文章编号:1000-0887(2013)08-0836-10

半严格 -*G*- 半预不变凸性与最优化*

彭再云, 李永红

(重庆交通大学 理学院,重庆 400074)

摘要: 提出了一类新的广义凸函数——半严格 -*G*- 半预不变凸函数,它是一类重要的广义凸函数,是半严格预不变凸函数和半严格 -*G*- 预不变凸函数的真推广. 首先,用例子说明了半严格 -*G*- 半预不变凸函数的存在性,并给出例子说明它是与 *G*- 半预不变凸函数不同的一类函数;然后,给出了半严格 -*G*- 半预不变凸函数的几个基本性质;最后,讨论了半严格 -*G*- 半预不变凸函数分别在无约束和带不等式约束的非线性规划问题中的应用,得到了一些最优性结果,并举例验证所得结论的正确性.

关 键 词: 半连通集; 半严格 -*G*- 半预不变凸函数; 非线性规划; 可行集
中图分类号: O221.1 **文献标志码:** A
DOI: 10.3879/j. issn. 1000-0887. 2013. 08. 007

引 言

凸性和广义凸性在数学经济、工程、管理科学和优化理论中扮演着重要的角色;有关凸性和广义凸性的研究是非线性规划中最重要的方向之一(见文献[1-2]). 文献[3]提出了一类被称为不变凸函数的广义凸函数,然后 Craven 利用它建立了分式规划的对偶原理. 文献[4]提出一类广义凸函数——预不变凸函数,它是不变凸函数的推广. 文献[5]对预不变凸函数的性质进行了深入研究,然后在文献[6]中又提出了半严格预不变凸函数的概念,并对其性质进行了讨论. 文献[7-8]提出了 *G*- 预不变凸函数的概念,并讨论此类函数在非线性规划中的重要应用. 文献[9-10]分别研究了半严格 -*G*- 预不变凸性、强 -*G*- 预不变凸性的性质与应用. 文献[11]研究变分不等式时提出了一类较预不变凸函数更广的一类函数——半预不变凸函数,并讨论了此类函数的应用. 最近,Peng 和 Chang[12] 又在此基础上提出了 *G*- 半预不变凸函数的概念,它统一了 *G*- 预不变凸函数与半预不变凸函数, 并讨论了 *G*- 半预不变凸函数的性质及其重要刻画. 在文献[13] 中, 彭再云等讨论了强 *G*- 半预不变凸性及其在非线性规划问题中的应用.

在文献[7,9,12-14]的启发下,本文提出了一类新的广义凸函数——半严格 -*G*- 半预不变凸函数,它是半严格 -*G*- 预不变凸函数的真推广. 首先,用例子说明此类函数的存在性,并用例子表明它是与文献[12] 中所研究的 *G*- 半预不变凸函数不相同的一类广义凸函数;讨论半严格 -*G*- 半预不变凸函数的基本性质;最后,给出半严格 -*G*- 半预不变凸性在非线性规划中的应

* **收稿日期:** 2013-05-07; **修订日期:** 2013-05-28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11271389);国家青年基金资助项目(11201509);重庆市自然科学基金资助项目(CSTC2012jjA00016);重庆市教委基金资助项目(KJ130428)
作者简介: 彭再云(1980—),男,重庆人,副教授,博士(通讯作者. E-mail: pengzaiyun@126.com).

用,获得 3 个最优性结果,并举例验证所得结论的正确性.

1　基本概念与举例

在本文中,我们均假设 X 为 R^n 中的非空子集.下面,我们先回顾一些相关定义:

定义 1[3-4]　如果存在一个非零向量映射 $\eta:X\times X\to R^n$,使得对 $\forall x, y\in X, \lambda\in[0,1]$, $y+\lambda\eta(x,y)\in X$ 成立,则称集合 X 是关于 η 的不变凸集.

定义 2[6-7]　设集合 $X\subseteq R^n$ 是关于 $\eta:X\times X\to R^n$ 的一个不变凸集,函数 $f:X\to\mathbf{R}$,如果对 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]\,(f(x)\neq f(y),\lambda\in(0,1))$,满足

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),$$

则称函数 f 是 X 上关于 η 的(半严格)预不变凸函数.

定义 3[7-9]　设集合 $X\subseteq R^n$ 是关于 $\eta:X\times X\to R^n$ 的不变凸集,函数 $f:X\to\mathbf{R}$,如果存在连续递增函数 $G:I_f(X)\to\mathbf{R}$,使得对 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]\,(f(x)\neq f(y),\lambda\in(0,1))$,满足

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))],$$

则称函数 f 是 X 上关于 η 的(半严格)G-预不变凸函数.

定义 4[11]　如果存在一个非零向量映射 $\eta:X\times X\times[0,1]\to R^n$,使得对 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$, $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in X$ 成立,则称集合 $X\subseteq R^n$ 是关于 η 的半连通集.

定义 5[11]　假设 X 是关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to R^n$ 的半连通集,则 $f:X\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的(半严格)半预不变凸函数,当且仅当对于任意 $x,y\in X,\lambda\in[0,1]\,(f(x)\neq f(y),\lambda\in(0,1))$,满足 $\lim_{\lambda\to0}\lambda\eta(x,y,\lambda)=0$,且

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

定义 6[12]　假设 $X\subseteq R^n$ 是关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to R^n$ 的半连通集,则 $f:X\to\mathbf{R}$ 是 X 上关于 η 的 G-半预不变凸函数,当且仅当存在一个连续的实值递增函数 $G:I_f(X)\to\mathbf{R}$,使得对于 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$, $\lim_{\lambda\to0}\lambda\eta(x,y,\lambda)=0$ 有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))].$$

当上式中的不等号取相反方向时,称函数 f 是 X 上关于 η 的 G-半预不变凹函数.

下面给出半严格-G-半预不变凸函数的概念.

定义 7　设 $X\subseteq R^n$ 是关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to R^n$ 的半连通集,函数 $f:X\to\mathbf{R}$,如果存在连续递增函数 $G:I_f(X)\to\mathbf{R}$,使得对任意 $x,y\in X$, $f(x)\neq f(y)$, $\lambda\in(0,1)$ 且 $\lim_{\lambda\to0}\lambda\eta(x,y,\lambda)=0$ 有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))],$$

则称函数 f 是 X 上关于 η 的半严格-G-半预不变凸函数.

注 1　定义中当 $\eta(x,y,\lambda)=\eta(x,y)$ 时,半严格-G-半预不变凸函数退化为半严格-G-预不变凸函数[9];当 $\eta(x,y,\lambda)=\eta(x,y)$ 且 $G(x)\equiv x$ 时,半严格-G-半预不变凸函数就退化为半严格预不变凸函数[6].

下面用 3 个算例来说明半严格-G-半预不变凸函数的存在性,及其与相关广义凸函数的区别.

例 1　令

$$X=(-\infty,+\infty),\ f(x)=\arctan(x/2-1),\ G(t)=\tan t,\ t\in(-\pi/2,\pi/2),$$

其中

$$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}\lambda x-y, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\\ x-y-1, & x<0,\ y\leqslant 0;\\ -\lambda x-y, & x\geqslant 0,\ y<0;\\ x-y-\lambda, & x\leqslant 0,\ y>0,\end{cases}$$

则函数 f 是 X 上关于 η 的半严格-G-半预不变凸函数.

分析：对 $x,\ y\in X, f(x)\neq(y),\ \lambda\in(0,1)$,我们可以验证 $\eta(x,\ y,\ \lambda)$ 在定义域的每段上都有

$$y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in X \text{ 及 } f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<$$
$$G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))].$$

由定义 7, f 是 X 上关于 η 的半严格-G-半预不变凸函数.

注 2 例 1 表明本文提出的半严格-G-半预不变凸函数是大量存在的.

例 2 此例说明半严格-G-半预不变凸函数不一定是关于同一 η 的 G-半预不变凸函数.

令 $f:X\to R$, 且

$$f(x)=\begin{cases}\ln(-|x|+2), & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$$

其中 $G(t)=\mathrm{e}^t$,

$$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}-y-1, & x>1,\ 0\leqslant y<1;\\ x-y, & \begin{cases}x<-1,\ -1<y\leqslant 0,\\ y<-1,\ -1<x\leqslant 0;\end{cases}\\ 1+\lambda+\lambda^2, & y>1,\ 0\leqslant x<1;\\ x-y, & |x|\geqslant 1,\ |y|\geqslant 1;\\ -1-y, & 0\leqslant x<1,\ 0<y\leqslant 1;\\ y-x, & \begin{cases}x>1,\ -1<y<0,\\ y<-1,\ 0<x<1;\end{cases}\\ y-x+\lambda^2+3\lambda, & y>1,\ -1<x<0;\\ y-1, & x<-1,\ 0<y<1;\\ -1-y/2, & |x|<1,\ -1\leqslant y\leqslant 0;\\ -3x/2+3y/2, & x=1,\ 0<y<1;\\ -3x/2+3y/2-5\lambda/2, & x=-1,\ -1<y<0;\\ -y-x^2-x-1, & -1<x<0,\ 0<y\leqslant 1;\\ y-3x/2, & x=1,\ -1<y<0;\\ y+x, & x=-1,\ 0\leqslant y<1.\end{cases}$$

分析：由半严格-G-半预不变凸函数的定义,很容易验证 f 是在 X 上关于 η 的半严格-G-半预不变凸函数. 然而,令 $x=2, y=-3/2, \lambda=1/2$, 则有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))=f(1/4)=\ln(7/4)>G^{-1}(1)=$$
$$G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))],$$

即该函数不是关于 η 的 G-半预不变凸函数,同时 f 也不是 X 关于 η 的强-G-半预不变凸函数.

例 3 此例子说明 G-半预不变凸函数, 也不一定是关于同一 η 的半严格-G-半预不变凸函数.

令 $f(x)=\ln(|x|+1)$，$|x|\geqslant 1$，其中函数 $G(t)=e^t$，

$$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}x-y, & x\geqslant 1,\ y\geqslant 1;\\ x-y, & x\leqslant -1,\ y\leqslant -1;\\ -x+y-\lambda, & x\geqslant 1,\ y\leqslant -1;\\ -x-y, & x\leqslant -1,\ y\geqslant 1.\end{cases}$$

显然由定义可知 f 是关于 η 的 G- 半预不变凸函数。当取 $x=-1$，$y=2$，$\lambda=1/2$ 时，我们可以得到

$$f(x)=f(-1)=\ln 2\neq f(2)=\ln 3=f(y),$$

进而可得

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))=\ln(5/2)=$$
$$G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))]=\ln(5/2).$$

因此 f 不是关于 η 的半严格 -G- 半预不变凸函数。

注 3　例 2 与例 3 表明，本文所提出的半严格 -G- 半预不变凸函数与参考文献[12]所研究的 G- 半预不变凸函数是不相同的。

2　半严格 -G- 半预不变凸函数的性质

在本节，将讨论半严格 -G- 半预不变凸函数的几个基本性质。

说明：若一个实值函数 G 满足 $G(x+y)=G(x)+G(y)$，x,y 在该函数的定义域中，则称函数 G 满足可加性；若一个实值函数 G 满足 $G(kx)=kG(x)$，$k>0$，x 在该函数的定义域中，则称函数 G 满足正齐次性。

条件 C　向量值映射 $\eta: X\times X\times[0,1]\to R^n$ 满足条件 C，如果对任意 $x,y\in X$，$\lambda\in[0,1]$ 有

$$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y,\lambda),\lambda)=-\lambda\eta(x,y,\lambda),$$
$$\eta(x,y+\lambda\eta(x,y,\lambda),\lambda)=(1-\lambda)\eta(x,y,\lambda).$$

下面举例说明满足条件 C 的向量值映射是大量存在的。

例 4

$$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}x-y, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\\ x-y, & x<0,\ y<0;\\ -1/2-y, & x>0,\ y<0;\\ 1/2-y, & x<0,\ y\geqslant 0;\\ -1/2-y-\lambda, & x=0,\ y<0.\end{cases}$$

容易验证 η 在每段上均满足

$$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y,\lambda),\lambda)=-\lambda\eta(x,y,\lambda),$$
$$\eta(x,y+\lambda\eta(x,y,\lambda),\lambda)=(1-\lambda)\eta(x,y,\lambda).$$

定理 1

1）令 X 是关于 $\eta: X\times X\times[0,1]\to R^n$ 的半连通集，$f,g: X\to\mathbf{R}$ 是关于同一 η 和 G 的半严格 -G- 半预不变凸函数，若 G^{-1} 和 G 满足可加性，则 $f+g$ 也是关于同一 η 和 G 的半严格 -G- 半预不变凸函数。

2）假设 $f: X\to\mathbf{R}$ 是关于 $\eta: X\times X\times[0,1]\to R^n$ 的半严格 -G- 半预不变凸函数，α 是一个常数，若 G^{-1} 和 G 满足可加性，则 $f+\alpha$ 也是关于 η 的半严格 -G- 半预不变凸函数。

3）假设$f:X\to \mathbf{R}$是关于$\eta:X\times X\times[0,1]\to R^n$的半严格 -$G$- 半预不变凸函数，$k>0$，若$G^{-1}$和$G$满足齐次性，则$kf$也是关于$\eta$的半严格 -$G$- 半预不变凸函数.

证明

1）因为f,g是关于同一η和G的半严格 -G- 半预不变凸函数，则对任意$x,y\in X,(f(x)\neq f(y)),\lambda\in(0,1)$，有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))],$$
$$g(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G^{-1}[\lambda G(g(x))+(1-\lambda)G(g(y))].$$

由以上两式及G^{-1}与G的可加性可得

$$\begin{aligned}&(f+g)(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))=\\&\quad f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))+g(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<\\&\quad G^{-1}[\lambda G((f+g)(x))+(1-\lambda)G((f+g)(y))],\end{aligned}$$

故$f+g$是关于η的半严格 -G- 半预不变凸函数.

2）因为f是关于η和G的半严格 -G- 半预不变凸函数，故对任意$x,y\in X,(f(x)\neq f(y)),\lambda\in(0,1)$，有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))].$$

由G^{-1}和G的可加性可得

$$\begin{aligned}&(f+\alpha)(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))=\\&\quad f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))+\alpha<\\&\quad G^{-1}[\lambda G((f+\alpha)(x))+(1-\lambda)G((f+\alpha)(y))],\end{aligned}$$

故$f+\alpha$也是关于η的半严格 -G- 半预不变凸函数.

3）可类似证明.

定理 2 如果$f:X\to\mathbf{R}$是X上关于η的半严格 -G- 半预不变凸函数，$g:I\to\mathbf{R}$为单增凸函数，其中$\mathrm{rang}\,f\subseteq I,h(t)=g\circ G^{-1}(t)$在$G$关于$f$的像上是凸函数，那么复合函数$g\circ f$是关于同一$\eta$的半严格半预不变凸函数.

证明 因为$f:X\to\mathbf{R}$是X上关于η的半严格 -G- 半预不变凸函数，则对$\forall x,y\in X(f(x)\neq f(y)),\forall\lambda\in(0,1)$有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))].$$

又由于g是$I\to\mathbf{R}$上的一个严格递增的凸函数，则有

$$g(f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda)))<g\circ G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))].$$

由$\mathrm{rang}\,f\subseteq I,h(t)=g\circ G^{-1}(t)$在$G$关于$f$的像上的凸性，可得

$$g\circ f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<\lambda g\circ f(x)+(1-\lambda)g\circ f(y),$$

故复合函数$g\circ f$是X上关于同一η的半严格半预不变凸函数.

定理 3 令X是关于η的半连通集，f是X上关于η的半严格 -G_1- 半预不变凸函数，G_2在$I_f(X)$上为连续且严格递增函数. 如果$g(t)=G_2G_1^{-1}$在G_1关于f的像上是凸函数，那么函数f是关于η的半严格 -G_2- 半预不变凸函数.

证明 f是半严格 -G_1- 半预不变凸函数，对于$\forall x,y\in X,f(x)\neq f(y),\lambda\in(0,1)$有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G_1^{-1}[\lambda G_1(f(x))+(1-\lambda)G_1(f(y))].\tag{1}$$

因为G_2是在$I_f(X)$上为连续且严格递增函数，由式(1)可得

$$G_2(f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda)))<G_2G_1^{-1}[\lambda G_1(f(x))+(1-\lambda)G_1(f(y))].$$

又由于$g(t)=G_2G_1^{-1}$在G_1关于f的像上是凸的，则对于$\forall x,y\in X,f(x)\neq f(y),\lambda\in(0,1)$有

$$G_2G_1^{-1}[\lambda G_1(f(x))+(1-\lambda)G_1(f(y))]\leqslant$$
$$\lambda G_2G_1^{-1}(G_1(f(x)))+(1-\lambda)G_2G_1^{-1}(G_1(f(y)))\leqslant$$
$$\lambda G_2(f(x))+(1-\lambda)G_2(f(y)).$$

即

$$G_1^{-1}(\lambda G_1(f(x))+(1-\lambda)G_1(f(y)))\leqslant$$
$$G_2^{-1}(\lambda G_2(f(x))+(1-\lambda)G_2(f(y))). \tag{2}$$

综合式(1)和式(2)可得

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G_2^{-1}(\lambda G_2(f(x))+(1-\lambda)G_2(f(y))),$$

对于 $\forall x,y\in X$, $f(x)\neq f(y)$, $\lambda\in(0,1)$ 成立,故f是关于η的半严格-G_2-半预不变凸函数.

定理4 令X是关于η的半连通集,其中$\eta:X\times X\times[0,1]\to R^n$满足条件C.令$I$为有限或无限指标集,$f_i:X\to\mathbf{R}(i\in I)$是$X$上关于$\eta$的半严格-$G$-半预不变凸函数和$G$-半预不变凸函数簇.记$f(x)=\sup\{f_i(x),i\in I\}$, $\forall x\in X$.如果对$\forall x\in X$都存在一个$i_0=i(x)\in I$使得$f(x)=f_{i_0}(x)$,那么f一定是X上的关于η的半严格-G-半预不变凸函数和G-半预不变凸函数.

证明 利用与文献[7]中命题12类似的方法,显然可得到f在X上是G-半预不变凸函数.

下证f是关于η的半严格-G-半预不变凸函数.假设f不是半严格-G-半预不变凸函数,则存在$x,y\in X(f(x)\neq f(y))$, $\lambda\in(0,1)$使得

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\geqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))].$$

由f在X上的G-半预不变凸性有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))].$$

以上两式可得

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))=G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))]. \tag{3}$$

令$z=y+\lambda\eta(x,y,\lambda)$,由假设,存在$i(z)=i_0$, $i(x)=i_1$, $i(y)=i_2$满足

$$f(z)=f_{i_0}(z),\ f(x)=f_{i_1}(x),\ f(y)=f_{i_2}(y).$$

结合式(3)可得

$$f_{i_0}(z)=G^{-1}[\lambda G(f_{i_1}(x))+(1-\lambda)G(f_{i_2}(y))]. \tag{4}$$

(i) 如果$f_{i_0}(x)\neq f_{i_0}(y)$,那么由$f_{i_0}$的半严格-$G$-半预不变凸性有

$$f_{i_0}(z)<G^{-1}[\lambda G(f_{i_0}(x))+(1-\lambda)G(f_{i_0}(y))]. \tag{5}$$

由$f_{i_0}(x)\leqslant f_{i_1}(x)$, $f_{i_0}(y)\leqslant f_{i_2}(y)$和式(5)可得

$$f_{i_0}(z)<G^{-1}[\lambda G(f_{i_1}(x))+(1-\lambda)G(f_{i_2}(y))],$$

这与式(3)矛盾.

(ii) 如果$f_{i_0}(x)=f_{i_0}(y)$,由f_{i_0}的G-半预不变凸性有

$$f_{i_0}(z)\leqslant G^{-1}[\lambda G(f_{i_0}(x))+(1-\lambda)G(f_{i_0}(y))]. \tag{6}$$

由于$f(x)\neq f(y)$,那么式$f_{i_0}(x)\leqslant f_{i_1}(x)=f(x)$与$f_{i_0}(y)\leqslant f_{i_2}(y)=f(y)$中至少有一个应为严格不等式.由式(6)及函数$G$的连续性与递增性可以得到

$$f(z)=f_{i_0}(z)<G^{-1}[\lambda G(f_{i_1}(x))+(1-\lambda)G(f_{i_2}(y))],$$

此与式(3)矛盾,证毕.

3 半严格-G-半预不变凸性与最优化

本节将分别给出在无约束与带不等式约束下,半严格-G-半预不变凸规划问题的一些最

优性结果.

先考虑如下形式的无约束非线性规划问题:

$$(\mathrm{P}_1)\quad \min f(x)$$
$$\text{s.t. } x \in X.$$

定理 5 令 $X \subseteq R^n$ 是关于 η 的半连通集,$f:X \to \mathbf{R}$ 是关于 η 的半严格 -G- 半预不变凸函数,则问题(P_1)的每一个局部最优解一定是它的全局最优解.

证明 假设 $y \in X$ 是 f 的局部最优解,但不是全局最优解. 则,存在一点 $x \in X$ 使得

$$f(x) < f(y).$$

因为 f 是 X 上关于 η 的半严格 -G- 半预不变凸函数,由定义 7 可知,对 $\forall x,y \in X$, $f(x) \neq f(y)$, $\lambda \in (0,1)$, 有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda)) < G^{-1}[\lambda G(f(x)) + (1-\lambda)G(f(y))].$$

由于 $f(x) < f(y)$,则对任意 $\lambda \in (0,1)$ 有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda)) < G^{-1}[\lambda G(f(y)) + (1-\lambda)G(f(y))] = G^{-1}(G(f(y))) = f(y).$$

于是对 $\forall \lambda \in (0,1)$, 有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda)) < f(y). \tag{7}$$

令 $\lambda \to 0$,则式(7) 与 $y \in X$ 是 f 的局部最优解矛盾.

下面给出例 4 来验证定理 5.

例 4 令 $X = (-\infty, +\infty)$, $f(x) = \arctan[(|x|+1)^2 - 1]$, $G(t) = \tan t$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$,

$$\eta(x,y,\lambda) = \begin{cases} \lambda x - y, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0; \\ x - y, & x < 0,\ y \leqslant 0; \\ -\lambda x - y, & x \geqslant 0,\ y < 0; \\ -x - y, & x \leqslant 0,\ y > 0. \end{cases}$$

分析:由例 1 我们知道 f 是关于 η 的半严格 -G- 半预不变凸函数,满足定理 5 的条件. 因为 $|x| \geqslant 0$,所以 $\min_{x\in X} f(x) = \min_{x\in X}\arctan[(|x|+1)^2 - 1] = 0$, 可得($\mathrm{P}_1$)的局部最优解为 $x = 0$,据定理 5,可得 $x = 0$ 一定是(P_1)的全局最优解.

下面考虑带不等式约束的非线性规划问题:

$$(\mathrm{P}_2)\quad \min f(x)$$
$$\text{s.t. } g_i(x) \leqslant 0, \qquad i \in J = \{1,2,\cdots,m\},\ x \in X,$$

其中, X 是 R^n 的非空子集, $f, g_i: X \to \mathbf{R}$, $i = 1,2,\cdots,m$. (P_2)的可行解集为

$$D := \{x \in X : g_i(x) \leqslant 0,\ i \in J\}.$$

定理 6 设问题(P_2)的可行集 D 是关于 η 的半连通集. 如果 f 是 D 上关于 η 的非常值的 G-半预不变凹函数,则集合 D 没有内点是(P_2)的最优解,即问题(P_2)的任意可行解 $\bar{x}$ 如果存在,则它一定是集合 D 的边界点.

证明 如果问题(P_2)无解,则结论显然成立. 下证问题(P_2)有解的情况:令 $\bar{x}$ 是问题(P_2)的一个最优解. 由假设 f 在 D 上是非常值的,则存在一个可行点 $\tilde{x} \in D$ 使得

$$f(\tilde{x}) > f(\bar{x}).$$

令 z 是 D 的一个内点. 由假设 D 是关于 η 的半连通集,则存在 $y \in D$ 和某个 $\lambda \in [0,1]$, 使得

$$z = \tilde{x} + \lambda\eta(y,\tilde{x},\lambda).$$

又因为 f 是 D 上关于 η 的 G-半预不变凹函数且 $\bar{x}$ 为(P_2)的最优解,则有

$$
\begin{aligned}
f(z) = f(\tilde{x} + \lambda\eta(y,\tilde{x},\lambda)) \geqslant \\
& G^{-1}(\lambda G(f(y)) + (1-\lambda)G(f(\tilde{x}))) > \\
& G^{-1}(\lambda G(f(\bar{x})) + (1-\lambda)G(f(\bar{x}))) = f(\bar{x}).
\end{aligned}
$$

即集合 D 的任何内点均不是(P_2)的最优解,故结论成立.

定理 7　令 X 为关于 η 的非空半连通集,$f:X\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的半严格-G-半预不变凸函数,$g_i:X\to\mathbf{R}(i\in J=\{1,2,\cdots,m\})$ 是关于 η 的 G-半预不变凸函数. 如果 $\bar{x}\in D$ 是关于问题(P_2)的局部极优点,那么 $\bar{x}$ 一定是问题(P_2)的全局极优点.

证明　因为 $\bar{x}\in D$ 是关于问题(P_2)的局部极优点,于是有

$$f(\bar{x}) \leqslant f(x), \qquad \forall x \in X \cap N_\varepsilon(\bar{x}).$$

假设 $\bar{x}$ 不是关于问题(P_2)的全局极优点,那么一定存在一点 $x^*\in D$ 使得

$$f(x^*) < f(\bar{x}). \tag{8}$$

由于 $g_i:X\to\mathbf{R}(i\in J=\{1,2,\cdots,m\})$ 是关于 η 的 G-半预不变凸函数,则对于 $\forall i\in J$,$\bar{x},x^*\in D$ 有

$$
\begin{aligned}
g(\bar{x} + \lambda\eta(x^*,\bar{x},\lambda)) \leqslant G^{-1}(\lambda G(g(x^*)) + (1-\lambda)G(g(\bar{x}))) \leqslant \\
& G^{-1}(\lambda G(0) + (1-\lambda)G(0)) = 0.
\end{aligned}
$$

于是对 $\forall\lambda\in[0,1]$,$\bar{x}+\lambda\eta(x^*,\bar{x},\lambda)\in D\subset X$. 由 $f:X\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的半严格-G-半预不变凸函数,有

$$
\begin{aligned}
f(\bar{x} + \lambda\eta(x^*,\bar{x},\lambda)) < \\
& G^{-1}(\lambda G(f(x^*)) + (1-\lambda)G(f(\bar{x}))), \qquad \forall\lambda\in(0,1).
\end{aligned} \tag{9}
$$

综合式(8)和式(9)可得

$$
\begin{aligned}
f(\bar{x} + \lambda\eta(x^*,\bar{x},\lambda)) < \\
& G^{-1}(\lambda G(f(\bar{x})) + (1-\lambda)G(f(\bar{x}))) = f(\bar{x}), \qquad \forall\lambda\in(0,1).
\end{aligned} \tag{10}
$$

当 $\lambda>0$ 充分小时有 $\bar{x}+\lambda\eta(x^*,\bar{x},\lambda)\in X\cap N_\varepsilon(\bar{x})$,则式(10)与 $\bar{x}\in D$ 是问题(P_2)的局部极优点矛盾,结论得证.

例 5　令 $X=(-\infty,+\infty)$,定义 $f:X\to\mathbf{R}$ 为

$$
f(x) = \begin{cases} \ln(5-4|x|), & |x| \leqslant 1; \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases}
$$

$g_i(x)=3x-1$, $i\in J=\{1,2,\cdots,m\}$. $G(t)=\mathrm{e}^t$. 则可验证 X 为关于 η 的非空半连通集,该规划问题的可行解集为 $D:=\{x\in X: g_i(x)\leqslant 0, i\in J\}$,由约束 $g_i(x)=3x-1$,$i\in J=\{1,2,\cdots,m\}$ 可得可行集为

$$D:=\{x\in X: x\leqslant 1/3,\ i\in J\}.$$

当 $|x|\geqslant 1$ 时,目标函数恒等于 0;当 $|x|\leqslant 1$ 时,函数 $\min_{x\in D}f(x)=\min_{x\in D}\ln(5-4|x|)=0$,则目标函数最小值为 0,且 $x=-1$ 为该非线性规划问题在可行域内的一个局部最优解. 由定义 6 和定义 7,显然可验证 $f:X\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的半严格-G-半预不变凸函数,$g_i:X\to\mathbf{R}(i\in J=\{1,2,\cdots,m\})$ 是关于 η 的 G-半预不变凸函数. 定理 7 的条件均满足,根据定理 7,$x=-1$ 是该非线性规划问题的一个全局最优值解,其中 $\eta: X\times X\times[0,1]\to R^n$ 定义为

$$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases} 3/4-y, & \begin{cases} x>1,\ 0\leqslant y<1, \\ x<-1,\ -1<y\leqslant 0; \end{cases} \\ 2\lambda^3+7\lambda^2+5\lambda+1, & y>1,\ 0\leqslant x<1; \\ x-y, & y<-1,\ -1<x\leqslant 0; \\ -4x-y-\lambda, & 0\leqslant x<1,\ 0<y<1; \\ 1-y, & 0\leqslant x<1,\ y=1; \\ x-y, & |x|\geqslant 1,\ |y|\geqslant 1; \\ y-x-2, & x>1,\ -1<y<0; \\ y-x, & y>1,\ -1<x<0; \\ y, & \begin{cases} x<-1,\ 0<y<1, \\ y<-1,\ 0<x<1; \end{cases} \\ -5-y/2, & |x|<1,\ -1\leqslant y\leqslant 0; \\ -4x+3y/2, & x=1,\ 0<y<1; \\ 3x+3y/2, & x=-1,\ -1<y<0; \\ -y-x^2-x-15/2, & -1<x<0,\ 0<y\leqslant 1; \\ -3y+2x-\lambda/2, & x=1,\ -1<y\leqslant 0; \\ x, & x=-1,\ 0\leqslant y<1. \end{cases}$$

注 4 例 5 说明本文所得非线性规划问题中的应用结果——定理 7 是成立的.

注 5 由例 1 至例 3,定理 4 至定理 6 及例 4 和例 5 可以得出半严格 -*G*- 半预不变凸函数是非常重要的一类函数,在规划问题中有重要应用.

4 结 语

本文提出了半严格 -*G*- 半预不变凸函数,说明了它的存在性,给出了一些性质,并讨论其在非线性规划问题中的应用. 对于这类重要的广义凸性而言,下面的公开问题自然出现:能否在较弱假设下讨论半严格 -*G*- 半预不变凸性与其它广义凸性间的关系? 如何进一步探索此类广义凸性的有效刻画及其在最优化中的其它应用? 这是值得研究的后续课题!

参考文献(References):

[1] Schaible S, Ziemba W T. *Generalized Concavity in Optimization and Economics*[M]. London, UK: Academic Press Inc, 1981.

[2] Mishra S K, Giorgi G. *Invexity and Optimization*, *Nonconvex Optimization and Its Applications*[M]. **88**. Berlin: Spring, 2008.

[3] Hanson M A. On sufficiency of Kuhn-Tucker conditions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1981, **80**(2): 545-550.

[4] Weir T, Mond B. Preinvex functions in multiobjective optimization[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1988, **136**(1): 29-38.

[5] Yang X M, Li D. On properties of preinvex functions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, **256**(1): 229-241.

[6] Yang X M, Li D. Semistrictly preinvex functions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, **258**(1): 287-308.

[7] Antczak T. G-preinvex functions in mathematical programming[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, **217**(1): 212-226.

[8] Antczak T. New optimality conditions and duality results of G type in differentiable mathematical programming[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2007, **66**(7): 1617-1632.

[9] Peng Z Y. Semistrictly G-preinvexity and its applications[J]. *Journal of Inequalities and Applications*, 2012. doi:10.1186/1029-242X-2012-198.

[10] 彭再云, 周选林, 赵勇. 强 G-预不变凸函数的性质及应用[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2012, **29**(4): 12-17. (PENG Zai-yun, ZHOU Xuan-lin, ZHAO Yong. Characteristics and applications of strongly G-preinvex functions[J]. *Journal of Chongqing Normal University (Natural Science Edition)*, 2012, **29**(4): 12-17. (in Chinese))

[11] Yang X Q, Chen G Y. A class of nonconvex functions and prevariational inequalities[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1992, **169**(2): 359-373.

[12] Peng Z Y, Chang S S. Some properties of semi-G-preinvex functions[J]. *Taiwan J Math*, 2013, **17**(3): 873-884.

[13] 彭再云, 孔祥茜. 强 G-半预不变凸性与非线性规划问题[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2013, **31**(1): 48-53. (PENG Zai-yun, KONG Xiang-xi. Strongly semi-G-preinvexity and nonlinear programming[J]. *Journal of Guangxi Normal University (Natural Science Edition)*, 2013, **31**(1): 48-53. (in Chinese))

[14] 彭再云, 孔祥茜. 强 G-半预不变凸函数及其性质[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2013, **30**(2): 1-6. (PENG Zai-yun, KONG Xiang-xi. Strongly semi-G-preinvex functions and its properties[J]. *Journal of Chongqing Normal University (Natural Science Edition)*, 2013, **30**(2): 1-6. (in Chinese))

Semistrict-G-Semi-Preinvexity and Optimization

PENG Zai-yun, LI Yong-hong

(*School of Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing* 400074, *P. R. China*)

Abstract: A class of new generalized convex function—semistrict-G-semi-preinvex functions is given. It is an important class of generalized convex function. It is a true generalization of semistrict preinvex functions and semistrict-G-preinvex functions. First, an example was given to show that there exist semistrict-G-semi-preinvex functions. At the same time, examples were given to show that the semistrict-G-semi-preinvex functions were different from G-semi-preinvex functions. Then, some properties of the semistrict-G-semi-preinvex functions were discussed. Finally, some optimality results were obtained in nonlinear programming problems without constraint and with inequality constraint, and examples were given for illustration of the corresponding results.

Key words: semi-connected set; semistrict-G-semi-preinvex function; nonlinear programming; feasible set