征函数 $\phi(y)$ 所满足的前述渐近性质(2),对 ϕ_r 和 ϕ_i 引入如下变换关系:

$$\phi_r(z) = (1 - z^2)^{\alpha/2} f(z), \quad \phi_i(z) = (1 - z^2)^{\alpha/2} g(z). \quad (11)$$

那么函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 所需满足的方程为

$$\begin{cases} [(U - c_r)^2 + c_i^2] \cdot \mathcal{D}[f] + [(U - c_r)f - c_i g] \cdot \Psi[U] = 0, \\ [(U - c_r)^2 + c_i^2] \cdot \mathcal{D}[g] + [(U - c_r)g + c_i f] \cdot \Psi[U] = 0, \end{cases} \quad (12)$$

其中,算子 $\mathfrak{D}[\cdot]$ 和 $\Psi[\cdot]$ 定义为

$$\begin{cases} \mathfrak{D}[\cdot] = \left[(1-z^2) \frac{d^2}{dz^2} - 2z(1+\alpha) \frac{d}{dz} - \alpha(1+\alpha) \right], \\ \Psi[\cdot] = \left[2z \frac{d}{dz} - (1-z^2) \frac{d^2}{dz^2} \right]. \end{cases} \quad (13)$$

为了进一步增加函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 之间的耦合性,引入函数 $r(z)$ 和 $s(z)$

$$\begin{cases} r(z) = f(z) + g(z), \\ s(z) = g(z) - f(z). \end{cases} \quad (14)$$

最后,这里得到关于 $r(z)$ 和 $s(z)$ 的方程、边界条件及辅助条件为

$$\begin{cases} [(U - c_r)^2 + c_i^2] \cdot \mathfrak{D}[r] + [(U - c_r)r - c_i s] \cdot \Psi[U] = 0, \\ [(U - c_r)^2 + c_i^2] \cdot \mathfrak{D}[s] + [(U - c_r)s + c_i r] \cdot \Psi[U] = 0, \\ |r(\pm 1)| < \infty, |s(\pm 1)| < \infty, \\ r(0) = 1, s(0) = -1. \end{cases} \quad (15)$$

2 基于不动点方法的混合层稳定性分析

不动点 (fixed point) 是泛函分析中一个非常重要的概念^[21], 并被广泛用来探讨方程解的存在性和唯一性. 比如众所周知的求解非线性代数方程的 Newton 切线法就是基于 Banach 不动点定理. 最近, 不动点的概念被进一步拓展, 提出了用来获得微分方程显式近似解析解的不动点方法 (fixed point method, FPM)^[20]. 这里将采用不动点方法来分析混合层无粘稳定性特征, 并给出扰动增长率和采用 Legendre 级数表示的特征函数.

2.1 不动点方法 (fixed point method, FPM)

首先, 为了下文叙述方便, 这里引入两个算子 $\mathcal{R}[r, s; c_r, c_i]$, $\mathcal{S}[r, s; c_r, c_i]$,

$$\begin{cases} \mathcal{R}[r, s; c_r, c_i] = [(U - c_r)^2 + c_i^2] \cdot \mathfrak{D}[r] + [(U - c_r)r - c_i s] \cdot \Psi[U], \\ \mathcal{S}[r, s; c_r, c_i] = [(U - c_r)^2 + c_i^2] \cdot \mathfrak{D}[s] + [(U - c_r)s + c_i r] \cdot \Psi[U]. \end{cases} \quad (16)$$

那么方程 (15) 可以用算子表述为

$$\begin{cases} \mathcal{R}[r, s; c_r, c_i] = 0, \mathcal{S}[r, s; c_r, c_i] = 0, \\ |r(\pm 1)| < \infty, |s(\pm 1)| < \infty, \\ r(0) = 1, s(0) = -1. \end{cases} \quad (17)$$

接着, 按照不动点方法, 针对上述方程 (17) 引入两个压缩映射 $\mathcal{T}_r[r, s; c_r, c_i]$ 和 $\mathcal{T}_s[r, s; c_r, c_i]$

$$\begin{cases} \mathcal{T}_r[r, s; c_r, c_i] = r - \mathcal{L}_C^{-1}[\mathcal{R}[r, s; c_r, c_i]], \\ \mathcal{T}_s[r, s; c_r, c_i] = s - \mathcal{L}_C^{-1}[\mathcal{S}[r, s; c_r, c_i]], \end{cases} \quad (18)$$

其中, $\mathcal{L}_C[\cdot]$ 是一个线性双射算子, 在不动点方法里被称为线性特征算子. $\mathcal{L}_C^{-1}[\cdot]$ 是 $\mathcal{L}_C[\cdot]$ 的逆算子.

根据式 (18) 中的压缩映射, 可以建立如下迭代式:

$$\begin{cases} r_{n+1} = \mathcal{T}_r[r_n, s_n; c_{r,n+1}, c_{i,n+1}] = r_n - \mathcal{L}_C^{-1}[\mathcal{R}[r_n, s_n; c_{r,n+1}, c_{i,n+1}]], \\ s_{n+1} = \mathcal{T}_s[r_n, s_n; c_{r,n+1}, c_{i,n+1}] = s_n - \mathcal{L}_C^{-1}[\mathcal{S}[r_n, s_n; c_{r,n+1}, c_{i,n+1}]], \\ r_{n+1}(0) = 1, s_{n+1}(0) = -1, \\ |r_{n+1}(\pm 1)| < \infty, |s_{n+1}(\pm 1)| < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (19)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}_C[r_{n+1}] = \mathcal{L}_C[r_n] - \varpi_{n+1} \cdot \mathcal{R}[r_n, s_n; c_{r,n+1}, c_{i,n+1}], \\ \mathcal{L}_C[s_{n+1}] = \mathcal{L}_C[s_n] - \varpi_{n+1} \cdot \mathcal{S}[r_n, s_n; c_{r,n+1}, c_{i,n+1}], \\ r_{n+1}(0) = 1, s_{n+1}(0) = -1, \\ |r_{n+1}(\pm 1)| < \infty, |s_{n+1}(\pm 1)| < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (20)$$

其中, $c_{r,n}$ 和 $c_{i,n}$ 分别是特征值 c_r 和 c_i 的 n 阶近似值, 它们将由 2.4 小节里的可解性条件来确定. 上述迭代式(20)中的非 0 实参数序列 $\{\varpi_n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 称为松弛因子. 文献[20]中指出松弛因子的适当选取可以增加迭代收敛速度、改善迭代稳定性, 但是松弛因子的确定依赖于问题本身. 关于如何确定松弛因子将在 2.6 小节中给予讨论.

通过求解上述迭代式(20), 可以得到解的序列 $\{(r_n, s_n) | n = 0, 1, 2, \dots\}$ 以及特征值序列 $\{(c_{r,n}, c_{i,n}) | n = 1, 2, 3, \dots\}$. 当迭代式(20)两边取极限时, 易看出极限值 $(r^*, s^*; c_r^*, c_i^*)$ 满足原方程和边界条件, 即

$$\begin{cases} \mathcal{R}[r^*, s^*; c_r^*, c_i^*] = 0, \mathcal{S}[r^*, s^*; c_r^*, c_i^*] = 0, \\ r^*(0) = 1, s^*(0) = -1, \\ |r^*(\pm 1)| < \infty, |s^*(\pm 1)| < \infty. \end{cases} \quad (21)$$

此时也称 $(r^*, s^*; c_r^*, c_i^*)$ 为压缩映射 $\mathcal{Q}_r[r, s; c_r, c_i]$ 和 $\mathcal{Q}_s[r, s; c_r, c_i]$ 的不动点.

2.2 线性特征算子 $\mathcal{L}_C[\cdot]$

首先, 选取第一类 Legendre 多项式 $\{P_k(z) | k = 0, 1, 2, \dots\}$ 作为基函数. 在谱方法中, 一个定义在区间 $z \in [-1, 1]$ 上的非周期函数 $\chi(z)$ 可以用 $P_k(z)$ 的线性组合来逼近:

$$\chi(z) \approx \chi_N(z) = \sum_{k=0}^N \hat{\chi}_k P_k(z), \quad (22)$$

其中, $P_k(z)$ 满足下述 k 阶 Legendre 微分方程:

$$(1 - z^2) \frac{d^2 P_k}{dz^2} - 2z \frac{dP_k}{dz} + k(k+1)P_k = 0. \quad (23)$$

这里给出几个低阶 Legendre 多项式的具体形式:

$$P_0(z) = 1, P_1(z) = z, P_2(z) = (3z^2 - 1)/2. \quad (24)$$

Legendre 多项式的一个重要特点是第 k 阶 $P_k(z)$ 是一个关于 z 的 k 次多项式, 并且 $P_k(z)$ 是有界的

$$|P_k(z)| \leq 1, \quad -1 \leq z \leq 1. \quad (25)$$

另外需要注意的是 Legendre 多项式两两正交

$$\int_{-1}^1 P_m(z) P_n(z) dz = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2/(2m+1), & m = n. \end{cases} \quad (26)$$

更多关于 Legendre 多项式的性质可以参见文献[19].

本问题的线性特征算子 $\mathcal{L}_C[\cdot]$ 采用 0 阶 Legendre 微分方程形式

$$\mathcal{L}_C[\cdot] = \left[(1 - z^2) \frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{d}{dz} \right]. \quad (27)$$

在不动点方法中, 线性方程 $\mathcal{L}_C[\cdot] = 0$ 的通解被称为线性特征算子 $\mathcal{L}_C[\cdot]$ 的核函数. 容易得到本问题的核函数为 $P_0(z)$ 和 $Q_0(z)$, 即

$$\mathcal{L}_C[C_1 P_0(z) + C_2 Q_0(z)] = 0, \quad (28)$$

其中, $Q_0(z) = (1/2) \ln[(1+z)/(1-z)]$ 是第二类 0 阶 Legendre 多项式, C_1 和 C_2 为任意积分常数.

实际上,这里需要放弃 $Q_0(z)$, 因为 $Q_0(z)$ 在端点 $z = \pm 1$ 处无界, 并且不能用基函数 $\{P_k(z) \mid k = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ 的线性组合来表达. 这违背不动点方法中的完备性原则, 即迭代序列中的任一元素都可以用基函数的线性组合来表达:

$$\begin{cases} r_n = \sum_k a_{n,k} P_k(z), \\ s_n = \sum_k b_{n,k} P_k(z), \end{cases} \quad (29)$$

其中, $a_{n,k}, b_{n,k}$ 是展开系数. 在后面 2.4 节中将指出该完备性原则可导出本问题所需满足的可解性条件, 而可解性条件可用来确定特征值 c_r 和 c_i .

2.3 初始值 (r_0, s_0)

迭代初始值 (r_0, s_0) 的选取具有较大的自由. 这里给出一种较为方便的选择, 即选用原方程当 $\alpha = 0$ 时的解 (见方程(9)) 来构造初始值, 相应 (r_0, s_0) 的形式为

$$\begin{cases} r_0(z) = 1 + z = P_0(z) + P_1(z), \\ s_0(z) = -1 + z = P_1(z) - P_0(z). \end{cases} \quad (30)$$

2.4 可解性条件 (solvability condition)

采用传统谱方法求解流动稳定性方程时, 特征值 c_r 及 c_i 通常采用 Q-R 算法^[22-23] 来确定. 但是在不动点方法框架下, 特征值 c_r 及 c_i 的确定变得更加直接明了.

首先, 将式(20)右端的第 2 项用 Legendre 多项式的线性组合来表示:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[r_n, s_n] = \sum_k \xi_{n,k} P_k(z), \\ \mathcal{S}[r_n, s_n] = \sum_k \eta_{n,k} P_k(z). \end{cases} \quad (31)$$

那么非齐次方程(20)的通解为

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + \varpi_{n+1} \left[\sum_{k \neq 0} \frac{\xi_{n,k}}{k(k+1)} P_k(z) + \frac{\xi_{n,0}}{2} \ln(1-z^2) \right] + \\ \quad C_1 P_0(z) + C_2 Q_0(z), \\ s_{n+1} = s_n + \varpi_{n+1} \left[\sum_{k \neq 0} \frac{\eta_{n,k}}{k(k+1)} P_k(z) + \frac{\eta_{n,0}}{2} \ln(1-z^2) \right] + \\ \quad C_3 P_0(z) + C_4 Q_0(z), \end{cases} \quad (32)$$

其中, C_1, C_2, C_3 和 C_4 为积分常数. 考虑到不动点方法所需满足的完备性原则, 上式右端中的 $\ln(1-z^2)$ 和 $Q_0(z)$ 必须舍去, 于是系数 $C_2, C_4, \xi_{n,0}$ 和 $\eta_{n,0}$ 必须取 0, 即

$$C_2 = 0, C_4 = 0, \quad (33)$$

$$\xi_{n,0} = \eta_{n,0} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (34)$$

从式(32)可以看出完备性原则的数学意义是确保解在整个定义域内一致有效. 式(34)就是本问题的可解性条件, 该条件可以用来确定特征值 $c_{r,n}$ 和 $c_{i,n}$.

上述可解性条件是基于完备性原则来推导的, 实际上, 可以采用一种更为严格的方式来得到该可解性条件. 首先将本问题的迭代式(20)整理成下述形式:

$$\begin{cases} (1-z^2)r''_{n+1} - 2zr'_{n+1} = (1-z^2)r''_n - 2zr'_n - \varpi_{n+1} \cdot \mathcal{L}[r_n, s_n; c_{r,n+1}, c_{i,n+1}], \\ (1-z^2)s''_{n+1} - 2zs'_{n+1} = (1-z^2)s''_n - 2zs'_n - \varpi_{n+1} \cdot \mathcal{S}[r_n, s_n; c_{r,n+1}, c_{i,n+1}], \\ r_{n+1}(0) = 1, s_{n+1}(0) = -1, \\ |r_{n+1}(\pm 1)| < \infty, |s_{n+1}(\pm 1)| < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \end{cases} \quad (35)$$

注意到上述方程(35)是非线性非齐次方程,所以该方程要有解,非齐次项需要满足可解性条件.将方程(35)两边关于 z 在区间 $-1 \leq z \leq 1$ 内积分,对左边采用分部积分可以得到

$$\int_{-1}^1 [(1-z^2)r_{n+1}'' - 2zr_{n+1}'] dz = 0, \quad \int_{-1}^1 [(1-z^2)s_{n+1}'' - 2zs_{n+1}'] dz = 0, \quad (36)$$

于是右侧需满足下述关系:

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 \mathcal{R}[r_n, s_n; c_{r,n+1}, c_{i,n+1}] dz = 0, \\ \int_{-1}^1 \mathcal{S}[r_n, s_n; c_{r,n+1}, c_{i,n+1}] dz = 0. \end{cases} \quad (37)$$

将式(31)代入式(37),并考虑到 Legendre 多项式的正交性质,可以再次得到可解性条件:

$$\xi_{n,0} = \eta_{n,0} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (38)$$

2.5 不动点方法的继承性

在本节中进一步考虑低阶近似解与高阶近似解之间的关系.首先,从式(32)~(34)可得

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + \varpi_{n+1} \sum_{k \neq 0} \frac{\xi_{n,k}}{k(k+1)} P_k(z) + C_1 P_0(z) = \sum_k a_{n+1,k} P_k(z), \\ s_{n+1} = s_n + \varpi_{n+1} \sum_{k \neq 0} \frac{\eta_{n,k}}{k(k+1)} P_k(z) + C_3 P_0(z) = \sum_k b_{n+1,k} P_k(z), \end{cases} \quad (39)$$

其中,积分常数 C_1 和 C_3 将由下述辅助条件唯一确定:

$$r_{n+1}(0) = 1, \quad s_{n+1}(0) = -1. \quad (40)$$

从式(39)可清楚看出高阶近似解 (r_{n+1}, s_{n+1}) 由低阶近似解 (r_n, s_n) 与修正项

$$\varpi_{n+1} \sum_{k \neq 0} \frac{\xi_{n,k}}{k(k+1)} P_k(z) + C_1 P_0(z), \quad \varpi_{n+1} \sum_{k \neq 0} \frac{\eta_{n,k}}{k(k+1)} P_k(z) + C_3 P_0(z) \quad (41)$$

组成.也就是说,在求解高阶近似解时,低阶近似解所提供的有效信息被充分利用,近似解的精确性可以通过不断做修正来逐步提高.前文已述及这种性质称为继承性,而传统有限差分法与谱方法是不具有继承性的.

2.6 松弛因子的确定

适当的松弛因子 $\{\varpi_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 通常可以用来改善迭代的稳定性,加快迭代的收敛速度.但是松弛因子的确定依赖于问题本身,不同问题的松弛因子可以相差很大.这里采用残差最快下降搜索算法来确定松弛因子 $\{\varpi_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$.

首先引入 n 阶近似解所对应的残差 $\mathcal{R}_{es,n}$

$$\mathcal{R}_{es,n} = \mathcal{R}_{es,n}(\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_n) = \int_{-1}^1 ((\mathcal{R}[r_n, s_n; c_{r,n}, c_{i,n}])^2 + (\mathcal{S}[r_n, s_n; c_{r,n}, c_{i,n}])^2) dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (42)$$

那么,最优松弛因子的选取是使上述残差获得最小值.

例如,当 $n = 1$ 时, $\mathcal{R}_{es,1}(\varpi_1)$ 只是 ϖ_1 的函数,最优松弛因子 $\varpi_{1,opt}$ 可以通过求解下述方程来获得:

$$d\mathcal{R}_{es,1}/d\varpi_1 = 0. \quad (43)$$

接下来考虑 $n = 2$ 时,对应残差 $\mathcal{R}_{es,2}(\varpi_1, \varpi_2)$ 依赖于 ϖ_1 和 ϖ_2 . 由于 $\varpi_{1,opt}$ 已在前一步确定,那么最优松弛因子 $\varpi_{2,opt}$ 满足下述方程:

$$d\mathcal{R}_{es,2}/d\varpi_2 = 0. \quad (44)$$

类似的,对第 n 阶近似解,对应残差 $\mathcal{R}_{es,n}$ 实际上只依赖于 ϖ_n , 于是 $\varpi_{n,opt}$ 的确定是使 $\mathcal{R}_{es,n}$ 取得

最小值,即

$$d\mathcal{R}_{es,n}/d\varpi_n = 0. \quad (45)$$

可以看到,所有松弛因子 $\{\varpi_n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 都将较容易地按照这种方式相继确定.

3 计算结果的讨论

$\alpha = 0$ 时方程的解(见式(9))只是一个平凡的中性稳定解.根据 Tollmien 关于中性稳定性定理^[6,13],混合层(5)的不稳定模态对应于扰动波数 $0 < \alpha < 1$.另一个中性稳定的解最早由 Garcia^[24]给出:

$$\alpha_N = 1, c_N = 1/2, \phi_N = \operatorname{sech} y. \quad (46)$$

3.1 $\alpha = 0.1$

下面以 $\alpha = 0.1$ 为例采用 FPM 求解对应特征函数和特征值.该求解过程对于其他不稳定扰动波 ($0 < \alpha < 1$) 是类似的.

首先,初始值 (r_0, s_0) 选用 2.3 节给出的式(30).根据迭代关系式(35),1 阶解 (r_1, s_1) 所满足的方程为

$$\begin{aligned} (1-z^2)r_1'' - 2zr_1' &= \frac{\varpi_1}{600} (53 + 200c_{i,1} + 66c_{i,1}^2 - 328c_{r,1} + 66c_{r,1}^2) P_0(z) - \\ &\left[2 - \varpi_1 \left(\frac{179}{1\,000} - c_{i,1} + \frac{231c_{i,1}^2}{100} - \frac{71c_{r,1}}{50} + \frac{231c_{r,1}^2}{100} \right) \right] P_1(z) + \\ &\frac{\varpi_1}{600} P_2(z) (73 + 400c_{i,1} - 524c_{r,1}) + \frac{31\varpi_1}{1\,000} P_3(z), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} (1-z^2)s_1'' - 2zs_1' &= -\frac{\varpi_1}{600} (-209 + 200c_{i,1} + 66c_{i,1}^2 + 196c_{r,1} + 66c_{r,1}^2) P_0(z) - \\ &\left[2 - \varpi_1 \left(\frac{1\,069}{1\,000} - c_{i,1} + \frac{231c_{i,1}^2}{100} - \frac{16c_{r,1}}{5} + \frac{231c_{r,1}^2}{100} \right) \right] P_1(z) - \\ &\frac{\varpi_1}{600} P_2(z) (-451 + 400c_{i,1} + 524c_{r,1}) + \frac{31\varpi_1}{1\,000} P_3(z), \end{aligned} \quad (48)$$

上述方程(47)和方程(48)的右侧项已用 Legendre 多项式的线性组合表达.对应的可解性条件为

$$\begin{cases} 53 + 200c_{i,1} + 66c_{i,1}^2 - 328c_{r,1} + 66c_{r,1}^2 = 0, \\ -209 + 200c_{i,1} + 66c_{i,1}^2 + 196c_{r,1} + 66c_{r,1}^2 = 0. \end{cases} \quad (49)$$

求解方程组(49),得特征值的 1 阶近似值

$$\begin{cases} c_{r,1} = 1/2, \\ c_{i,1} = (-100 \pm \sqrt{16\,237})/66. \end{cases} \quad (50)$$

由于我们只考虑流动的不稳定模态, $c_{i,1}$ 的负值被舍去.将特征值的解代入方程(47)和方程(48)中,并结合边界条件和辅助条件,可求得 1 阶解 (r_1, s_1) 为

$$\begin{aligned} r_1(z) &= \left(1 + \varpi_1 \left(\frac{26\,237}{237\,600} - \frac{\sqrt{16\,237}}{1\,188} \right) \right) P_0(z) + \\ &\left[1 - \varpi_1 \left(\frac{255\,341}{33\,000} - \frac{2\sqrt{16\,237}}{33} \right) \right] P_1(z) + \\ &\left(\frac{26\,237}{118\,800} - \frac{\sqrt{16\,237}}{594} \right) \varpi_1 P_2(z) - \frac{31\varpi_1}{12\,000} P_3(z), \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned}
s_1(z) = & - \left(1 + \varpi_1 \left(\frac{26\ 237}{237\ 600} - \frac{\sqrt{16\ 237}}{1\ 188} \right) \right) P_0(z) + \\
& \left[1 - \varpi_1 \left(\frac{255\ 341}{33\ 000} - \frac{2\sqrt{16\ 237}}{33} \right) \right] P_1(z) - \\
& \left(\frac{26\ 237}{118\ 800} - \frac{\sqrt{16\ 237}}{594} \right) \varpi_1 P_2(z) - \frac{31\varpi_1}{12\ 000} P_3(z). \quad (52)
\end{aligned}$$

1 阶解 (r_1, s_1) 所对应的残差 $\mathcal{R}_{es,1}$ 为

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{es,1} = & \int_{-1}^1 ((\mathcal{R}[r_1, s_1; c_{r,1}, c_{i,1}])^2 + (\mathcal{S}[r_1, s_1; c_{r,1}, c_{i,1}])^2) dz = \\
& 0.002\ 889\ 049 - 0.001\ 587\ 177 \varpi_1 + 0.000\ 260\ 015\ 8 \varpi_1^2. \quad (53)
\end{aligned}$$

可见残差 $\mathcal{R}_{es,1}$ 是关于松弛因子 ϖ_1 的函数, 选取最优松弛因子 $\varpi_{1,opt}$ 使残差最小化为

$$\varpi_{1,opt} = 3.052\ 077, \quad \min(\mathcal{R}_{es,1}) = 4.669\ 570 \times 10^{-4}. \quad (54)$$

最终 1 阶解 (r_1, s_1) 的形式为

$$\begin{aligned}
r_1(z) = & 1.009\ 661 P_0(z) + 0.954\ 494\ 0 P_1(z) + \\
& 0.019\ 322\ 17 P_2(z) - 7.884\ 532 \times 10^{-3} P_3(z), \quad (55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_1(z) = & -1.009\ 661 P_0(z) + 0.954\ 494\ 0 P_1(z) - \\
& 0.019\ 322\ 17 P_2(z) - 7.884\ 532 \times 10^{-3} P_3(z). \quad (56)
\end{aligned}$$

对于高阶解 (r_n, s_n) , 可仿照上述 1 阶解的求解过程, 并且该求解过程可以采用符号计算软件, 如 MAXIMA, MAPLE 或 MATHEMATICA 自动进行求解. 这里给出到第 3 阶.

$$c_{r,2} = 0.5, \quad c_{i,2} = 0.424\ 557\ 8, \quad (57)$$

$$\varpi_{2,opt} = 3.865\ 020, \quad \min(\mathcal{R}_{es,2}) = 2.127\ 785 \times 10^{-4}, \quad (58)$$

$$\begin{aligned}
r_2(z) = & 1.014\ 763 P_0(z) + 0.945\ 430\ 3 P_1(z) + 0.028\ 720\ 98 P_2(z) - \\
& 6.383\ 943 \times 10^{-3} P_3(z) - 1.073\ 814 \times 10^{-3} P_4(z) + \\
& 8.634\ 264 \times 10^{-4} P_5(z), \quad (59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_2(z) = & -1.014\ 763 P_0(z) + 0.945\ 430\ 3 P_1(z) - 0.028\ 720\ 98 P_2(z) - \\
& 6.383\ 943 \times 10^{-3} P_3(z) + 1.073\ 814 \times 10^{-3} P_4(z) + \\
& 8.634\ 264 \times 10^{-4} P_5(z), \quad (60)
\end{aligned}$$

$$c_{r,3} = 0.5, \quad c_{i,3} = 0.424\ 965\ 5, \quad (61)$$

$$\varpi_{3,opt} = 3.111\ 932, \quad \min(\mathcal{R}_{es,3}) = 4.064\ 581 \times 10^{-6}, \quad (62)$$

$$\begin{aligned}
r_3(z) = & 1.015\ 647 P_0(z) + 0.948\ 109\ 1 P_1(z) + 0.030\ 076\ 6 P_2(z) - \\
& 6.412\ 183 \times 10^{-3} P_3(z) - 1.540\ 760 \times 10^{-3} P_4(z) + \\
& 5.581\ 702 \times 10^{-4} P_5(z) + 9.915\ 053 \times 10^{-5} P_6(z) - \\
& 1.025\ 564 \times 10^{-4} P_7(z), \quad (63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_3(z) = & -1.015\ 647 P_0(z) + 0.948\ 109\ 1 P_1(z) - 0.030\ 076\ 6 P_2(z) - \\
& 6.412\ 183 \times 10^{-3} P_3(z) + 1.540\ 760 \times 10^{-3} P_4(z) + \\
& 5.581\ 702 \times 10^{-4} P_5(z) - 9.915\ 053 \times 10^{-5} P_6(z) - \\
& 1.025\ 564 \times 10^{-4} P_7(z). \quad (64)
\end{aligned}$$

从前 3 阶解的形式可以看出, 各阶解 (r_n, s_n) 确实都可被显式表达成 Legendre 级数的形式 (见式 (29)). 另外注意到式 (29) 中的展开系数 $a_{n,k}$ 和 $b_{n,k}$ 随着 n 的增加在不断更新, 同时更高阶

Legendre 多项式被引入进来,从而解的精度随着迭代的进行而不断提升.这一点可从图 1 给出的 $c_{i,n}$ 关于迭代次数 n 的收敛曲线清楚看出.图 2 中的 $\mathcal{R}_{es,n}$ 收敛曲线也较好地说明这一点.

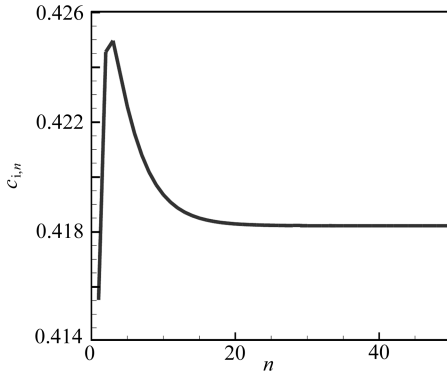


图 1 $c_{i,n}$ 的收敛曲线 ($\alpha = 0.1$)

Fig. 1 Convergence of $c_{i,n}$ ($\alpha = 0.1$)

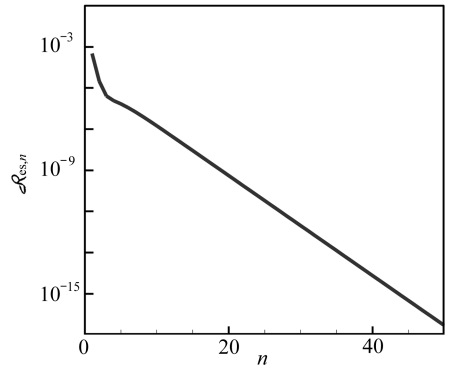


图 2 $\mathcal{R}_{es,n}$ 的收敛曲线 ($\alpha = 0.1$)

Fig. 2 Convergence of $\mathcal{R}_{es,n}$ ($\alpha = 0.1$)

3.2 $\alpha = 0.2$

关于 $\alpha = 0.2$ 的求解过程和 $\alpha = 0.1$ 时类似.但此时关于初值的形式多了一种选择.除了可以采用 $\alpha = 0$ 时的解作为初始值以外,还可以采用前文求出的 $\alpha = 0.1$ 时的解作为初始值.这两种不同的初始值选择方式对迭代收敛的影响可以从图 3 看出,正如所预期的以 $\alpha = 0.1$ 时的解作为初始值迭代收敛速度更快些.

3.3 其他 α 值

采用 FPM 方法,位于区间 $0 < \alpha < 1$ 内的其他不稳定扰动波的解可类似地求得.不同波数 α 下的 c_r 和 c_i 汇总在表 1 中,其中特征值 c_i 给出具有 7 位有效数字的近似值.其他学者^[6,12,25] 给出的结果也一并列入表 1 中作对比.

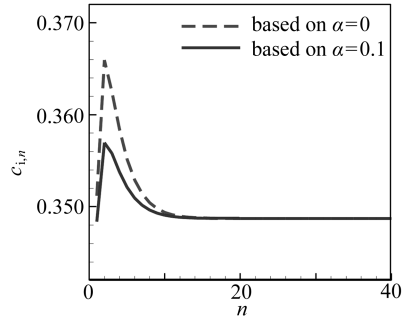


图 3 不同初始值对 $c_{i,n}$ 收敛的影响 ($\alpha = 0.2$)

Fig. 3 Effect of different initial values on the convergence of $c_{i,n}$ ($\alpha = 0.2$)

表 1 不同波数 α 所对应的特征值 c_r 和 c_i

Table 1 Eigenvalues c_r and c_i as a function of various wave numbers α

α	c_r	c_i			
		present	Michalke ^[12]	Criminale ^[6]	Boguslawski ^[25]
0.1	0.5	0.418 221 4	0.418 4	0.418 227	0.418 2
0.2	0.5	0.348 727 9	0.348 7	0.348 728	0.348 7
0.3	0.5	0.288 447 4	0.288 5	0.288 447	0.288 4
0.4	0.5	0.235 225 4	0.235 2	0.235 225	0.235 2
0.5	0.5	0.187 511 0	0.187 5	0.187 511	0.187 5
0.6	0.5	0.144 162 1	0.144 2	0.144 162	0.144 2
0.7	0.5	0.104 321 6	0.104 4	0.104 321	0.104 3
0.8	0.5	0.067 334 48	0.067 4	0.067 334	0.067 3
0.9	0.5	0.032 693 46	0.032 7	0.032 693	0.032 9

当函数 $r(z)$ 和 $s(z)$ 求得,对应的特征函数的实部 $\phi_r(y)$ 和虚部 $\phi_i(y)$ 容易得到

$$\begin{cases} \phi_r(y) = \phi_r(z) \Big|_{z=\tanh y} = (1-z^2)^{\alpha/2} \cdot [r(z) - s(z)]/2 \Big|_{z=\tanh y}, \\ \phi_i(y) = \phi_i(z) \Big|_{z=\tanh y} = (1-z^2)^{\alpha/2} \cdot [r(z) + s(z)]/2 \Big|_{z=\tanh y}. \end{cases} \quad (65)$$

图 4 和图 5 分别给出不同波数 α 所对应 $\phi_r(y)$ 和 $\phi_i(y)$. 从图中可以看出,实部 $\phi_r(y)$ 是对称的,而虚部 $\phi_i(y)$ 是反对称的. 特征函数的幅值 $|\phi| = \sqrt{\phi_r^2 + \phi_i^2}$ 在图 6 中给出,可以看出在原点 $y = 0$ 附近 $|\phi|$ 呈现双峰结构,变化较剧烈.

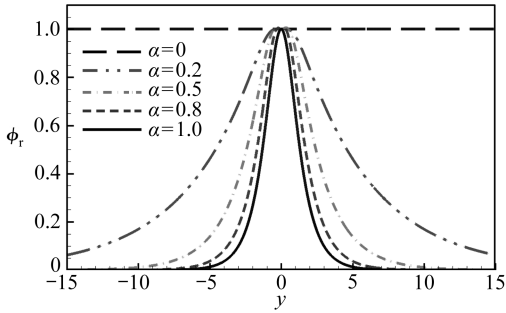


图 4 不同波数 α 下的 $\phi_r(y)$

Fig. 4 Eigenfunctions $\phi_r(y)$ for various wave numbers α

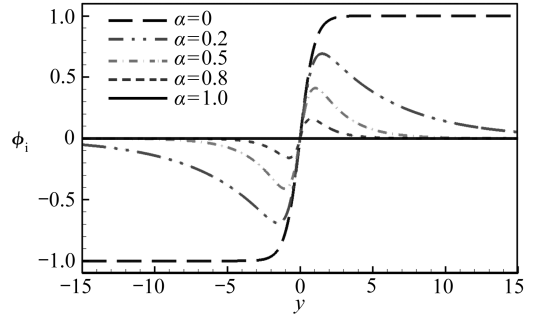


图 5 不同波数 α 下的 $\phi_i(y)$

Fig. 5 Eigenfunctions $\phi_i(y)$ for various wave numbers α

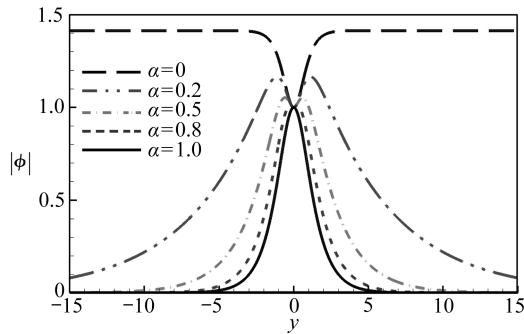


图 6 不同波数 α 下的 $|\phi|$

Fig. 6 Eigenfunction magnitudes $|\phi|$ for various wave numbers α

4 结 论

1) 本文采用不动点方法(FPM)对混合层无粘时间模态的稳定性进行了分析,得到了不同扰动波数下特征函数采用 Legendre 级数表达的显式形式,该解在整个流动区域内一致有效.

2) 本文指出 FPM 在使用时所需遵守的完备性原则可以用来得到方程的可解性条件,而特征值可根据可解性条件来唯一确定.

3) 本文指出 FPM 具有继承性,即低阶近似解所包含的有效信息在求解高阶近似时可被充分利用.

4) 通过计算结果比较,表明 FPM 是一种获得微分方程近似解析解的有效方法.

本文只进行了无粘稳定性方程的时间模态分析,后续将进一步采用 FPM 讨论空间模态以及引入粘性作用的稳定性方程.

参考文献(References):

- [1] 罗纪生, 吕祥翠. 超音速混合层稳定性分析及增强混合的研究[J]. 力学学报, 2004, **36**(2): 202-207. (LUO Ji-sheng, LÜ Xiang-cui. Investigation on stability of 3-D supersonic mixing layer and method of enhancing the mixing[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, **36**(2): 202-207. (in Chinese))
- [2] 倪慧, 罗纪生, 何立忠. 三维可压缩混合层中扰动演化的研究[J]. 空气动力学学报, 2004, **22**(4): 416-421. (NI Hui, LUO Ji-sheng, HE Li-zhong. An investigation for the evolvement of disturbances in 3-D compressible mixing layer[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2004, **22**(4): 416-421. (in Chinese))
- [3] 潘宏禄, 马汉东, 王强. 高对流 Mach 数三维混合层转捩特性分析及小激波结构模拟[J]. 空气动力学学报, 2008, **26**(3): 275-281. (PAN Hong-lu, MA Han-dong, WANG Qiang. Transition coherent structures and shocklets in 3-D spatial developing mixing layers at high convective Mach numbers[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2008, **26**(3): 275-281. (in Chinese))
- [4] 杨武兵, 庄逢甘, 沈清, 易仕和, 何霖, 赵玉新. 超声速混合层中扰动增强混合实验[J]. 力学学报, 2010, **42**(3): 373-382. (YANG Wu-bing, ZHUANG Feng-gan, SHEN Qing, YI Shi-he, HE Lin, ZHAO Yu-xin. Experimental study on perturbation mixing enhancement in supersonic mixing layers[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2010, **42**(3): 373-382. (in Chinese))
- [5] 周强, 何枫, 沈孟育. 可压缩混合层中的涡结构和激波[J]. 空气动力学学报, 2010, **28**(3): 245-249. (ZHOU Qiang, HE Feng, SHEN Meng-yu. Vortex structures and shocks in the compressible mixing layer[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2010, **28**(3): 245-249. (in Chinese))
- [6] Criminale W, Jackson T, Joslin R. *Theory and Computation of Hydrodynamic Stability* [M]. United Kingdom: Cambridge University Press, 2003.
- [7] Michalke A. The instability of free shear layers[J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 1972, **12**(1): 213-216.
- [8] Ho C M, Huerre P. Perturbed free shear layers[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1984, **16**(1): 365-422.
- [9] Betchov R, Szewczyk A. Stability of a shear layer between parallel streams[J]. *Physics of Fluids*, 1963, **6**(10): 1391-1396.
- [10] Drazin P G, Howard L N. Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid[J]. *Advances in Applied Mechanics*, 1966, **9**(1): 1-89.
- [11] Drazin P G, Howard L N. The instability to long waves of unbounded parallel inviscid flow [J]. *J Fluid Mech*, 1962, **14**(2): 257-283.
- [12] Michalke A. On the inviscid instability of the hyperbolic tangent velocity profile[J]. *J Fluid Mech*, 1964, **19**(4): 543-556.
- [13] Drazin P G, Reid W H. *Hydrodynamic Stability* [M]. United Kingdom: Cambridge University Press, 2004.
- [14] Heisenberg W. Über stabilität und turbulenz von flüssigkeitsströmen[J]. *Ann Phys*, 1924, **74**(4): 577-627.
- [15] Tollmien W. *The Production of Turbulence* [M]. Washington: NACA-TM-609, 1931.
- [16] Tatsumi T, Gotoh K, Ayukawa K. The stability of a free boundary layer at large Reynolds numbers[J]. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1964, **19**(10): 1966.
- [17] Peyret R. *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow* [M]. New York: Springer, 2002.
- [18] Hussaini M Y, Zang T A. Spectral methods in fluid dynamics[J]. *Annual Review of Fluid Me-*

- chanics, 1987, **19**(1): 339-367.
- [19] Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A, Zang T A. *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*[M]. Berlin: Springer, 2006.
- [20] Xu D, Guo X. Fixed point analytical method for nonlinear differential equations[J]. *J Comput Nonlinear Dyn*, 2013, **8**(1): 011005.
- [21] Zeidler E. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications— I: Fixed-Point Theorems* [M]. New York: Springer, 1986.
- [22] Orszag S A. Accurate solution of the orr-sommerfeld stability equation[J]. *J Fluid Mech*, 1971, **50**(4): 689-703.
- [23] Burden R L, Faires J D. *Numerical Analysis*[M]. Boston: Brooks Cole, 2010.
- [24] Garcia R V. Barotropic waves in straight parallel flow with curved velocity profile[J]. *Tellus*, 1956, **8**(1): 82-93.
- [25] Boguslawski A. Inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile-spectral “tau” solution[J]. *Task Quarterly*, 2001, **5**(2): 155-164.

Legendre Series Solution to Rayleigh Stability Equation of Mixing Layer

GUO Xin¹, WANG Xian², XU Ding², XIE Gong-nan³

- (1. Xi'an Research Institute of China Coal Technology & Engineering Group Corp,
Xi'an 710054, P. R. China;
2. State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures,
School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P. R. China;
3. Engineering Simulation and Aerospace Computing (ESAC),
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P. R. China)

Abstract: Based on the fixed point concept in functional analysis, the fixed point method (FPM) was used to analyze the inviscid stability equation of the mixing layer, and an explicit semi-analytical solution in Legendre series form was obtained. It is different from other existing analytical methods, such as the well-known perturbation technique, because FPM can obtain a uniformly convergent solution in the full infinite flow domain. Meanwhile, the present Legendre series solution is valid to all wave numbers. What's more, in the framework of FPM, the eigenvalue can be determined by the solvability condition in a straightforward manner. Finally, the comparison between FPM and other numerical methods shows that FPM is of high accuracy and efficiency.

Key words: fixed point method; solvability condition; Legendre series solution; Rayleigh stability equation; mixing layer