

基于拟线性化方法的非线性系统 闭环反馈控制保辛算法*

江 新, 彭海军, 张 盛

(大连理工大学 工程力学系,工业装备结构分析国家重点实验室,辽宁 大连 116024)

(本刊编委陈飙松推荐)

摘要: 提出了一种求解非线性系统闭环反馈控制问题的保辛算法.首先,通过拟线性化方法将非线性系统最优控制问题转化为线性非齐次 Hamilton 系统两端边值问题的迭代格式求解.然后,通过作用量变分原理与生成函数构造了保辛的数值算法,且该算法保持了原 Hamilton 系统的辛几何性质.最后,通过时间步的递进完成状态与控制变量的更新,进而达到闭环控制的目的.数值算例表明:保辛算法具有较高的计算精度和较快的收敛速度.此外,将闭环反馈控制与开环控制分别应用于驱动小车上的倒立摆控制系统中.结果表明:在存在初始偏差的情况下,开环控制会导致稳定控制任务的失败,而闭环反馈控制能够在一段时间后消除初始偏差的影响,并使系统达到稳定状态.

关键词: 非线性系统; 拟线性化; 滚动时域控制; 变分原理; 保辛

中图分类号: O231.2;O302 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.08.003

引 言

非线性系统的闭环反馈控制在实际工程应用中有着重要作用,例如,可应用于混沌 Genesio 系统的控制与同步^[1],永磁式步进电机的控制^[2],绳系卫星系统的释放与回收控制^[3]等等.与开环控制相比,闭环控制采用当前时刻的真实状态求解当前时刻的控制输入,可以有效地减小外部干扰对控制效果的影响.通过闭环反馈控制,可以使非线性系统更有效地达到稳定状态^[4].对于某些具有内在不稳定性的强非线性系统,例如绳系卫星系统的释放与回收控制问题,闭环反馈控制相比开环控制有着不可替代的优势^[5].

滚动时域控制(receding horizon control, RHC)作为一种有效的模型预测控制方法,能够起到闭环反馈控制的效果,且滚动时域控制能够为线性与非线性系统的反馈控制提供一种相对简单的方法.将其应用于线性时不变系统、线性时变系统以及非线性系统时,最终都能得到一个稳定的闭环系统^[6].文献[7]基于对偶变量变分原理与生成函数提出了一种求解线性系

* 收稿日期: 2013-05-16; 修订日期: 2013-06-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11102031);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(DUT13LK25);国家基础性发展规划资助项目(2010CB832704)

作者简介: 江新(1988—),男,江苏海门人,硕士生(E-mail: jiang@mail.dlut.edu.cn);
张盛(1976—),男,吉林长春人,讲师(通讯作者. E-mail: zhangs@dlut.edu.cn).

统滚动时域控制问题的保辛解法,此方法满足最优控制解的最优性一阶必要条件.这种保辛算法最终将线性滚动时域控制问题转化为一组稀疏对称非负定的线性方程组进行求解,避免了对 Riccati 微分方程的大量数值积分运算,从而提高了线性系统滚动时域控制问题的数值求解效率.

从数学结构上讲,非线性最优控制系统可以采用 Hamilton 正则方程描述,而 Hamilton 系统的相流应当保持其本身固有的辛几何结构^[8-9].文献[7]的方法在求解过程中保持了原有系统的辛几何结构,因此是一种保辛算法.本文在文献[7]的基础上,将此保辛方法从线性系统的闭环反馈控制推广到非线性系统的闭环反馈控制.目前,相对简单且直接的一种求解非线性系统闭环反馈控制问题的方法是在每一个时间递进步内,进行在线求解非线性最优控制问题并更新状态和控制输入,而大量在线直接求解非线性最优控制问题又导致较大的计算量和计算时间,不适应实时计算的要求.本文借助于拟线性方法,可将非线性最优控制系统转化为线性非齐次 Hamilton 系统两端边值问题的迭代求解^[10];而在每一个迭代步内,根据对偶变量变分原理与生成函数,将其转化为系数非负定线性方程组的求解.因而,本文推导的保辛算法能高效地求解非线性系统闭环反馈控制问题.在数值仿真中,通过计算一个非线性吊重系统,验证了本文算法的收敛精度与速度,并突出了算法在初值选取、收敛性等方面的优势.另外,数值算例中还以一个强非线性的倒立摆系统为例比较了开环控制与闭环反馈控制的实际控制效果,突出了闭环反馈控制在达到系统稳定状态方面的优势.

1 基于拟线性方法的非线性系统滚动时域控制问题

非线性系统滚动时域控制的受控常微分方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau) = f(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)), \quad \mathbf{x}(\tau = t) = \mathbf{x}(t), \quad (1)$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2} [\mathbf{M}_f \mathbf{x}(t+T) - \boldsymbol{\psi}]^T \mathbf{S}_f [\mathbf{M}_f \mathbf{x}(t+T) - \boldsymbol{\psi}] + \frac{1}{2} \int_t^{t+T} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)^T \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_d)^T \mathbf{R}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_d)] d\tau, \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d \times 1}$ 为状态变量, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ 为协态变量, $\mathbf{x}_d \in \mathbb{R}^{d \times 1}$ 为目标状态向量, $\mathbf{u}_d \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ 为目标控制输入, t 为时间, $\tau \in [t, t+T]$ 为预测未来系统状态的时间变量, $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ 为线性混合终端状态 $\mathbf{M}_f \mathbf{x}(t+T)$ 的目标值, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ 为半正定矩阵, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 为正定矩阵, \mathbf{S}_f 为半正定终端权矩阵, \mathbf{M}_f 为给定的矩阵. 滚动时域控制问题的目标为寻找合适的控制输入 $\mathbf{u}(t)$ 使得性能指标 J 的值极小.

采用拟线性化方法求解式(1)和(2),在 $k+1$ 次迭代时将方程(1)和(2)在第 k 次迭代处进行 Taylor 级数展开,得

$$\dot{\mathbf{x}}^{(k+1)}(\tau) = \mathbf{A}^{(k)}(\tau) \mathbf{x}^{(k+1)}(\tau) + \mathbf{B}^{(k)}(\tau) \mathbf{u}^{(k+1)}(\tau) + \mathbf{w}^{(k)}(\tau), \quad \mathbf{x}^{(k+1)}(\tau = t) = \mathbf{x}(t), \quad (3)$$

$$J^{(k+1)} = \frac{1}{2} [\mathbf{M}_f \mathbf{x}^{(k+1)}(t+T) - \boldsymbol{\psi}]^T \mathbf{S}_f [\mathbf{M}_f \mathbf{x}^{(k+1)}(t+T) - \boldsymbol{\psi}] + \frac{1}{2} \int_t^{t+T} [(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}_d)^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}_d) + (\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}_d)^T \mathbf{R}(\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}_d)] d\tau, \quad (4)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{A}^{(k)}(\tau) = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^{(k)}(\tau), \mathbf{u}^{(k)}(\tau)}, \\ \mathbf{B}^{(k)}(\tau) = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}^{(k)}(\tau), \mathbf{u}^{(k)}(\tau)}, \\ \mathbf{w}^{(k)}(\tau) = f(\mathbf{x}^{(k)}(\tau), \mathbf{u}^{(k)}(\tau)) - \mathbf{A}^{(k)}(\tau)\mathbf{x}^{(k)}(\tau) - \mathbf{B}^{(k)}(\tau)\mathbf{u}^{(k)}(\tau). \end{cases} \quad (5)$$

在 $k + 1$ 次迭代时的 Hamilton 函数为

$$H^{(k+1)} = \frac{1}{2} [(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}_d)^T \mathbf{Q} (\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}_d) + (\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}_d)^T \mathbf{R} (\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}_d)] + (\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)})^T (\mathbf{A}^{(k)}(\tau)\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{B}^{(k)}(\tau)\mathbf{u}^{(k+1)} + \mathbf{w}^{(k)}(\tau)). \quad (6)$$

根据最优性一阶必要条件得

$$\frac{\partial H^{(k+1)}}{\partial \mathbf{u}^{(k+1)}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}_d - \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{B}^{(k)}(\tau))^T \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)}. \quad (7)$$

将方程(7)代入方程(6)得 Hamilton 函数:

$$H^{(k+1)} = \frac{1}{2} (\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}_d)^T \mathbf{Q} (\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}_d) - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)})^T \mathbf{B}^{(k)}(\tau) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{B}^{(k)}(\tau))^T \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} + (\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)})^T \mathbf{A}^{(k)}(\tau)\mathbf{x}^{(k+1)} + (\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)})^T \mathbf{B}^{(k)}(\tau)\mathbf{u}_d + (\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)})^T \mathbf{w}^{(k)}(\tau). \quad (8)$$

Hamilton 正则方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^{(k+1)} = \frac{\partial H^{(k+1)}}{\partial \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)}} = \mathbf{A}^{(k)}(\tau)\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{B}^{(k)}(\tau) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{B}^{(k)}(\tau))^T \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} + \mathbf{B}^{(k)}(\tau)\mathbf{u}_d + \mathbf{w}^{(k)}(\tau), \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}^{(k+1)} = - \frac{\partial H^{(k+1)}}{\partial \mathbf{x}^{(k+1)}} = - \mathbf{Q}\mathbf{x}^{(k+1)} - (\mathbf{A}^{(k)}(\tau))^T \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} + \mathbf{Q}\mathbf{x}_d. \end{cases} \quad (9)$$

边界条件为

$$\mathbf{x}^{(k+1)}(\tau = t) = \mathbf{x}(t), \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)}(\tau = t + T) = \mathbf{M}_f^T \mathbf{S}_f [\mathbf{M}_f \mathbf{x}^{(k+1)}(t + T) - \boldsymbol{\psi}]. \quad (11)$$

在第 $k + 1$ 次迭代中,原非线性最优控制问题转化为由式(9)、(10)、(11)所组成的线性非齐次 Hamilton 两端边值问题,只要在这一个迭代步中求出更新的状态变量 \mathbf{x} 及控制变量 \mathbf{u} 的值,就可以进入下一步迭代,经过多次迭代,最终可求得满足精度要求的解。

因此,本文以下几节中将推导一种高效的保辛算法来解决上述一个迭代步中由式(9)、(10)、(11)组成的非线性 Hamilton 两端边值问题。

2 保辛算法的构造

首先在时间区间 $[t, t + T]$ 中,可定义生成函数 V 为^[7]

$$V = \boldsymbol{\lambda}_t^T \mathbf{x}_t - \boldsymbol{\lambda}_{t+T}^T \mathbf{x}_{t+T} + \bar{S}, \quad (12)$$

其中, \mathbf{x}_t 与 $\boldsymbol{\lambda}_t$ 为初始时刻的状态变量与协态变量,而 \mathbf{x}_{t+T} 与 $\boldsymbol{\lambda}_{t+T}$ 为终端时刻的状态与协态变量. 变量 \bar{S} 为作用量并定义为

$$\bar{S} = \int_t^{t+T} (\boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}} - H) d\tau, \quad (13)$$

其中, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{d \times 1}$ 为协态变量, H 为式(8)代表的 Hamilton 函数。

由方程(12)可得

$$dV = \mathbf{x}_t^T d\boldsymbol{\lambda}_t - \mathbf{x}_{t+T}^T d\boldsymbol{\lambda}_{t+T}. \quad (14)$$

方程(14)表示,如果在某段时间内 Hamilton 正则方程成立,并且将时间段两端的协态变量 $\boldsymbol{\lambda}_t$ 与 $\boldsymbol{\lambda}_{t+T}$ 看做独立变量,那么生成函数 V 必定是 $\boldsymbol{\lambda}_t$ 与 $\boldsymbol{\lambda}_{t+T}$ 的函数.

将时间区间 $[t, t+T]$ 等分为 N 个子区间,每一个子区间的时间步长为 $\eta = T/N$, 即 $t_0 = t$, $t_1 = t + \eta, \dots, t_N = t + N\eta$. 在第 j 个子区间中,用插入了 m 个等间距点的 $m-1$ 阶 Lagrange 多项式来近似状态变量 $\mathbf{x}(\tau)$, 而用插入了 n 个等间距点的 $n-1$ 阶 Lagrange 多项式来近似协态变量 $\boldsymbol{\lambda}(\tau)$, 即

$$\mathbf{x}(\tau) = (\mathbf{M} \otimes \mathbf{I}) \bar{\mathbf{x}}_j, \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\tau) = N_1 \boldsymbol{\lambda}_{j-1} + (\underline{N} \otimes \mathbf{I}) \bar{\boldsymbol{\lambda}}_j + N_n \boldsymbol{\lambda}_j. \quad (16)$$

式(15)、(16)中,符号 \otimes 代表 Kronecker 积, \mathbf{I} 代表 $d \times d$ 阶单位矩阵, 向量 $\boldsymbol{\lambda}_{j-1}$ 与 $\boldsymbol{\lambda}_j$ 分别代表第 j 个子区间左端与右端的协态变量, 向量 $\bar{\mathbf{x}}_j$ 被定义为 $\bar{\mathbf{x}}_j = \{(\bar{\mathbf{x}}_j^1)^T, (\bar{\mathbf{x}}_j^2)^T, \dots, (\bar{\mathbf{x}}_j^m)^T\}^T$, 向量 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_j$ 被定义为 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_j = \{(\bar{\boldsymbol{\lambda}}_j^2)^T, (\bar{\boldsymbol{\lambda}}_j^3)^T, \dots, (\bar{\boldsymbol{\lambda}}_j^{n-1})^T\}^T$, 式(15)、(16)中的其它符号定义如下:

$$\mathbf{M} = [M_1, M_2, \dots, M_m], \quad (17)$$

$$\underline{N} = [N_2, N_3, \dots, N_{n-1}], \quad (18)$$

$$M_i = \prod_{j=1, j \neq i}^m \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}, \quad (19)$$

$$N_i = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}. \quad (20)$$

在第 j 个子区间中,将方程(15)、(16)代入方程(12),则有下式成立:

$$V_j(\boldsymbol{\lambda}_{j-1}, \boldsymbol{\lambda}_j, \bar{\mathbf{x}}_j, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_j) = \boldsymbol{\lambda}_{j-1}^T \bar{\mathbf{x}}_j^1 - \boldsymbol{\lambda}_j^T \bar{\mathbf{x}}_j^m + \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}} - H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})) d\tau. \quad (21)$$

将式(8)代表的 Hamilton 函数 $H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ 代入式(21),并定义如下公式:

$$\mathbf{F}_1^j = \frac{\partial V_j}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{j-1}} = \mathbf{K}_{11}^j \boldsymbol{\lambda}_{j-1} + (\mathbf{E}_u^T + \mathbf{K}_{12}^j) \bar{\mathbf{x}}_j + \mathbf{K}_{13}^j \bar{\boldsymbol{\lambda}}_j + \mathbf{K}_{14}^j \boldsymbol{\lambda}_j + \mathbf{f}_1^j, \quad (22)$$

$$\mathbf{F}_2^j = \frac{\partial V_j}{\partial \bar{\mathbf{x}}_j} = (\mathbf{K}_{21}^j + \mathbf{E}_u) \boldsymbol{\lambda}_{j-1} - \mathbf{K}_{22}^j \bar{\mathbf{x}}_j + \mathbf{K}_{23}^j \bar{\boldsymbol{\lambda}}_j + (\mathbf{K}_{24}^j - \mathbf{E}_d) \boldsymbol{\lambda}_j + \mathbf{f}_2^j, \quad (23)$$

$$\mathbf{F}_3^j = \frac{\partial V_j}{\partial \bar{\boldsymbol{\lambda}}_j} = \mathbf{K}_{31}^j \boldsymbol{\lambda}_{j-1} + \mathbf{K}_{32}^j \bar{\mathbf{x}}_j + \mathbf{K}_{33}^j \bar{\boldsymbol{\lambda}}_j + \mathbf{K}_{34}^j \boldsymbol{\lambda}_j + \mathbf{f}_3^j, \quad (24)$$

$$\mathbf{F}_4^j = \frac{\partial V_j}{\partial \boldsymbol{\lambda}_j} = \mathbf{K}_{41}^j \boldsymbol{\lambda}_{j-1} + (\mathbf{K}_{42}^j - \mathbf{E}_d^T) \bar{\mathbf{x}}_j + \mathbf{K}_{43}^j \bar{\boldsymbol{\lambda}}_j + \mathbf{K}_{44}^j \boldsymbol{\lambda}_j + \mathbf{f}_4^j, \quad (25)$$

其中, \mathbf{E}_u 和 \mathbf{E}_d 均为 $md \times d$ 的矩阵,定义如下:

$$\mathbf{E}_u = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}]^T, \quad (26)$$

$$\mathbf{E}_d = [\mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{I}]^T. \quad (27)$$

$\mathbf{K}_{s,t}^j (s, t = 1, 2, 3, 4)$ 与 $\mathbf{f}_s^j (s = 1, 2, 3, 4)$ 的具体定义如下:

$$\mathbf{K}_{11}^j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} N_1 N_1 [\mathbf{B}(\tau) \mathbf{R}^{-1}(\tau) \mathbf{B}^T(\tau)] d\tau, \quad (28)$$

$$\mathbf{K}_{12}^j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} N_1 [(\dot{\mathbf{M}} \otimes \mathbf{I}) - (\mathbf{M} \otimes \mathbf{A}(\tau))] d\tau = (\mathbf{K}_{21}^j)^T, \quad (29)$$

$$\mathbf{K}_{13}^j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} N_1 [\underline{N} \otimes \mathbf{B}(\tau) \mathbf{R}^{-1}(\tau) \mathbf{B}^T(\tau)] d\tau = (\mathbf{K}_{31}^j)^T, \quad (30)$$

$$\mathbf{K}_{14}^j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} N_1 N_n [\mathbf{B}(\tau) \mathbf{R}^{-1}(\tau) \mathbf{B}^T(\tau)] d\tau = (\mathbf{K}_{41}^j)^T, \quad (31)$$

$$\mathbf{f}_1^j = - \int_{t_{j-1}}^{t_j} N_1 \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}_d d\tau - \int_{t_{j-1}}^{t_j} N_1 \mathbf{w}(\tau) d\tau, \quad (32)$$

$$\mathbf{K}_{22}^j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} [\mathbf{M}^T \mathbf{M} \otimes \mathbf{Q}(\tau)] d\tau, \quad (33)$$

$$\mathbf{K}_{23}^j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} [(\underline{\mathbf{N}} \dot{\mathbf{M}}^T \otimes \mathbf{I}) - (\underline{\mathbf{N}} \mathbf{M}^T \otimes \mathbf{A}^T(\tau))] d\tau = (\mathbf{K}_{32}^j)^T, \quad (34)$$

$$\mathbf{K}_{24}^j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} N_n [(\dot{\mathbf{M}}^T \otimes \mathbf{I}) - (\mathbf{M}^T \otimes \mathbf{A}^T(\tau))] d\tau = (\mathbf{K}_{42}^j)^T, \quad (35)$$

$$\mathbf{f}_2^j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\mathbf{M} \otimes \mathbf{I})^T \mathbf{Q}(\tau) \mathbf{x}_d d\tau, \quad (36)$$

$$\mathbf{K}_{33}^j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} [\underline{\mathbf{N}}^T \underline{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{B}(\tau) \mathbf{R}^{-1}(\tau) \mathbf{B}^T(\tau)] d\tau, \quad (37)$$

$$\mathbf{K}_{34}^j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} N_n [(\underline{\mathbf{N}}^T \otimes \mathbf{B}(\tau) \mathbf{R}^{-1}(\tau) \mathbf{B}^T(\tau))] d\tau = (\mathbf{K}_{43}^j)^T, \quad (38)$$

$$\mathbf{f}_3^j = - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \underline{\mathbf{N}}^T \otimes \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}_d d\tau - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \underline{\mathbf{N}}^T \otimes \mathbf{w}(\tau) d\tau, \quad (39)$$

$$\mathbf{K}_{44}^j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} N_n N_n [\mathbf{B}(\tau) \mathbf{R}^{-1}(\tau) \mathbf{B}^T(\tau)] d\tau, \quad (40)$$

$$\mathbf{f}_4^j = - \int_{t_{j-1}}^{t_j} N_n \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}_d d\tau - \int_{t_{j-1}}^{t_j} N_n \mathbf{w}(\tau) d\tau. \quad (41)$$

根据方程(14), 如果将第 j 个子区间两端的协态变量 $\boldsymbol{\lambda}_{j-1}$ 与 $\boldsymbol{\lambda}_j$ 看作独立变量, 且如果 Hamilton 正则方程在第 j 个子区间中成立, 则 $V_j(\boldsymbol{\lambda}_{j-1}, \boldsymbol{\lambda}_j, \bar{\mathbf{x}}_j, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_j)$ 必定仅是第 j 个子区间两端的协态变量的函数, 故式(23)与(24)的右端均等于 $\mathbf{0}$, 由此可将非独立变量 $\bar{\mathbf{x}}_j$ 与 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_j$ 用独立变量 $\boldsymbol{\lambda}_{j-1}$ 与 $\boldsymbol{\lambda}_j$ 表示, 将其代入式(22)与(25), 得

$$\mathbf{F}_1^j = \mathbf{S}_{11}^j \boldsymbol{\lambda}_{j-1} + \mathbf{S}_{12}^j \boldsymbol{\lambda}_j + \boldsymbol{\zeta}_1^j, \quad (42)$$

$$\mathbf{F}_4^j = \mathbf{S}_{21}^j \boldsymbol{\lambda}_{j-1} + \mathbf{S}_{22}^j \boldsymbol{\lambda}_j + \boldsymbol{\zeta}_2^j, \quad (43)$$

其中

$$\mathbf{S}_{11}^j = \mathbf{K}_{11}^j + (\mathbf{E}_u^T + \mathbf{K}_{12}^j) (\mathbf{K}_{22}^j)^{-1} (\mathbf{K}_{21}^j + \mathbf{E}_u) - (\mathbf{K}_{13}^j + (\mathbf{K}_{cc}^j)^T) (\mathbf{K}_{aa}^j)^{-1} (\mathbf{K}_{31}^j + \mathbf{K}_{cc}^j), \quad (44)$$

$$\mathbf{S}_{12}^j = \mathbf{K}_{14}^j + (\mathbf{E}_u^T + \mathbf{K}_{12}^j) (\mathbf{K}_{22}^j)^{-1} (\mathbf{K}_{24}^j - \mathbf{E}_d) - (\mathbf{K}_{13}^j + (\mathbf{K}_{cc}^j)^T) (\mathbf{K}_{aa}^j)^{-1} (\mathbf{K}_{34}^j + \mathbf{K}_{bb}^j), \quad (45)$$

$$\mathbf{S}_{21}^j = \mathbf{K}_{41}^j + (\mathbf{K}_{42}^j - \mathbf{E}_d^T) (\mathbf{K}_{22}^j)^{-1} (\mathbf{K}_{21}^j + \mathbf{E}_u) - (\mathbf{K}_{43}^j + (\mathbf{K}_{bb}^j)^T) (\mathbf{K}_{aa}^j)^{-1} (\mathbf{K}_{31}^j + \mathbf{K}_{cc}^j), \quad (46)$$

$$\mathbf{S}_{22}^j = \mathbf{K}_{44}^j + (\mathbf{K}_{42}^j - \mathbf{E}_d^T) (\mathbf{K}_{22}^j)^{-1} (\mathbf{K}_{24}^j - \mathbf{E}_d) - (\mathbf{K}_{43}^j + (\mathbf{K}_{bb}^j)^T) (\mathbf{K}_{aa}^j)^{-1} (\mathbf{K}_{34}^j + \mathbf{K}_{bb}^j), \quad (47)$$

$$\boldsymbol{\zeta}_1^j = - (\mathbf{E}_u^T + \mathbf{K}_{12}^j) (\mathbf{K}_{22}^j)^{-1} \mathbf{K}_{dd}^j - \mathbf{K}_{13}^j (\mathbf{K}_{aa}^j)^{-1} \mathbf{K}_{ee}^j + \mathbf{f}_1^j, \quad (48)$$

$$\boldsymbol{\zeta}_2^j = - (\mathbf{K}_{42}^j - \mathbf{E}_d^T) (\mathbf{K}_{22}^j)^{-1} \mathbf{K}_{dd}^j - \mathbf{K}_{43}^j (\mathbf{K}_{aa}^j)^{-1} \mathbf{K}_{ee}^j + \mathbf{f}_4^j, \quad (49)$$

$$\mathbf{K}_{aa}^j = \mathbf{K}_{33}^j + \mathbf{K}_{32}^j (\mathbf{K}_{22}^j)^{-1} \mathbf{K}_{23}^j, \quad (50)$$

$$\mathbf{K}_{bb}^j = \mathbf{K}_{32}^j (\mathbf{K}_{22}^j)^{-1} (\mathbf{K}_{24}^j - \mathbf{E}_d), \quad (51)$$

$$\mathbf{K}_{ce}^j = \mathbf{K}_{32}^j (\mathbf{K}_{22}^j)^{-1} (\mathbf{K}_{21}^j + \mathbf{E}_u), \quad (52)$$

$$\mathbf{K}_{dd}^j = \mathbf{K}_{23}^j (\mathbf{K}_{aa}^j)^{-1} \mathbf{K}_{32}^j (\mathbf{K}_{22}^j)^{-1} \mathbf{f}_2^j + \mathbf{K}_{23}^j (\mathbf{K}_{aa}^j)^{-1} \mathbf{f}_3^j - \mathbf{f}_2^j, \quad (53)$$

$$\mathbf{K}_{ee}^j = \mathbf{K}_{32}^j (\mathbf{K}_{22}^j)^{-1} \mathbf{f}_2^j + \mathbf{f}_3^j. \quad (54)$$

在第 j 个子区间中, 根据式(14)得如下关系:

$$dV_j = \mathbf{x}_{j-1}^T d\boldsymbol{\lambda}_{j-1} - \mathbf{x}_j^T d\boldsymbol{\lambda}_j. \quad (55)$$

由上式可得

$$\frac{\partial V_j}{\partial \boldsymbol{\lambda}_j} + \mathbf{x}_j = \mathbf{0}, \quad (56)$$

$$\frac{\partial V_j}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{j-1}} - \mathbf{x}_{j-1} = \mathbf{0}. \quad (57)$$

根据相邻时间区间的连续条件以及方程式(22) ~ (25), 可得整个时间区间 $[t, t + T]$ 中有如下方程成立:

$$\mathbf{F}_1^1 = \mathbf{x}_0, \quad (58)$$

$$\mathbf{F}_4^j + \mathbf{F}_1^{j+1} = \mathbf{0}. \quad (59)$$

方程(58)代表初始边界条件式(10).

由式(25)、(43)和(57)可得

$$\mathbf{x}_N = -\mathbf{F}_4^N = -(\mathbf{S}_{21}^N \boldsymbol{\lambda}_{j-1} + \mathbf{S}_{22}^N \boldsymbol{\lambda}_j + \boldsymbol{\zeta}_2^N). \quad (60)$$

将式(60)代入式(11)整理得到如下与式(11)等价的边界条件:

$$\mathbf{M}_r^T \mathbf{S}_r \mathbf{M}_r \mathbf{S}_{21}^N \boldsymbol{\lambda}_{N-1} + (\mathbf{M}_r^T \mathbf{S}_r \mathbf{M}_r \mathbf{S}_{22}^N + \mathbf{I}) \boldsymbol{\lambda}_N = -\mathbf{M}_r^T \mathbf{S}_r \mathbf{M}_r \boldsymbol{\zeta}_2^N - \mathbf{M}_r^T \mathbf{S}_r \boldsymbol{\psi}. \quad (61)$$

由此得到如下的线性方程:

$$\mathcal{A} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}, \quad (62)$$

其中

$$\boldsymbol{\lambda} = \{ \boldsymbol{\lambda}^T(t_0), \boldsymbol{\lambda}^T(t_1), \dots, \boldsymbol{\lambda}^T(t_j), \dots, \boldsymbol{\lambda}^T(t_N) \}^T, \quad (63)$$

$$\mathbf{B} = \{ (\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\zeta}_1^1)^T, -(\boldsymbol{\zeta}_2^1 + \boldsymbol{\zeta}_1^2)^T, \dots, -(\boldsymbol{\zeta}_2^j + \boldsymbol{\zeta}_1^{j+1})^T, \dots, -(\boldsymbol{\zeta}_2^{N-1} + \boldsymbol{\zeta}_1^N)^T, -\mathbf{M}_r^T \mathbf{S}_r \boldsymbol{\psi} - \mathbf{M}_r^T \mathbf{S}_r \mathbf{M}_r \boldsymbol{\zeta}_2^N \}^T, \quad (64)$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11}^1 & \mathbf{S}_{12}^1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{21}^1 & \mathbf{S}_{22}^1 + \mathbf{S}_{11}^1 & \mathbf{S}_{12}^1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{21}^2 & \mathbf{S}_{22}^2 + \mathbf{S}_{11}^2 & \mathbf{S}_{12}^2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{21}^3 & \mathbf{S}_{22}^3 + \mathbf{S}_{11}^3 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \mathbf{S}_{22}^{N-1} + \mathbf{S}_{11}^N & \mathbf{S}_{12}^N \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{M}_r^T \mathbf{S}_r \mathbf{M}_r \mathbf{S}_{21}^N & \mathbf{M}_r^T \mathbf{S}_r \mathbf{M}_r \mathbf{S}_{22}^N + \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (65)$$

通过求解线性方程组(62), 可求得 $\boldsymbol{\lambda}$ 的值, 而根据式(25)、(43)与(57), 可得如下关系式:

$$\mathbf{x}_j = -\mathbf{F}_4^j = -(\mathbf{S}_{21}^j \boldsymbol{\lambda}_{j-1} + \mathbf{S}_{22}^j \boldsymbol{\lambda}_j + \boldsymbol{\zeta}_2^j). \quad (66)$$

根据求得的 $\boldsymbol{\lambda}$ 值及式(66), 可求得更新后的 \mathbf{x} 的值, 从而进入下一步迭代.

根据方程式(7), 在得到满足精度的状态变量 \mathbf{x} 的值后, 可将最后一步迭代时的 $\boldsymbol{\lambda}$ 值代入下式:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d - \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{B}(\tau))^T \boldsymbol{\lambda}, \tag{67}$$

从而得到控制输入 \mathbf{u} 的值。

3 滚动时域更新

在以上保辛算法的基础上,通过每一个时间步的递进并更新状态和控制变量,即可完成闭环反馈控制过程,核心步骤可以总结如下:

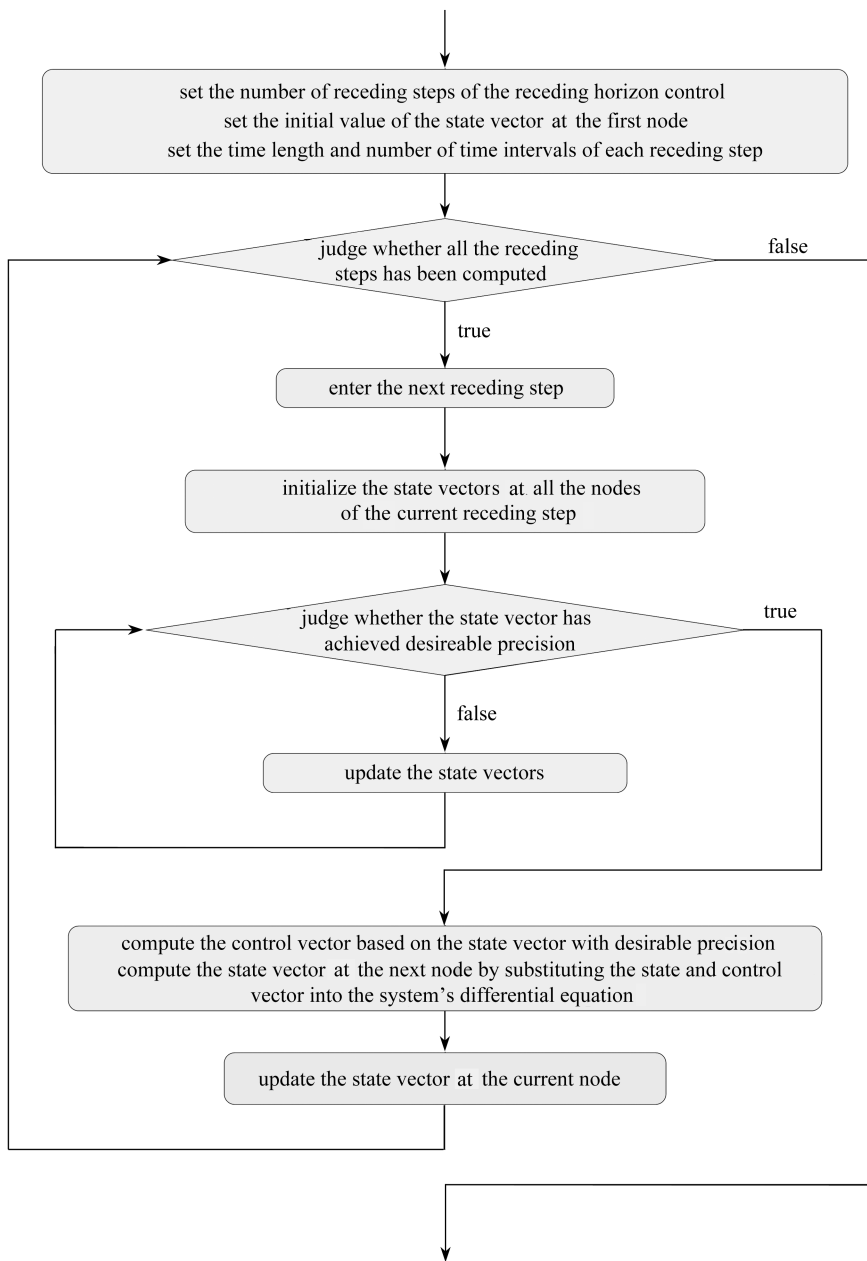


图1 程序算法流程图

Fig.1 Algorithm flowchart of the program

A. 确定在时间域 $[t, t + T]$ 内进行滚动时域控制的滚动步数 Simu_number, 将时间域 $[t,$

$t + T]$ 划分为 $\text{Simu_number}+1$ 份, 给定状态变量在第一个节点上的初值 x_0 . 设定每个滚动步的步长 RHC_time , 以及每个滚动步分割的份数 RHC_number .

B. 进行第 iter 个滚动步的计算 ($1 \leq \text{iter} \leq \text{Simu_number}+1$):

- ① 初始化第 iter 个滚动步的 $\text{RHC_number}+1$ 个节点上的状态变量序列 x_t 与 x_{new} .
- ② 判断收敛条件是否满足, 若满足, 跳到步骤 C, 若不满足, 执行③.
- ③ 将 x_{new} 赋给 x_t , 通过方程(62)与(66), 求得更新后的 x_{new} , 并回到②.

C. 由 x_{new} 求出第一个点的控制向量 u_0 , 将 u_0 与 x_0 代入受控微分方程, 求出下一个点的状态变量 x_1 .

D. 将 x_1 赋给 x_0 , 回到步骤 B, 最终求得所有 $\text{Simu_number}+1$ 个点上的状态变量与控制输入.

程序流程图如图 1 所示.

4 数值仿真算例

算例 1 为了说明本文算法的有效性, 选取一个非线性吊重控制系统的算例. 系统示意图如图 2.

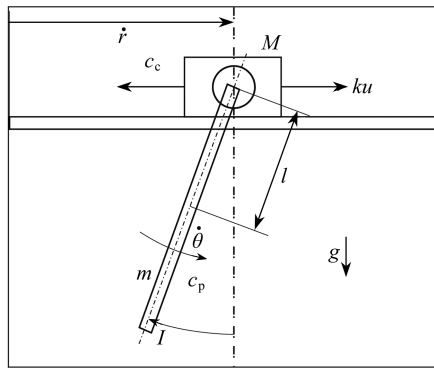


图 2 吊重控制系统示意图

Fig. 2 Representation of the lifting control system

图 2 所示系统的动力学方程为

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{r} - ml\ddot{\theta}\cos\theta = -c_c\dot{r} - ml\dot{\theta}\sin\theta + ku, \\ -ml\dot{r}\cos\theta + (I + ml^2)\ddot{\theta} = -c_p\dot{\theta} - mgl\sin\theta. \end{cases} \quad (68)$$

上述方程中, M 与 m 为滑块与吊重的质量, I 为吊重转动惯量, c_c 与 c_p 为分别为平动与转动的阻尼系数, l 为小车质心到吊重质心的距离, g 为重力加速度, k 为控制系数, u 为控制输入, r 为小车位移, θ 为吊重与铅垂线的夹角. 各个参数的值如下:

$$M = 1.96 \text{ kg}, m = 0.045 \text{ kg}, I = 0.000447 \text{ kg}\cdot\text{m}^2,$$

$$c_c = 16.3 \text{ kg/s}, c_p = 0.00402 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s},$$

$$k = 0.98 \text{ N}\cdot\text{s/m}, l = 0.125 \text{ m}, g = 9.8 \text{ m/s}^2.$$

系统的控制目标为使吊重的摆动尽快趋于稳定, 即使得如下的性能指标取最小值:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^6 [100r_1^2 + \theta_2^2 + \dot{r}_3^2 + 0.1\dot{\theta}_4^2 + 0.02u^2] d\tau. \quad (69)$$

将状态向量取为 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [r \ \theta \ \dot{r} \ \dot{\theta}]^T$, 系统的初始状态取为

$$x_0 = [0 \quad 3\pi/8 \quad 0 \quad 0]^T.$$

表 1 列出了在不同的收敛精度下,性能指标、状态变量、协态变量以及控制输入与参考解的相对误差.其中以时间区间划分为 $N = 1\,000$ 份, $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-12}$ 时求得的结果作为参考解. ε 定义为前后两个迭代步状态变量的差的模,即

$$\varepsilon = \|x^{i+1} - x^i\| . \tag{70}$$

表 1 本文算法在不同参数下与参考解的比较

Table 1 Comparison of the computation results with different variables

ε	$ J - J^* / J^* $	$ x - x^* / x^* $	$ \lambda - \lambda^* / \lambda^* $	$ u - u^* / u^* $
1E-00	2.17E-05	7.07E-06	4.34E-04	5.43E-05
1E-03	1.02E-08	9.29E-09	2.39E-07	4.90E-08
1E-06	7.43E-11	1.80E-10	2.42E-09	1.81E-09
1E-09	7.06E-15	5.97E-14	1.78E-12	7.31E-13

从表 1 中可以看出,本文的算法具有较高的收敛精度.另外,本文算法对迭代初值的选取要求宽松,并且收敛速度较快.表 2 列出了各个迭代步中性能指标、状态变量、协态变量及控制输入的前后两个迭代值的偏差,从表 2 可以看出,本文算法的收敛速度较快.

表 2 相邻迭代结果的距离

Table 2 Distances between results of adjacent iteration steps

k	$ J^k - J^{k-1} $	$ x^k - x^{k-1} $	$ \lambda^k - \lambda^{k-1} $	$ u^k - u^{k-1} $
1	0.497 5	11.384 5	1.557 9	98.770 6
3	0.004 4	0.106 9	0.019 9	0.180 2
5	6.81E-07	7.83E-05	2.17E-05	2.28E-04
7	4.24E-10	6.98E-08	1.03E-08	3.23E-07
9	1.73E-12	1.07E-10	5.32E-12	4.81E-10
11	1.09E-14	3.18E-13	1.09E-14	6.01E-13

图 3 与图 4 给出了迭代 1 次和迭代 3 次时小车运动距离与吊重摆角的解.从图 3 和图 4 中可以看出,迭代 3 次后的解就能很好地接近参考解,可见算法的迭代效率较高.

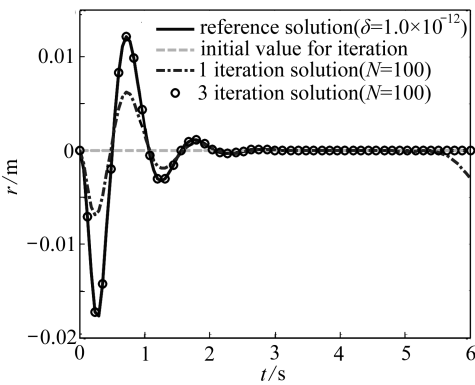


图 3 小车运动距离收敛结果

Fig. 3 Convergence result of the movement distance

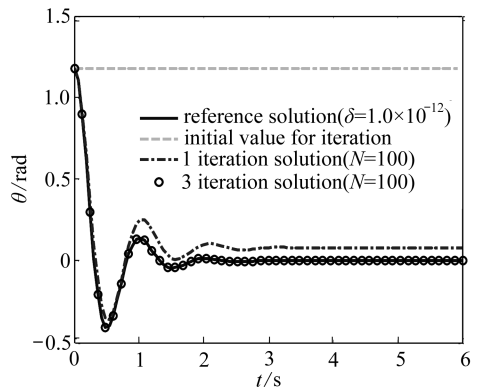


图 4 吊重摆角收敛结果

Fig. 4 Convergence result of the swing angle

算例 2 本文算法是一种闭环反馈控制算法,对于很多不稳定的系统,即使很微小的初值扰动也会对系统的运动状态产生影响,若使用开环控制,很可能导致控制任务的失败,而闭环反馈控制则能很好地减小这类初值扰动的影响.为了说明这一问题,选取如图 5 所示的倒立摆

系统进行分析.

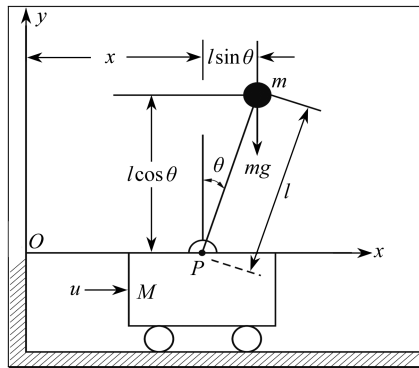


图5 驱动小车上的倒立摆示意图

Fig.5 Representation of the inverted pendulum on a driving cart

由 Newton 动力学方法可得到图 5 倒立摆的运动方程:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + ml\ddot{\theta} \cos \theta = u, \\ m\ddot{x} \cos \theta + ml\ddot{\theta} = mg \sin \theta. \end{cases} \quad (71)$$

考虑将如下的性能指标最小化的问题:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^6 [100\theta^2 + 40x^2 + u^2] d\tau. \quad (72)$$

初始条件为 $(\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x})|_{\tau=0} = [-0.1, 0, 0.2, 0]$. 倒立摆是一个不稳定的系统, 如果采用开环控制, 取实际初始状态向量与理想值偏差 0.1%, 即

$$(\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x})|_{\tau=0} = [-0.1, 0, 0.2, 0] \times 1.001, \quad (73)$$

则摆角与速度的实际路径与理想路径如图 6 和 7 所示.

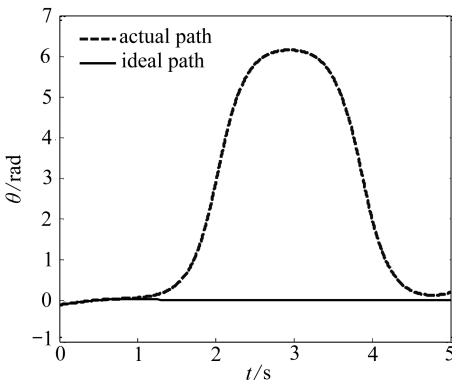


图6 摆角路径

Fig.6 Paths of the swing angle

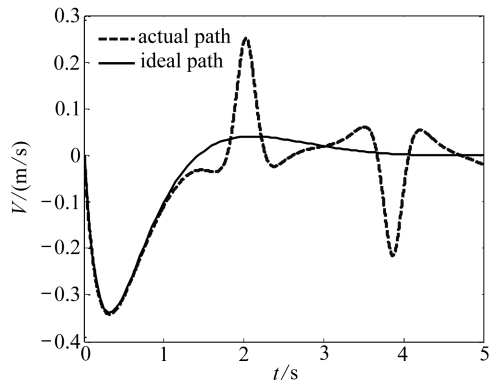


图7 速度路径

Fig.7 Paths of the velocity

如图 6 和 7 所示, 当初始状态只产生了 0.1% 的偏差时, 摆角和速度在经过一段时间后就会偏离理想路径, 可见开环控制不能用于倒立摆这类具有不稳定性的系统上. 而如果使用闭环反馈控制, 那么初始状态向量的偏差导致的影响会小很多, 这是因为在闭环反馈控制中, 每一步的控制输入都是根据当前时刻的真实的状态向量计算得到的. 以滚动时域控制为例, 将实际初始状态向量与理想值偏差 20%, 即

$$(\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x})|_{\tau=0} = [-0.1, 0, 0.2, 0] \times 1.2, \quad (74)$$

得到摆角与速度的实际路径与理想路径如图 8 和图 9 所示。

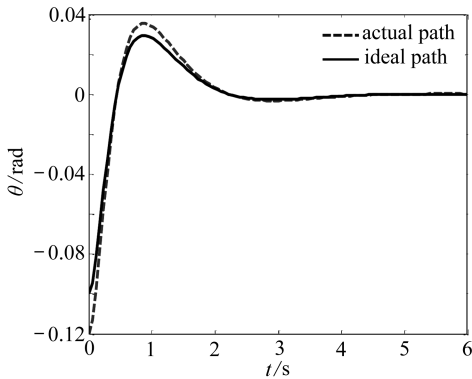


图 8 摆角的实际与理想路径

Fig.8 Actual and ideal paths of the swing angle

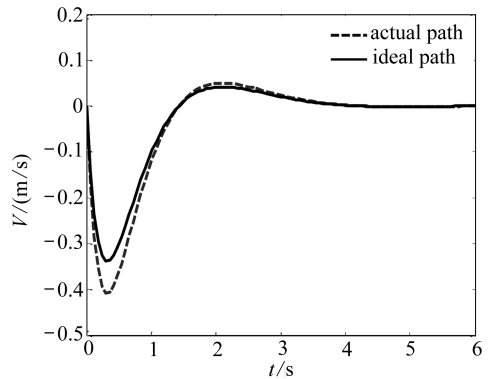


图 9 速度的实际与理想路径

Fig.9 Actual and ideal paths of the velocity

可以看出,即使初始条件产生了 20% 的偏差,在一段时间之后,各个量的实际曲线便能很好地跟踪理想曲线,通过反馈控制,消除了初始偏差的影响,最终系统还是能够达到稳定状态,控制效果几乎没有影响。

5 结 论

本文提出了基于拟线性化方法的非线性系统闭环反馈控制的保辛数值求解算法,通过拟线性方法将非线性系统最优控制问题转化为线性非齐次 Hamilton 两点边值问题的迭代格式求解。本文基于对偶变量变分原理与生成函数构造的保辛算法将每一个迭代步中的线性非齐次 Hamilton 两点边值问题转化为了线性方程组的求解,保持了原 Hamilton 系统的辛几何性质,避免对 Riccati 微分方程进行数值积分,提高了计算效率。

数值仿真表明:本文保辛算法计算精度较高,迭代速度较快。另外,与非线性系统开环控制相比可以看出:由于倒立摆系统的内在不稳定性,初始状态向量的微小误差便会导致控制结果的巨大差异。若使用开环控制,很可能导致终端无法达到稳定状态,使任务失败。而闭环反馈控制由于在每一个滚动点采用了当前时刻的真实状态向量计算控制输入,因此能有效地降低初始状态向量的误差对控制结果的影响。

参考文献 (References):

- [1] Chen M, Han Z. Controlling and synchronizing chaotic Genesis system via nonlinear feedback control chaos[J]. *Solitons & Fractals*, 2003, **17**(4): 709-716.
- [2] Bodson M, Chiasson J N, Novotnak R T, Rekowski R B. High-performance nonlinear feedback control of a permanent magnet stepper motor[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1993, **1**(1): 5-14.
- [3] Vadali S R, Kim E S. Feedback control of tethered satellites using Lyapunov stability theory [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1991, **14**(4): 729-735.
- [4] Aeyels D. Stabilization of a class of nonlinear systems by a smooth feedback control[J]. *Systems & Control Letters*, 1985, **5**(5): 289-294.
- [5] 钟睿, 徐世杰. 基于直接配点法的绳系卫星系统变轨控制[J]. 航空学报, 2010, **31**(3): 572-578. (ZHONG Rui, XU Shi-jie. Orbit-transfer control for TSS using direct collocation method)

- [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2010, **31**(3): 572-578. (in Chinese))
- [6] Mayne D Q, Michalska H. Receding horizon control of nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**(7): 814-824.
- [7] PENG Hai-jun, GAO Qiang, WU Zhi-gang, ZHONG Wan-xie. Efficient sparse approach for solving receding-horizon control problems[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2013. doi: 10.2514/1.60090.
- [8] Arnold V I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*[M]. New York: Springer Verlag, 1989.
- [9] 钟万勰, 吴志刚, 谭述君. 状态空间控制理论与计算[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 247-256. (ZHONG Wan-xie, WU Zhi-gang, TAN Shu-jun. *State Space Control Theory and Calculation* [M]. Beijing: Science Press, 2007: 247-256. (in Chinese))
- [10] 谭述君, 钟万勰. 非线性最优控制系统的保辛摄动近似求解[J]. 自动化学报, 2007, **33**(9): 1004-1008. (TAN Shu-jun, ZHONG Wan-xie. Computation of nonlinear optimal control via symplectic conservative perturbation method[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(9): 1004-1008. (in Chinese))

Symplectic Conservative Approach for Solving Nonlinear Closed-Loop Feedback Control Problems Based on Quasilinearization Method

JIANG Xin, PENG Hai-jun, ZHANG Sheng

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,
Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology,
Dalian, Liaoning 116024, P. R. China)

Abstract: A symplectic approach was proposed to solve the nonlinear closed-loop feedback control problems. First, the optimal control problems of the nonlinear system were transformed into the iteration form of linear Hamilton system's two-point boundary value problems. Second, a symplectic numerical approach was deduced based on dual variable principle and generating function. This method can keep the symplectic geometry structure of the Hamilton system. Last, with the state vector and control input updated by the forwarding of time steps, the goal of closed-loop control was achieved. The numerical simulation shows that the proposed symplectic method has high precision and fast iteration speed. In addition, the closed-loop feedback control and open-loop control were used separately to analyze the inverted pendulum control system. The results show that in the case of the presence of initial errors, open-loop control will result in the failure of the stability control tasks, while closed-loop feedback control will eliminate the initial errors after a certain period of time and lead the system to a stable state.

Key words: nonlinear system; quasilinearization; receding horizon control; variational principle; symplectic conservative method